

## درسنامه ۴

محاسبه توان‌های بزرگ در یک ماتریس ( $n \geq 5$ )

برای یافتن توان‌های بزرگ یک ماتریس مانند  $A$ ، معمولاً ماتریس  $A^2$  (در صورت لزوم  $A^3$ ) را می‌یابیم تا الگویی برای محاسبه  $A^n$  به دست آید.

**مثال** اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}$  باشد، ماتریس  $A^{29} - A^{30}$  را بیابید.

**پاسخ:** ابتدا ماتریس  $A^2$  را می‌یابیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = I \quad \begin{cases} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۱۵}} (A^2)^{15} = (I)^{15} \Rightarrow A^{30} = I & \text{(I)} \\ \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۱۴}} (A^2)^{14} = (I)^{14} \Rightarrow A^{28} = I \end{cases}$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } A} A^{29} = A \quad \text{(II)}$$

$$\xrightarrow{\text{(I) } \cdot \text{ (II)}} A^{30} - A^{29} = I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

**مثال** اگر  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  و  $\begin{cases} -2 & i+j=4 \\ 0 & i+j \neq 4 \end{cases}$  باشند، آنگاه ماتریس  $A^{99}$  را به دست آورید.

**پاسخ:** ابتدا ماتریس  $A$  را با درایه‌های مشخص کرده و سپس  $A^2$  را می‌یابیم:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = 4I \quad \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۴۹}} (A^2)^{49} = (4I)^{49} \Rightarrow A^{98} = 4^{49} I \quad \xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } A} A^{99} = 4^{49} A$$

**مثال** اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  باشد، آنگاه مجموع درایه‌های  $A^{50}$  را بیابید.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

**پاسخ:** ابتدا ماتریس  $A^2$  را محاسبه می‌کنیم:

ماتریس  $A^2$  الگویی به ما نمی‌دهد؛ پس ماتریس  $A^3$  را می‌یابیم:

$$A^3 = A \times A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^3 = -I \quad \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۱۶}} (A^3)^{16} = (-I)^{16} \Rightarrow A^{48} = I$$

$$\xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } A^2} A^{50} = A^2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{50} \text{ درایه‌های } = 0 + (-1) + 1 + (-1) = -1$$

**مثال** اگر  $A^2 + A + I = \bar{O}$ ، آنگاه  $A^{35}$  را به دست آورید.

$$A^2 + A + I = \bar{O} \Rightarrow A^2 = -A - I \quad (*)$$

**پاسخ:** ابتدا  $A^2$  را می‌یابیم:

ماتریس  $A^2$  الگویی به ما نمی‌دهد؛ پس ماتریس  $A^3$  را می‌یابیم:

$$\xrightarrow{\text{طرفین } (*) \text{ ضرب در } A} A^3 = -A^2 - A \stackrel{(*)}{=} -(-A - I) - A = I$$

$$\Rightarrow A^3 = I \quad \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۱۱}} A^{33} = I \quad \xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } A^2} A^{35} = A^2 = -A - I$$

درسنامه ۴

مثال

اگر  $A^2 + 2A = \bar{O}$  آن‌گاه  $A^9$  را بیابید.

پاسخ:

$$A^2 + 2A = \bar{O} \Rightarrow A^2 = (-2)^1 A \quad (I)$$

برای یافتن الگوی مناسب، ماتریس  $A^3$  را نیز می‌یابیم.

$$\xrightarrow{\text{ضرب طرفین (I) در } A} A^3 = -2A^2 \stackrel{(I)}{=} -2(-2A) = (-2)^2 A \Rightarrow A^3 = (-2)^2 A \quad (II)$$

$$(I) \cdot (II) \Rightarrow A^4 = (-2)^3 A = 2^3 A$$

مثال

اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های  $A^{20}$  را محاسبه کنید.

پاسخ: ابتدا ماتریس  $A^2$  را می‌یابیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = 2^1 A \quad (I)$$

برای یافتن الگوی مناسب، ماتریس  $A^3$  را نیز می‌یابیم:

$$\xrightarrow{\text{طرفین (I) ضرب در } A} A^3 = 2A^2 \stackrel{(I)}{=} 2(2A) = 2^2 A \Rightarrow A^3 = 2^2 A \quad (II)$$

$$\Rightarrow (I) \cdot (II) \Rightarrow A^{20} = 2^{19} A$$

$$\Rightarrow (A^{20} \text{ های درایه‌ها}) = [(2^{19} A) \text{ های درایه‌ها}] = 2^{19} \times (A \text{ های درایه‌ها}) = 2^{19} \times 8 = 2^{19} \times 2^3 = 2^{22}$$

مثال

اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، آن‌گاه ماتریس  $A^{50}$  را بیابید.

پاسخ: ابتدا ماتریس  $A^2$  را محاسبه می‌کنیم:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

برای یافتن الگوی مناسب، ماتریس  $A^3$  را نیز می‌یابیم:

$$A^{(3)} = A \times A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

با مقایسه ماتریس‌های  $A^1, A^2, A^3$  نتیجه می‌گیریم که فقط درایه سطر اول و ستون دوم در آن‌ها تغییر می‌کند. به این صورت که مقدار آن

$$A^{(50)} = \begin{bmatrix} 1 & 50 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

همواره با توان ماتریس برابر است. پس:

مثال

اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$  باشد، آن‌گاه ماتریس  $A^{1397}$  را بیابید.

پاسخ: برای یافتن الگوی مناسب، ماتریس‌های  $A^2$  و  $A^3$  را می‌یابیم:

$$A^{(1)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad A^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, \quad A^{(3)} = A \times A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

با مقایسه ماتریس‌های  $A^1, A^2, A^3$  نتیجه می‌گیریم که درایه سطر اول و ستون اول آن‌ها یک واحد از توان بیشتر و درایه سطر اول و

ستون دوم آن‌ها قرینه توان و ... می‌باشد. پس:

$$A^n = \begin{bmatrix} n+1 & -n \\ n & 1-n \end{bmatrix} \Rightarrow A^{1397} = \begin{bmatrix} 1398 & -1397 \\ 1397 & -1396 \end{bmatrix}$$

مثال

اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های سطر اول  $A^{10}$  را به دست آورید.

## درستنامه ۴

**پاسخ:** برای یافتن الگوی مناسب، ماتریس‌های  $A^2$  و  $A^3$  را می‌یابیم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A^3 = A \times A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

با مقایسه سطر اول ماتریس‌های  $A^1, A^2, A^3$  نتیجه می‌گیریم:

$$A^1 \text{ سطر اول} = [1 \quad 3 \times 1 \quad 3 \times 1]$$

$$A^2 \text{ سطر اول} = [1 \quad 3 \times 2 \quad 3 \times 2]$$

$$A^3 \text{ سطر اول} = [1 \quad 3 \times 3 \quad 3 \times 3]$$

⋮

$$A^{10} \text{ سطر اول} = [1 \quad 3 \times 10 \quad 3 \times 10] = [1 \quad 30 \quad 30]$$

$$1 + 30 + 30 = 61$$

بنابراین مجموع درایه‌های سطر اول  $A^{10}$  برابر است با:

## محاسبه توان n ام برخی از ماتریس های خاص

مثال

ماتریس قطری  $A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$  را در نظر بگیرید.

(آ) ماتریس‌های  $A^2$  و  $A^3$  را بیابید.

(ب) قانونی برای محاسبه  $A^n$  بیان کنید.

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^3 = A \times A^2 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^3 & 0 & 0 \\ 0 & b^3 & 0 \\ 0 & 0 & c^3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}$$

(ب) برای به توان رساندن یک ماتریس قطری، کافی است درایه‌های روی قطر اصلی را به توان برسانیم و بقیه درایه‌ها را عیناً بنویسیم. یعنی:

مثال

ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \end{bmatrix}$  را در نظر بگیرید.

(آ) ماتریس‌های  $A^2$  و  $A^3$  را بیابید.

(ب) برای محاسبه  $A^n$  قانونی بیان کنید.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k^2 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^3 = A \times A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k^2 & 0 & 0 \\ 0 & k^2 & 0 \\ 0 & 0 & k^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k^3 \\ 0 & k^3 & 0 \\ k^3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} k^n & 0 & 0 \\ 0 & k^n & 0 \\ 0 & 0 & k^n \end{bmatrix} & \text{زوج } n \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & k^n \\ 0 & k^n & 0 \\ k^n & 0 & 0 \end{bmatrix} & \text{فرد } n \end{cases}$$

(ب) برای محاسبه توان  $n$  ام داریم:

سؤالات امتحانی

۴۱. اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  باشد،  $A^{11}$  را بیابید.

۴۲. اگر  $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$  باشد، ماتریس  $A^7 - A^4$  را بیابید.

۴۳. اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$  باشد، مطلوب است محاسبه ماتریس  $A^{10}$ .

۴۴. اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$  باشد، در ماتریس  $A^{100}$  مجموع درایه‌ها را بیابید.

۴۵. اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$  باشد، آنگاه  $A^{13}$  را بیابید.

۴۶. اگر  $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$  باشد، آنگاه  $A^{50}$  را بیابید.

۴۷. اگر  $\bar{O} = A - \frac{1}{2}A^2$  آنگاه  $A^8$  را بیابید.

۴۸. اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$  باشد، آنگاه ماتریس  $A^{13}$  را محاسبه کنید.

۴۹. اگر  $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$  باشد، آنگاه  $A^9$  را بیابید.

۵۰. اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ،  $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$  و  $BA^n = \begin{bmatrix} 4 & 41 \\ 3 & 32 \end{bmatrix}$  باشد، آنگاه  $n$  را به دست آورید.

۵۱. اگر  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  و  $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i \leq j \\ 0 & i > j \end{cases}$  باشد، در ماتریس  $A^{20}$  درایه‌های ستون دوم را بیابید.

۵۲. اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  باشد، ماتریس  $A^{10}$  را بیابید.

۵۳. اگر  $A$  ماتریس مربعی و  $A^2 = \bar{O}$  باشد، حاصل  $(A+2I)^3$  را بیابید.

۵۴. اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ ، ماتریس  $A^8 - A^7$  را بیابید.

۵۵. ماتریس  $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$  مفروض است.

(ا) ماتریس  $A^3$  را به دست آورید.

(ب) برای محاسبه  $A^n$  قانونی بیان کنید.

۵۶. اگر  $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  باشد، ماتریس  $A^{10}$  را محاسبه کنید.

## پاسخ‌های تشریحی

۴۶ ابتدا  $A^2$  را می‌یابیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = A \quad (\text{I})$$

برای یافتن الگوی مناسب،  $A^3$  را نیز می‌یابیم:

$$\xrightarrow{\text{طرفین (I) ضرب در } A} A^3 = A^2 \cdot A \stackrel{(\text{I})}{=} A \Rightarrow A^3 = A \quad (\text{II})$$

$$(\text{I}), (\text{II}) \Rightarrow A^{50} = A$$

۴۷

$$A^2 - \frac{1}{4}A = \bar{O} \Rightarrow A^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^1 A \quad (\text{I})$$

برای یافتن الگوی مناسب،  $A^3$  را نیز می‌یابیم:

$$\xrightarrow{\text{ضرب طرفین (I) در } A} A^3 = \frac{1}{4}A^2 \stackrel{(\text{I})}{=} \frac{1}{4} \left(\frac{1}{4}A\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^2 A$$

$$\Rightarrow A^3 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 A \quad (\text{II})$$

$$(\text{I}), (\text{II}) \Rightarrow A^4 = \left(\frac{1}{4}\right)^3 A$$

۴۸ ابتدا ماتریس  $A^2$  را می‌یابیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 3 \\ -3 & 3 & -3 \\ 3 & -3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = 3^1 A \quad (\text{I})$$

برای یافتن الگوی مناسب،  $A^3$  را نیز می‌یابیم:

$$\xrightarrow{\text{ضرب طرفین (I) در } A} A^3 = 3A^2 \stackrel{(\text{I})}{=} 3(3A) = 3^2 A$$

$$\Rightarrow A^3 = 3^2 A \quad (\text{II})$$

$$(\text{I}), (\text{II}) \Rightarrow A^{13} = 3^{12} A$$

۴۹ ابتدا ماتریس  $A^2$  را می‌یابیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = (-2)^1 A \quad (\text{I})$$

برای یافتن الگوی مناسب،  $A^3$  را نیز می‌یابیم:

$$\xrightarrow{\text{ضرب طرفین (I) در } A} A^3 = -3A^2 \stackrel{(\text{I})}{=} -3(-3A) = (-3)^2 A$$

$$\Rightarrow A^3 = (-3)^2 A \quad (\text{II})$$

$$(\text{I}), (\text{II}) \Rightarrow A^9 = (-3)^8 A$$

۴۱ ابتدا ماتریس  $A^2$  را می‌یابیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = -I \xrightarrow{\text{طرفین به توان } 5} (A^2)^5 = (-I)^5 \Rightarrow A^{10} = -I$$

$$\xrightarrow{\text{طرفین ضرب در } A} A^{11} = -A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

۴۲ ابتدا ماتریس  $A^2$  را می‌یابیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A^2 = I \xrightarrow{\text{طرفین به توان } 3} (A^2)^3 = (I)^3 \Rightarrow A^6 = I \xrightarrow{\times A} A^7 = A \\ A^2 = I \xrightarrow{\text{طرفین به توان } 2} (A^2)^2 = (I)^2 \Rightarrow A^4 = I \end{cases}$$

$$A^7 - A^4 = A - I = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix}$$

۴۳

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = -2I \xrightarrow{\text{طرفین به توان } 10} A^{10} = (-2I)^{10} = 2^{10} I$$

۴۴ ابتدا ماتریس  $A^2$  را می‌یابیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

ماتریس  $A^2$  الگویی به ما نمی‌دهد. پس ماتریس  $A^3$  را نیز می‌یابیم:

$$A^3 = A \times A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^3 = -I \xrightarrow{\text{طرفین به توان } 33} (A^3)^{33} = (-I)^{33} \Rightarrow A^{99} = -I$$

$$\xrightarrow{\times A} A^{100} = -A = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

پس مجموع درایه‌ها در ماتریس  $A^{100}$  برابر است با:  $-1 - 1 + 1 + 0 = -1$ ۴۵ ابتدا ماتریس  $A^2$  را می‌یابیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{bmatrix}$$

ماتریس  $A^2$  الگویی به ما نمی‌دهد. پس ماتریس  $A^3$  را نیز می‌یابیم:

$$\Rightarrow A^3 = A \times A^2 = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -8 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^3 = -8I \xrightarrow{\text{طرفین به توان } 4} (A^3)^4 = (-8I)^4$$

$$\Rightarrow A^{12} = 8^4 I \xrightarrow{\times A} A^{13} = 8^4 A$$

$$\begin{cases} A^2 = I \xrightarrow{\text{طرفین به توان } 4} (A^2)^4 = I^4 \Rightarrow A^8 = I \\ A^2 = I \xrightarrow{\text{طرفین به توان } 3} (A^2)^3 = I^3 \Rightarrow A^6 = I \xrightarrow{\times A} A^7 = A \end{cases}$$

$$\Rightarrow A^8 - A^7 = I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

**روش دوم:** یک ماتریس قطری است. پس برای به توان رساندن آن کافی است درایه‌های قطر اصلی را به توان برسانیم و بقیه درایه‌ها را نیز بدون تغییر بنویسیم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A^8 = \begin{bmatrix} 1^8 & 0 \\ 0 & (-1)^8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ A^7 = \begin{bmatrix} 1^7 & 0 \\ 0 & (-1)^7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

$$\Rightarrow A^8 - A^7 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

**۵۵** ابتدا ماتریس  $A^2$  و سپس  $A^3$  را می‌یابیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^2 & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1^2 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & -27 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2^3 & 0 & 0 \\ 0 & (-3)^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1^3 \end{bmatrix}$$

**ب)** برای به توان رساندن یک ماتریس قطری، کافی است درایه‌های قطر اصلی را به توان برسانیم و بقیه درایه‌ها را بدون تغییر بنویسیم.

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 & 0 \\ 0 & b^n & 0 \\ 0 & 0 & c^n \end{bmatrix}$$

**۵۶** **روش اول:** ابتدا ماتریس  $A^2$  را می‌یابیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = 4I \xrightarrow{\text{طرفین به توان } 5} (A^2)^5 = (4I)^5 \Rightarrow A^{10} = 4^5 I = 2^{10} I$$

**روش دوم:** می‌دانیم:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & k \\ 0 & k & 0 \\ k & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} k^n & 0 & 0 \\ 0 & k^n & 0 \\ 0 & 0 & k^n \end{bmatrix} & \text{زوج } n \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & k^n \\ 0 & k^n & 0 \\ 0 & k^n & 0 \end{bmatrix} & \text{فرد } n \end{cases}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{زوج } n} A^{10} = \begin{bmatrix} 2^{10} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{10} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{10} \end{bmatrix} = 2^{10} I$$

**۵۰** ابتدا ماتریس  $A^2$  را می‌یابیم:

$$A^1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \Rightarrow A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

برای یافتن الگوی مناسب،  $A^3$  را نیز می‌یابیم:

$$\Rightarrow A^3 = A \times A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

با مقایسه ماتریس‌های  $A$ ،  $A^2$  و  $A^3$  نتیجه می‌گیریم:

$$A^n = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حال ماتریس  $BA^n$  را محاسبه می‌کنیم:

$$BA^n = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4n+1 \\ 3 & 3n+2 \end{bmatrix}$$

طبق فرض  $\rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 4n+1 \\ 3 & 3n+2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 41 \\ 3 & 32 \end{bmatrix} \Rightarrow 4n+1=41 \Rightarrow n=10$

**۵۱** ابتدا ماتریس  $A$  را با درایه‌های مشخص می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3 \times 3}$$

برای یافتن الگوی مناسب باید ماتریس‌های  $A^2$  و  $A^3$  را بیابیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A \times A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

با مقایسه ستون دوم ماتریس‌های  $A$ ،  $A^2$  و  $A^3$  نتیجه می‌گیریم ستون دوم  $A^n$  به صورت  $\begin{bmatrix} 2^n \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  می‌باشد.

**۵۲** برای یافتن الگوی مناسب باید ماتریس‌های  $A^2$  و  $A^3$  را بیابیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^3 = A \times A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^3 = \bar{O} \xrightarrow{\times A} A^4 = \bar{O} \Rightarrow \dots \Rightarrow A^{10} = \bar{O}$$

**۵۳**  $A^2 = \bar{O}$  (I)

$\xrightarrow{\text{ضرب طرفین (I) در } A} A^3 = \bar{O}$  (II)

از آن‌جا که  $AI = IA$ ، پس برای دو ماتریس  $A$  و  $I$  اتحادهای جبری برقرار است و داریم:

$$(A+2I)^3 = A^3 + 6A^2 + 12A + 8I$$

$$\underline{\underline{(I) \cdot (II)}} \quad \bar{O} + \bar{O} + 12A + 8I = 12A + 8I$$

**۵۴** **روش اول:** ابتدا ماتریس  $A^2$  را می‌یابیم:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$