درسنامه ۱

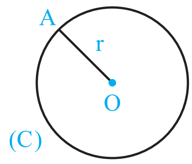
مفاهیم اولیه و زاویه‌ها در دایره

دایره

دایره، مکان هندسی نقاطی از یک صفحه است که فاصلهٔ آن‌ها از نقطهٔ ثابتی در آن صفحه، مقداری ثابت باشد. نقطهٔ ثابت مرکز دایره و مقدار ثابت شعاع دایره نامیده می‌شود.

به عبارت دیگر تمام نقاط روی دایره، از مرکز دایره به یک اندازهٔ ثابت که همان شعاع دایره است قرار دارند.

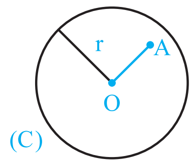
معمولاً دایرهٔ C به مرکز O و شعاع r را به‌صورت $C(O,r)$ نمایش می‌دهیم.



اوضاع نسبی نقطه و دایره

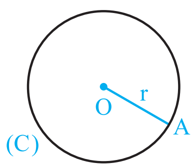
آ) اگر نقطهٔ A درون دایرهٔ $C(O,r)$ باشد، فاصلهٔ آن تا مرکز دایره، کم‌تر از شعاع دایره است.

$$OA < r$$



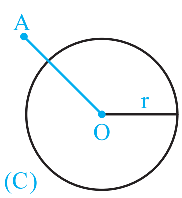
ب) اگر نقطهٔ A روی دایرهٔ $C(O,r)$ باشد، فاصلهٔ آن تا مرکز دایره برابر شعاع دایره است.

$$OA = r$$



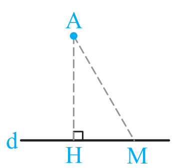
پ) اگر نقطهٔ A بیرون دایرهٔ $C(O,r)$ باشد. فاصلهٔ آن تا مرکز دایره، بیش‌تر از شعاع دایره است.

$$OA > r$$



یادآوری: اگر نقطهٔ A غیرواقع بر خط d داده شده باشد و نقطهٔ H پای عمودی باشد که از A به d رسم می‌شود، اندازهٔ پاره‌خط AH همان فاصلهٔ نقطهٔ A از خط d است و فاصلهٔ نقطهٔ A از سایر نقاط روی d، از این مقدار بزرگ‌تر است.

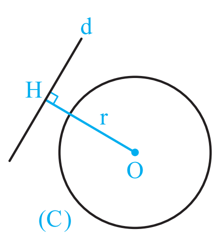
$$AH < AM$$



اوضاع نسبی خط و دایره

آ) خط d هیچ اشتراکی با دایرهٔ $C(O,r)$ ندارد. در این حالت فاصلهٔ نقطهٔ O از خط d بیش‌تر از شعاع دایره است.

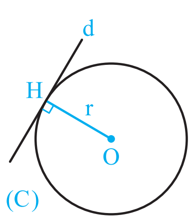
$$OH > r$$



ب) خط d با دایرهٔ $C(O,r)$ فقط و فقط در یک نقطه اشتراک دارد.

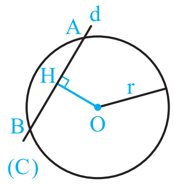
در این حالت فاصلهٔ نقطهٔ O از خط d برابر با شعاع دایره است و می‌گویند خط بر دایره **مماس** است.

$$OH = r$$



درسنامه ۱

پ) خط d با دایرهٔ $C(O,r)$ در دو نقطه اشتراک دارد. در این حالت خط و دایره را **متقاطع** می‌نامند.

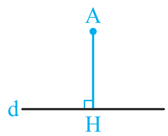


در این حالت فاصلهٔ نقطهٔ O از خط d کم‌تر از شعاع دایره است و گفته می‌شود خط نسبت به دایره قاطع است.

$OH < r$

یادآوری: فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0,y_0)$ از خط $d: ax+by+c=0$ برابر است با:

$$AH = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

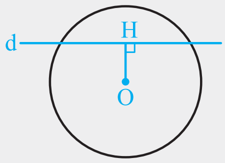


مثال

خط $d: x+2y+3=0$ و دایرهٔ $C(O,5)$ به مرکز $O(0,1)$ مفروض می‌باشند. وضعیت خط نسبت به دایره چگونه است؟

پاسخ: با توجه به یادآوری فوق، کافی است فاصلهٔ مرکز دایره تا خط d را بیابیم:

$$OH = \frac{|0+2+3|}{\sqrt{1^2+2^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

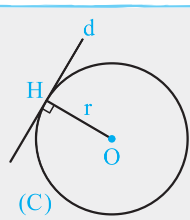


از طرفی شعاع دایره $r=5$ می‌باشد. بنابراین $OH < r$ و در نتیجه خط و دایره متقاطع‌اند؛ یعنی خط، دایره را در دو نقطه قطع می‌کند.

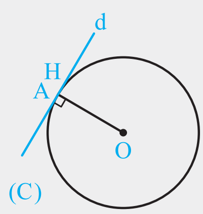
مثال

ثابت کنید:

«یک خط و دایره بر هم مماس‌اند اگر و تنها اگر این خط بر شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس عمود باشد.»



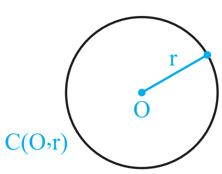
پاسخ: فرض می‌کنیم خط d بر دایرهٔ $C(O,r)$ در نقطهٔ A مماس باشد. از نقطهٔ O بر خط d خط عمودی رسم می‌کنیم و پای عمود را H می‌نامیم، در واقع H نزدیک‌ترین نقطه از خط d به O است. بنابراین نقطهٔ A و H بر هم منطبق‌اند و $OH = R$



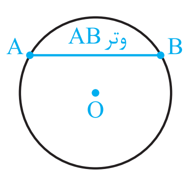
برعکس نقطهٔ A را روی دایره در نظر می‌گیریم. شعاع گذرنده از نقطهٔ A را رسم می‌کنیم، سپس خط گذرنده از نقطهٔ A عمود بر OA را رسم می‌کنیم. چون نقطهٔ H از خط d، کم‌ترین فاصله را از O دارد، بنابراین این خط در نقطهٔ A بر دایرهٔ C مماس است.

تعاریف و مفاهیم اولیه

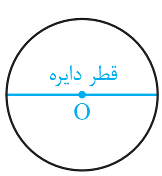
آ) شعاع دایره: پاره‌خطی که یک انتهای آن مرکز دایره و انتهای دیگر آن نقطه‌ای روی دایره است.



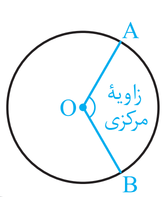
ب) وتر دایره: پاره‌خطی که دو نقطهٔ متمایز از دایره را به هم وصل می‌کند. به عبارت دیگر پاره‌خطی که دو سر آن روی دایره باشد.



پ) قطر دایره: وتری از دایره که از مرکز دایره می‌گذرد.



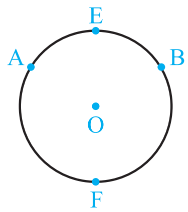
ت) زاویهٔ مرکزی: زاویه‌ای که رأس آن بر مرکز دایره واقع است.



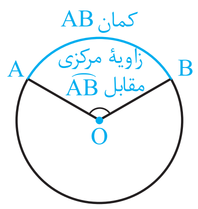
درسنامه ۱

ث) زاویهٔ محاطی: زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره و اضلاع آن دو وتر از دایره باشند.

ج) کمان: دو نقطهٔ A و B واقع بر یک دایره، دو کمان $\overset{\frown}{AB}$ را روی آن دایره مشخص می‌کنند. در این حالت برای مشخص کردن هر یک از آن‌ها، از نقطه‌ای اختیاری واقع بر هر یک از دو کمان استفاده می‌شود، مانند کمان‌های $\overset{\frown}{AEB}$ و $\overset{\frown}{AFB}$ در شکل مقابل. معمولاً منظور از $\overset{\frown}{AB}$، کمان کوچک‌تر است.

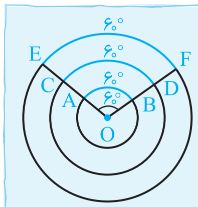


چ) اندازهٔ کمان: هر یک از زاویه‌های مرکزی یک کمان از دایره جدا می‌کنند. به آن کمان، کمان نظیر آن زاویهٔ مرکزی گفته می‌شود. اندازهٔ کمان نظیر هر زاویهٔ مرکزی، همان اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به آن کمان تعریف می‌شود که واحد آن درجه است.



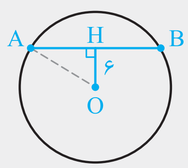
نکته

کمان‌های دایره‌های مختلف می‌توانند اندازه‌های برابر و طول‌های نابرابر داشته باشند.



مثال

دایرهٔ $C(O,۱۰)$ داده شده است. اگر فاصلهٔ مرکز دایره از وتر AB برابر ۶ باشد، طول وتر AB را به‌دست آورید.



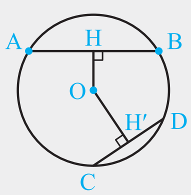
پاسخ: در مثلث OHA از رابطهٔ فیثاغورس استفاده می‌کنیم:

$$OA^۲ = OH^۲ + AH^۲ \Rightarrow ۱۰^۲ = ۶^۲ + AH^۲ \Rightarrow AH^۲ = ۶۴ \Rightarrow AH = ۸$$

$$AB = ۲AH = ۱۶$$

مثال

در دایرهٔ $C(O,R)$ نشان دهید $AB > CD$ اگر و فقط اگر $OH < OH'$ (OH و OH' فاصلهٔ O از دو وتر AB و CD هستند.)



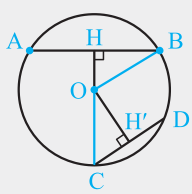
پاسخ:

فرض : $AB > CD$

حکم : $OH < OH'$

از O به B و C وصل می‌کنیم تا مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ OHB و $OH'C$ تشکیل شوند.

با به کار بردن قضیهٔ فیثاغورس برای این دو مثلث داریم:



$$\begin{cases} \overset{\Delta}{OHB}: OB^۲ = OH^۲ + HB^۲ \\ \overset{\Delta}{OH'C}: OC^۲ = OH'^۲ + H'C^۲ \end{cases} \xrightarrow{OB=OC=R} OH^۲ + HB^۲ = OH'^۲ + H'C^۲ \qquad (۱)$$

$$\xrightarrow[AB>CD \Rightarrow HB>H'C]{\text{طبق فرض}} OH'^۲ > OH^۲ \Rightarrow OH' > OH$$

اثبات عکس قضیه:

فرض : $OH < OH'$

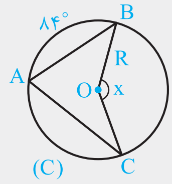
حکم : $AB > CD$

تمامی مراحل بالا را تکرار کرده تا به رابطهٔ (۱) برسیم. سپس استدلال می‌کنیم:

طبق فرض : $OH < OH' \Rightarrow BH > CH' \Rightarrow AB > CD$

درسنامه ۱

مثال



در دایرهٔ $C(O،R)$ مطابق شکل روبه‌رو:

آ) اگر $\overset{\frown}{AC}=۱۲۰^\circ$. آن‌گاه زاویهٔ $B\hat{O}C$ را بیابید.

ب) اگر $x=۱۴۵^\circ$ ، آن‌گاه اندازهٔ کمان AC را به‌دست آورید.

پاسخ: آ)

$$\overset{\frown}{BC}=۳۶۰^\circ-(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AC})=۳۶۰^\circ-(۸۴^\circ+۱۲۰^\circ)=۱۵۶^\circ$$

x زاویهٔ مرکزی است، بنابراین:

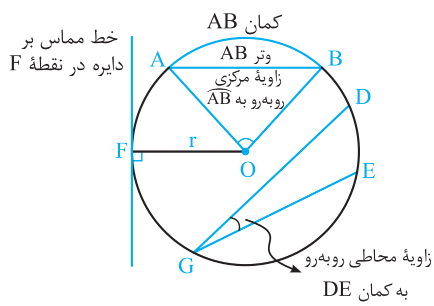
$$x=\overset{\frown}{BC}=۱۵۶^\circ$$

ب)

$$x=۱۴۵^\circ \Rightarrow \overset{\frown}{BC}=۱۴۵^\circ$$

$$\overset{\frown}{AC}=۳۶۰^\circ-(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC})=۳۶۰^\circ-(۸۴^\circ+۱۴۵^\circ)=۱۳۱^\circ$$

نمای کلی از مطالب مطرح‌شده:

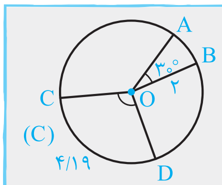


رابطهٔ اندازهٔ کمان AB با طول کمان AB

محیط دایره، یک کمان به اندازهٔ ۳۶۰° است. بنابراین داریم:

$$\frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}}=\frac{\text{اندازهٔ کمان } AB}{۳۶۰}$$

مثال



در شکل روبه‌رو طول کمان AB و اندازهٔ کمان CD را به‌دست آورید. $(\pi\simeq ۳/۱۴)$

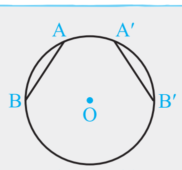
پاسخ: طبق فرمول برای طول و اندازهٔ کمان، ابتدا محیط دایره را محاسبه می‌کنیم:

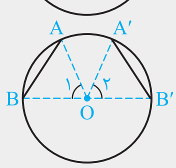
$$\text{محیط دایرهٔ } C=۲\pi r\simeq ۲\times ۳/۱۴\times ۲=۱۲/۵۶$$

$$\frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}}=\frac{\text{اندازهٔ کمان } AB}{۳۶۰^\circ}\Rightarrow \frac{\text{طول } \overset{\frown}{AB}}{۱۲/۵۶}=\frac{۳۰^\circ}{۳۶۰^\circ}\Rightarrow \text{طول } \overset{\frown}{AB}\simeq ۱/۰۴۶$$

$$\frac{\text{طول کمان } CD}{\text{محیط دایره}}=\frac{\text{اندازهٔ کمان } CD}{۳۶۰^\circ}\Rightarrow \frac{۴/۱۹}{۱۲/۵۶}\simeq\frac{\overset{\frown}{CD}}{۳۶۰^\circ}\Rightarrow \overset{\frown}{CD}\simeq ۱۲۰^\circ$$

مثال





ثابت کنید اندازهٔ دو کمان از یک دایره با هم برابرند اگر و تنها اگر وترهای نظیر آن‌ها برابر باشند. به طور مثال در شکل روبه‌رو کمان‌های AB و $A'B'$ برابرند اگر و فقط اگر وترهای AB و $A'B'$ برابر باشند. (مشابه نهایی- شهریور ۹۵)

پاسخ:

فرض : $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$

حکم : $AB=A'B'$

درسنامه ۱

از O به نقاط A، A'، B و B' وصل می‌کنیم. تا دو مثلث OAB و $OA'B'$ تشکیل شوند. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} R = OA = OA' \\ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \\ R = OB = OB' \end{array}\right\} \xrightarrow{(ض‌زض)} \overset{\Delta}{OAB} \cong \overset{\Delta}{OA'B'} \Rightarrow AB = A'B'$$

(زوایای مرکزی روبه‌روی کمان‌های برابر AB و $A'B'$)

اثبات عکس:

فرض : $AB = A'B'$

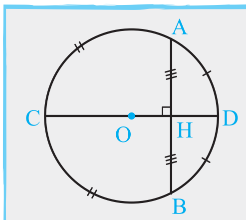
حکم : $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$

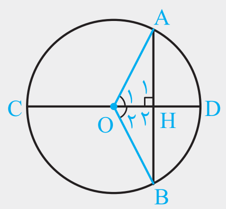
$$\left.\begin{array}{l} AB = A'B' \ (\text{فرض}) \\ R = OB = OB' \\ R = OA = OA' \end{array}\right\} \xrightarrow{(ض‌ض‌ض)} \overset{\Delta}{OAB} \cong \overset{\Delta}{OA'B'} \Rightarrow \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$$

$O_۱$ و $O_۲$ زوایای مرکزی‌اند، بنابراین:

$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$

مثال **ثابت کنید در هر دایره، قطر عمود بر هر وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند.**





پاسخ:

فرض : $CD = ۲R$ ، $CD \perp AB$

حکم : $AH = BH$ ، $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$ ، $\overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$

از نقطهٔ O به دو سر پاره‌خط AB وصل می‌کنیم تا مثلث‌های OAH و OBH پدید آیند.

$$\left.\begin{array}{l} R = OA = OB \\ \hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰^\circ \\ OH = OH \ \text{مشترک} \end{array}\right\} \xrightarrow{(ض‌زض)} \overset{\Delta}{OAH} \cong \overset{\Delta}{OBH} \xrightarrow{\text{اجزای نظیر}} \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \ ، \ AH = BH$$

$\hat{O}_۱$ و $\hat{O}_۲$ زوایای مرکزی روبه‌روی کمان‌های AD و BD هستند پس $\overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD}$ (۱)

چون CD قطر است، دایره را به دو کمان مساوی تقسیم می‌کند. یعنی:

$$\overset{\frown}{DAC} = \overset{\frown}{DBC} \xrightarrow{\text{طبق (۱)}} \overset{\frown}{DAC} - \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DBC} - \overset{\frown}{BD} \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$$

(سعی کنید با استفاده از خواص مثلث متساوی‌الساقین در مثلث AOB، اثبات دیگری ارائه دهید.)

۱. **خط $d: ۲\sqrt{۲}x + y + c = ۰$ و دایرهٔ C به شعاع ۳ و مرکز $O(۰،۴)$ مفروض است. مقادیر c را در حالتی‌که خط و دایره بر هم مماس‌اند، بیابید.**

۲. **ثابت کنید اگر دو وتر AB و AC از یک دایره برابر باشند، آن‌گاه قطر گذرنده از A نیمساز زاویهٔ BAC می‌باشد و کمان نظیر این زاویه را نصف می‌کند.**

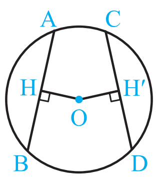
۳. **در دایرهٔ $C(O،R)$، $AB = ۸$ و فاصلهٔ مرکز از وتر AB برابر $\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$ است. اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{AB}$ را به‌دست آورید.**

۴. **نشان دهید در هر دایره، قطری که وتر را نصف می‌کند، بر آن وتر عمود است و کمان‌های نظیر آن وتر را نصف می‌کند.**

۵. **نشان دهید در هر دایره، اگر قطری کمان نظیر یک وتر را نصف کند، بر آن وتر عمود است و آن را نصف می‌کند.**

۶. ثابت کنید کوتاه‌ترین وتر گذرنده از یک نقطه درون دایره، وتری است که بر قطر گذرنده از این نقطه عمود باشد. سپس طول این وتر را بر اساس شعاع دایره و فاصلهٔ مرکز از وتر بیابید.

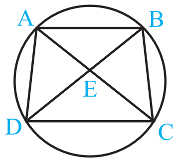
۷. در دایرهٔ مقابل نشان دهید $AB = CD$ اگر و فقط اگر $OH = OH'$ (OH و OH' فاصلهٔ O از دو وتر AB و CD هستند.)



۸. با توجه به شکل نشان دهید: (نهایی- دی ۸۲)

آ) اگر $AD = BC$، آن‌گاه $AC = BD$

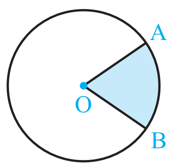
ب) اگر $AC = BD$، آن‌گاه $AD = BC$



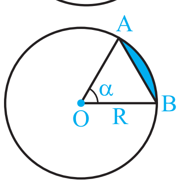
۹. مکان هندسی مرکز تمامی دایره‌هایی را که شعاع آن‌ها مقدار ثابت R است و بر خط مفروض d مماس‌اند، به‌دست آورید.

۱۰. دو خط L و d در نقطهٔ O متقاطع‌اند. دایره‌ای رسم کنید که مرکز آن روی خط d و شعاع آن ۳ سانتی‌متر بوده بر خط L مماس باشد.

۱۱. قطاع دایره به ناحیه‌ای از درون و روی دایره می‌گویند که به وسیلهٔ دو شعاع از دایره محدود شده است. اگر زاویهٔ مرکزی قطاعی از دایرهٔ $C(O،R)$ بر حسب درجه برابر α باشد، نشان دهید طول کمان AB برابر با $L = \frac{\pi R}{۱۸۰}\alpha$ و مساحت قطاع برابر با $S = \frac{\pi R^۲ \alpha}{۳۶۰}$ است.

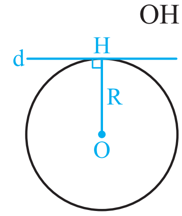


۱۲. مطابق شکل مقابل ناحیهٔ رنگی محدود به دایره و وتر AB را قطعه‌ای از دایره می‌نامند. اگر شعاع دایره R باشد و زاویهٔ مرکزی $A\hat{O}B$ برابر α باشد، مساحت این قطعه را بر حسب α و R به‌دست آورید.



پاسخ‌های تشریحی

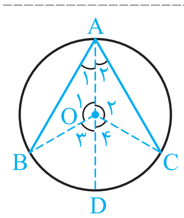
۱ در صورتی خط بر دایره مماس می‌شود که $OH = R$



$$\frac{|۰+۴+c|}{\sqrt{(۲\sqrt{۲})^۲+۱^۲}} = ۳ \Rightarrow |۴+c| = ۹$$

$$\begin{cases} ۴+c=۹ \\ ۴+c=-۹ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=۵ \\ c=-۱۳ \end{cases}$$

۲ شعاع‌های OB و OC را رسم می‌کنیم:



$$\left.\begin{array}{ll} AB = AC & \text{(طبق فرض)} \\ OA = OA & \\ OB = OC & \text{(شعاع)} \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض‌ض‌ض)}} \overset{\Delta}{AOB} \cong \overset{\Delta}{AOC}$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \hat{A}_۱ = \hat{A}_۲ \ ،\ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$$

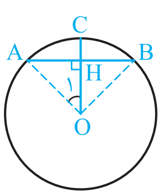
از طرفی:

$$\hat{O}_۳ + \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ + \hat{O}_۴ = ۱۸۰^\circ \xrightarrow{\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲} \hat{O}_۳ = \hat{O}_۴$$

چون $\overset{\frown}{BD}$ و $\overset{\frown}{CD}$ به ترتیب کمان‌های مقابل به زوایای مرکزی $O_۳$ و $O_۴$ هستند. بنابراین:

$$\overset{\frown}{BD} = \overset{\frown}{CD}$$

۳ اندازهٔ OH دادهٔ مسئله است که روی قطر عمود بر وتر AB است که وتر و کمان روبه‌روی آن را نصف می‌کند. بنابراین:

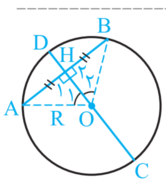


$$AH = \frac{۱}{۲}AB = ۴ \ ,\ OH = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

طبق روابط مثلثاتی در مثلث قائم‌الزاویهٔ AOH داریم:

$$\tan\hat{O}_۱ = \frac{AH}{OH} = \frac{۴}{\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}} = \sqrt{۳} \Rightarrow \hat{O}_۱ = ۶۰^\circ \Rightarrow A\hat{O}B = \overset{\frown}{AB} = ۱۲۰^\circ$$

۴ پاره‌خط‌های OA و OB را رسم می‌کنیم:



$$\left.\begin{array}{ll} OA = OB = R & \\ AH = BH & \text{(فرض)} \\ OH = OH & \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(ض‌ض‌ض)}} \overset{\Delta}{OAH} \cong \overset{\Delta}{OBH}$$

$$\xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ \ ،\ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$$

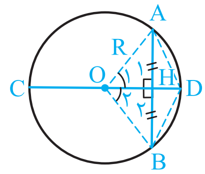
اما داریم:

$$\hat{H}_۱ + \hat{H}_۲ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰^\circ \Rightarrow CD \perp AB$$

هم‌چنین:

$$\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \Rightarrow \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{BD} \ ،\ \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BC}$$

۵ فرض کنیم قطر CD کمان ADB را در نقطهٔ D نصف کرده باشد، یعنی داشته باشیم:



$$\widehat{AD}=\widehat{BD}$$

بنابراین اگر OA و OB را رسم کنیم، زوایای مرکزی $O_۱$ و $O_۲$ برابرند.

$$\left.\begin{array}{l} OA=OB=R \\ \hat{O}_۱=\hat{O}_۲ \\ OD=OD \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض‌زض})} \overset{\Delta}{OAD}\cong\overset{\Delta}{OBD}$$

$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{OAD}}=S_{\overset{\Delta}{OBD}} \Rightarrow \frac{AH\times OD}{۲}=\frac{BH\times OD}{۲}$$

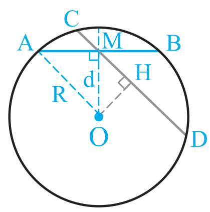
$$\Rightarrow AH=BH \qquad (۱)$$

$$\left.\begin{array}{l} (\text{شعاع})\ OA=OB \\ (۱)\quad AH=BH \\ \text{مشترک}\ OH=OH \end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{OAH}\cong\overset{\Delta}{OBH}\Rightarrow \hat{H}_۱=\hat{H}_۲$$

$$\xrightarrow{\hat{H}_۱+\hat{H}_۲=۱۸۰^\circ} \hat{H}_۱=\hat{H}_۲=۹۰^\circ$$

---

۶ وتر AB گذرنده از M و عمود بر قطر گذرنده از M را در نظر می‌گیریم. نشان می‌دهیم به ازای هر وتر دیگر گذرنده از نقطهٔ M، وتر AB کوچک‌تر است.



وتر دلخواه CD را در نظر می‌گیریم که از نقطهٔ M می‌گذرد. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHM، OM وتر است بنابراین $OH<OM$. طبق یک تمرین داریم هر چه فاصلهٔ یک وتر از مرکز دایره کم‌تر باشد، طول آن بزرگ‌تر است. بنابراین: $CD>AB$

اگر $OM=d$ و شعاع دایره $OA=R$ باشند، داریم:

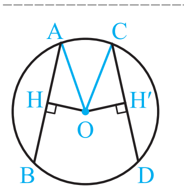
$$\overset{\Delta}{OAM}:\hat{M}=۹۰^\circ \xrightarrow{\text{فیثاغورس}} OA^۲=OM^۲+AM^۲$$

$$\Rightarrow AM=\sqrt{R^۲-d^۲}$$

اما $AB=۲AM$ در نتیجه:

$$AB=۲\sqrt{R^۲-d^۲}$$

۷



فرض: $AB=CD$

حکم: $OH=OH'$

از مرکز دایره (نقطهٔ O) به نقاط A و C وصل می‌کنیم تا مثلث‌های قائم‌الزاویهٔ AOH و COH′ تشکیل شوند.

$$\left.\begin{array}{l} AH=CH' \ (\text{شعاع عمود بر وتر، وتر را نصف می‌کند.}) \\ R=OA=OC \end{array}\right\}$$

$$\xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\Delta}{AOH}\cong\overset{\Delta}{COH'}\Rightarrow OH=OH'$$

اثبات عکس:

فرض: $OH=OH'$

حکم: $AB=CD$

$$\left.\begin{array}{l} R=OA=OC \\ (\text{فرض})\ OH=OH' \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{وتر و یک ضلع}} \overset{\Delta}{AOH}\cong\overset{\Delta}{COH'}$$

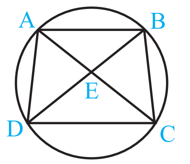
$$\Rightarrow AH=CH' \xrightarrow{\times ۲} AB=CD$$

---

۸ آ)

فرض: $AD=BC$

حکم: $AC=BD$



طبق قضیه‌ای داشتیم که در هر دایره، وترهای نظیر کمان‌های مساوی، برابرند و بر عکس، پس:

$$(\text{طبق فرض})\ AD=BC\Rightarrow \widehat{AD}=\widehat{BC} \qquad (۱)$$

$$\left.\begin{array}{l} \widehat{ABC}=\widehat{AB}+\widehat{BC} \\ \widehat{BAD}=\widehat{AB}+\widehat{AD} \end{array}\right. \xrightarrow{\text{طبق }(۱)} \widehat{ABC}=\widehat{BAD}\Rightarrow AC=BD$$

ب)

فرض: $AC=BD$

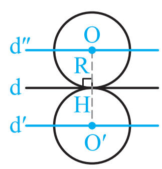
حکم: $AD=BC$

$$(\text{طبق فرض})\ AC=BD\Rightarrow \widehat{ABC}=\widehat{BAD}$$

$$\Rightarrow \widehat{AB}+\widehat{BC}=\widehat{AB}+\widehat{AD}\Rightarrow \widehat{BC}=\widehat{AD}\Rightarrow BC=AD$$

---

۹ خط مفروض d را در نظر می‌گیریم.

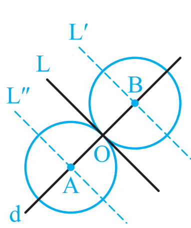


چون شعاعی از دایره که از نقطهٔ تماس می‌گذرد بر خط مماس عمود است، اگر O مرکز دایره‌ای به شعاع R باشد که بر خط d مماس است یعنی $OH\perp d$، این بدان معنی است که فاصلهٔ نقطهٔ O از خط d برابر R است.

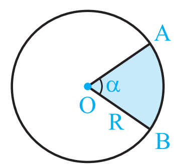
پس فاصلهٔ تمامی مرکز دایره‌هایی با ویژگی خواسته‌شده از خط d برابر R می‌باشد که این مراکز روی خطوط d′ و d″ که موازی خط d بوده و دو طرف آن واقع‌اند، قرار دارند.

---

۱۰ با توجه به تمرین قبل مراکز همهٔ دایره‌هایی که به شعاع ۳ سانتی‌متر و مماس بر خط L اند، دو خط موازی می‌باشد که در دو طرف خط L و به فاصلهٔ ۳ سانتی‌متر از آن قرار دارند (خطوط L′ و L″). نقطهٔ تقاطع این خطوط با خط d، مرکز دایرهٔ مورد نظر است. (نقاط A و B)



۱۱ $\widehat{AOB} = \overset{\frown}{AB} = \alpha$ (زاویهٔ مرکزی)



طبق رابطهٔ طول و اندازهٔ کمان داریم:

$$\frac{\text{اندازهٔ کمان } AB}{۳۶۰^\circ} = \frac{\text{طول کمان } AB}{\text{محیط دایره}}$$

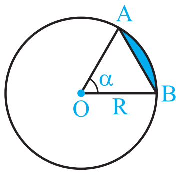
اگر طول کمان AB را برابر L در نظر بگیریم:

$$\frac{\alpha}{۳۶۰} = \frac{L}{۲\pi R} \Rightarrow L = \frac{۲\pi R}{۳۶۰}\alpha = \frac{\pi R}{۱۸۰}\alpha$$

مساحت کل دایره برابر $\pi R^۲$ است، بنابراین مساحت یک قطاع برابر است با مساحت دایره ضرب در نسبت زاویه‌ای که در بر دارد به کل دایره که ۳۶۰ درجه می‌باشد. بنابراین:

$$S = \pi R^۲ \times \frac{\alpha}{۳۶۰^\circ} = \frac{\pi R^۲\alpha}{۳۶۰^\circ}$$

۱۲



مساحت قطعه = (مساحت قطاع AOB) − (مساحت $\overset{\Delta}{AOB}$)

$$\xrightarrow[S_{AOB}=\frac{۱}{۲}OA\times OB\times\sin\alpha]{\text{دستور سینوس برای محاسبهٔ مساحت مثلث}} S_{\text{قطعه}} = \frac{\pi R^۲\alpha}{۳۶۰^\circ} - \frac{۱}{۲}R^۲\sin\alpha$$

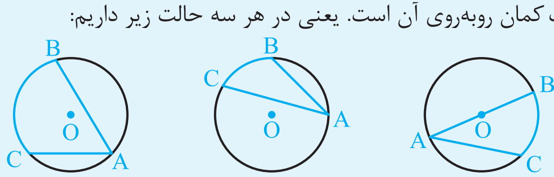
$$= \frac{۱}{۲}R^۲\left(\frac{\pi\alpha}{۱۸۰^\circ} - \sin\alpha\right)$$

درسنامه ۲

زوایای محاطی و ظلی

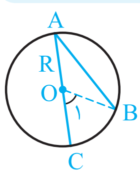
قضیه: اندازهٔ هر زاویهٔ محاطی، برابر نصف کمان روبه‌روی آن است. یعنی در هر سه حالت زیر داریم:

$$B\widehat{A}C = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$



اثبات: این قضیه را در سه حالت زیر اثبات می‌کنیم:

حالت اول: یک ضلع زاویهٔ محاطی، قطری از دایره باشد.



از O به B وصل می‌کنیم تا مثلث متساوی‌الساقین $OAB\,(OB = OA)$ ایجاد شود. بنابراین:

$$\overset{\Delta}{OAB} \text{ زاویهٔ خارجی } \widehat{O}_۱ = \widehat{A} + \widehat{B} \xrightarrow{\widehat{A}=\widehat{B}} \widehat{O}_۱ = ۲\widehat{A} \Rightarrow \widehat{A} = \frac{\widehat{O}_۱}{۲} \quad (۱)$$

از طرفی $\widehat{O}_۱$ زاویهٔ مرکزی است، یعنی:

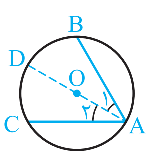
$$\widehat{O}_۱ = \overset{\frown}{BC} \quad (۲)$$

طبق (۱) و (۲) داریم:

$$\widehat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

حالت دوم: دو ضلع زاویهٔ محاطی در دو طرف مرکز دایره باشد.

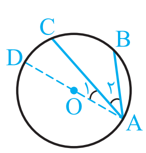
ابتدا مطابق شکل قطری از دایره را که از رأس A می‌گذرد، رسم می‌کنیم. با توجه به حالت اول داریم:



$$\left.\begin{aligned}\widehat{A}_۱ &= \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}\\ \widehat{A}_۲ &= \frac{\overset{\frown}{DC}}{۲}\end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{جمع طرفین}} \underbrace{\widehat{A}_۱ + \widehat{A}_۲}_{\widehat{A}} = \underbrace{\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{DC}}{۲}}_{\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}} \Rightarrow \widehat{A} = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

حالت سوم: دو ضلع زاویهٔ محاطی در یک طرف مرکز دایره واقع شده باشند.

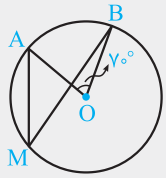
قطر AD را رسم می‌کنیم. طبق حالت اول داریم:



$$\left.\begin{aligned}\widehat{A} &= \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲}\\ \widehat{A}_۱ &= \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲}\end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{تفاضل طرفین}} \underbrace{\widehat{A} - \widehat{A}_۱}_{\widehat{A}_۲} = \underbrace{\frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} - \frac{\overset{\frown}{CD}}{۲}}_{\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}} \Rightarrow \widehat{A}_۲ = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$$

درسنامه ۲

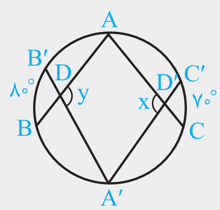
مثال **در دایرهٔ مقابل به مرکز O، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی AOB برابر ۷۰° است. اندازهٔ زاویهٔ محاطی $A\widehat{M}B$ چقدر است؟**



پاسخ: اندازهٔ هر زاویهٔ مرکزی با کمان روبه‌رویش برابر است، بنابراین: $\widehat{AB}=۷۰^\circ$

در نتیجه: $A\widehat{M}B=\dfrac{\widehat{AB}}{۲}=\dfrac{۷۰^\circ}{۲}=۳۵^\circ$

مثال **در شکل مقابل مقدار $x+y$ را به‌دست آورید.**



پاسخ: با یافتن مقدار $\widehat{A}+\widehat{A'}$، مقدار $x+y$ مشخص می‌شود. چون مجموع زوایای چهارضلعی $ADA'D'$ برابر ۳۶۰° است. بنابراین:

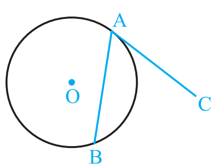
$$\left.\begin{aligned}&(\text{زاویهٔ محاطی})\ \widehat{A}=\frac{\widehat{BA'C}}{۲}\\&(\text{زاویهٔ محاطی})\ \widehat{A'}=\frac{\widehat{B'AC'}}{۲}\end{aligned}\right\}\xrightarrow{\text{جمع طرفین تساوی}}\widehat{A}+\widehat{A'}=\frac{\widehat{BA'C}+\widehat{B'AC'}}{۲}$$

$$\Rightarrow \widehat{BA'C}+\widehat{B'AC'}=۳۶۰^\circ-(\widehat{BB'}+\widehat{CC'})=۳۶۰^\circ-۱۵۰^\circ=۲۱۰^\circ$$

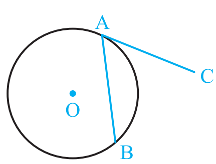
$$\Rightarrow \widehat{A}+\widehat{A'}=\frac{۲۱۰^\circ}{۲}=۱۰۵^\circ\Rightarrow x+y=۳۶۰^\circ-(\widehat{A}+\widehat{A'})=۳۶۰^\circ-۱۰۵^\circ=۲۵۵^\circ$$

زاویهٔ ظلی

زاویهٔ ظلی: زاویه‌ای است که رأس آن روی دایره می‌باشد. یکی از اضلاع آن وتری از دایره و ضلع دیگرش مماس بر دایره است. مانند $C\widehat{A}B$ در شکل مقابل:



قضیه: اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی، برابر نصف کمان روبه‌روی آن است، یعنی در شکل مقابل: $C\widehat{A}B=\dfrac{\widehat{AB}}{۲}$

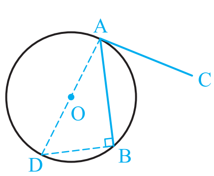


اثبات:

فرض: $C\widehat{A}B$ زاویهٔ ظلی است

حکم: $C\widehat{A}B=\dfrac{\widehat{AB}}{۲}$

قطر AD را رسم می‌کنیم:



سپس از D به B وصل می‌کنیم. B زاویهٔ محاطی مقابل به قطر است. در نتیجه $\widehat{B}=\dfrac{\widehat{AD}}{۲}=۹۰^\circ$

بنابراین:

$A\widehat{D}B+D\widehat{A}B=۹۰^\circ \quad (۱)$

چون خط مماس در نقطهٔ تماس بر شعاع دایره (OA) عمود است، پس:

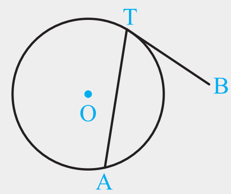
$D\widehat{A}B+B\widehat{A}C=۹۰^\circ \quad (۲)$

از (۱) و (۲) داریم:

$$\left.\begin{aligned}&B\widehat{A}C=A\widehat{D}B\\&(\text{زاویهٔ محاطی})\ A\widehat{D}B=\frac{\widehat{AB}}{۲}\end{aligned}\right\}\Rightarrow B\widehat{A}C=\frac{\widehat{AB}}{۲}$$

درسنامه ۲

مثال اگر اندازهٔ زاویهٔ ظلی ATB برابر $(۲\alpha-۶)^\circ$ و اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{AT}$ برابر $(۳\alpha+۳۳)^\circ$ باشد، مقدار α و اندازهٔ زاویهٔ ATB را به‌دست آورید. (نهایی- شهریور ۹۴)



پاسخ: چون اندازهٔ هر زاویهٔ ظلی برابر با نصف کمان مقابل آن است، داریم:

$$A\hat{T}B=\frac{\overset{\frown}{AT}}{۲}$$

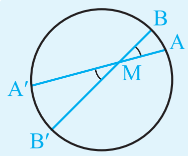
طبق فرض $\overset{\frown}{AT}=(۳\alpha+۳۳)^\circ$ و $A\hat{T}B=(۲\alpha-۶)^\circ$، بنابراین:

$$۲\alpha-۶=\frac{۳\alpha+۳۳}{۲}\Rightarrow ۴\alpha-۱۲=۳\alpha+۳۳\Rightarrow \alpha=۴۵^\circ$$

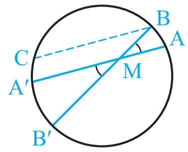
$$\Rightarrow A\hat{T}B=(۲\times۴۵-۶)=۸۴^\circ$$

قضیه: اندازهٔ زاویه‌ای که از برخورد دو وتر در یک دایره ایجاد می‌شود، برابر نصف مجموع اندازهٔ دو کمانی از دایره است که به اضلاع و امتداد اضلاع آن زاویه محدودند یعنی در شکل مقابل داریم:

$$A\hat{M}B=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{A'B'}}{۲}$$



اثبات:



AA' و BB' دو وتر متقاطع از دایره : فرض

$A\hat{M}B=A'\hat{M}B'=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{A'B'}}{۲}$: حکم

از نقطهٔ B خطی موازی با وتر AA' رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ C قطع کند.

$$BC\parallel AA'\xrightarrow{\text{مورب } BB'}A\hat{M}B=C\hat{B}B'$$

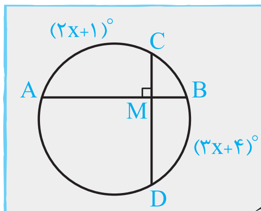
$C\hat{B}B'$ یک زاویهٔ محاطی است. بنابراین:

$$C\hat{B}B'=\frac{\overset{\frown}{CB'}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{CA'}+\overset{\frown}{A'B'}}{۲}$$

در یکی از تمرینات همین درسنامه، ثابت کردیم که کمان‌های محصور بین دو وتر موازی برابرند، یعنی $BC\parallel AA'\Rightarrow \overset{\frown}{CA'}=\overset{\frown}{BA}$، در نتیجه:

$$C\hat{B}B'=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{A'B'}}{۲}\Rightarrow A\hat{M}B=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{A'B'}}{۲}$$

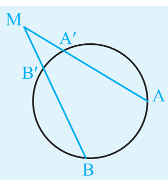
مثال مقدار x را در شکل مقابل به‌دست آورید. (نهایی- دی ۹۰)



پاسخ: $C\hat{M}A=\frac{\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}}{۲}\xrightarrow{C\hat{M}A=۹۰^\circ}۹۰^\circ=\frac{\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{BD}}{۲}\Rightarrow\frac{(۲x+۱)^\circ+(۳x+۴)^\circ}{۲}=۹۰^\circ\Rightarrow ۵x+۵=۱۸۰^\circ\Rightarrow x=۳۵^\circ$

قضیه: اندازهٔ زاویه‌ای که از برخورد امتداد دو وتر از یک دایره پدید می‌آید، برابر نصف تفاضل اندازهٔ کمان‌هایی از آن دایره است که به ضلع‌های آن زاویه محدودند، یعنی در شکل مقابل داریم:

$$A\hat{M}B=\frac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{A'B'}}{۲}$$

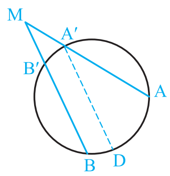


اثبات:

M نقطهٔ تقاطع امتداد دو وتر AA' و BB' بیرون از دایره : فرض

$A\hat{M}B=\frac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{A'B'}}{۲}$: حکم

درسنامه ۲



از نقطهٔ A' خطی موازی با وتر BB' رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه‌ای مانند D قطع کند.

$$A'D \parallel BB' \xrightarrow{\text{مورب } AM} \widehat{AMB} = \widehat{AA'D}$$

زاویهٔ $AA'D$ محاطی است. بنابراین:

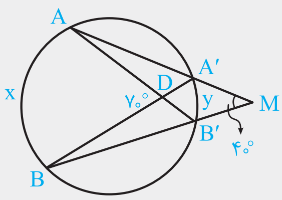
$$\widehat{AA'D} = \frac{\overset{\frown}{AD}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{BD}}{۲}$$

اما در یکی از تمرینات همین درسنامه نشان می‌دهیم کمان‌های محصور بین دو وتر موازی برابرند. پس: $A'D \parallel B'B \Rightarrow \overset{\frown}{A'B'} = \overset{\frown}{BD}$، در نتیجه:

$$\overset{\frown}{A'B'} = \overset{\frown}{BD} = \widehat{AA'D} = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{A'B'}}{۲} \Rightarrow \widehat{AMB} = \frac{\overset{\frown}{AB} - \overset{\frown}{A'B'}}{۲}$$

مثال

مقادیر x و y را در شکل روبه‌رو تعیین کنید. (مشابه نهایی- دی ۹۲)

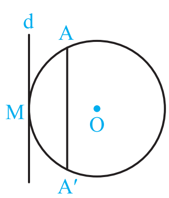


پاسخ:

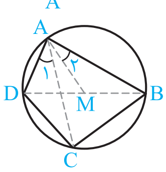
$$\widehat{ADB} = \frac{x+y}{۲} \Rightarrow ۷۰^\circ = \frac{x+y}{۲} \Rightarrow x+y = ۱۴۰^\circ \ , \ \widehat{M} = \frac{x-y}{۲} \Rightarrow ۴۰^\circ = \frac{x-y}{۲} \Rightarrow x-y = ۸۰^\circ$$

$$\begin{cases} x+y = ۱۴۰^\circ \\ x-y = ۸۰^\circ \end{cases} \Rightarrow x = ۱۱۰^\circ \ , \ y = ۳۰^\circ$$

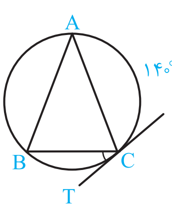
۱۳. با استفاده از تعریف زاویهٔ محاطی، نشان دهید، مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰° است. (نهایی- دی ۹۵)



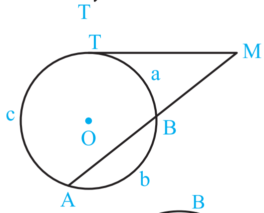
۱۴. خط d در نقطهٔ M بر دایرهٔ $C(O,R)$ مماس است. وتر AA' از دایره را موازی با d رسم می‌کنیم. ثابت کنید $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{A'M}$ (نهایی- شهریور ۹۳)



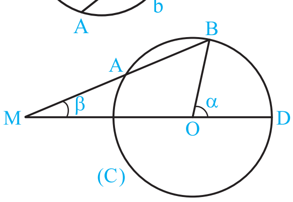
۱۵. در شکل مقابل $\hat{A}_۱ = \hat{A}_۲$. ثابت کنید $AD.BC = AC.DM$



۱۶. در شکل روبه‌رو، $AB = AC$، CT مماس بر دایره در نقطهٔ C و $\overset{\frown}{AC} = ۱۴۰^\circ$ است. اندازهٔ زاویهٔ BCT را بیابید. (نهایی- خرداد ۹۶)

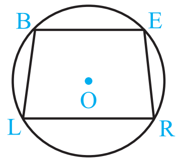


۱۷. خط مماس بر دایره در نقطهٔ T و امتداد وتر AB، در نقطهٔ M متقاطع‌اند. با فرض $\overset{\frown}{TB} = a$، $\overset{\frown}{BA} = b$، $\overset{\frown}{AT} = c$ و $\frac{a}{۱} = \frac{b}{۴} = \frac{c}{۵}$ اندازهٔ زاویهٔ M را تعیین کنید. (نهایی- خرداد ۹۴)

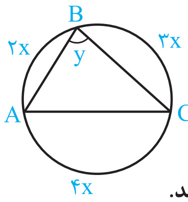


۱۸. دایرهٔ $C(O,R)$ مفروض است. در شکل مقابل اگر داشته باشیم $MA = R$، نشان دهید $\alpha = ۳\beta$

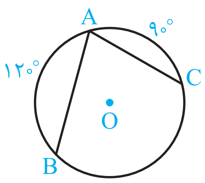
۱۹. در دایرهٔ به مرکز O، $BL=ER$، نشان دهید $BE \parallel LR$ (مشابه نهایی- خرداد ۸۸ و شهریور ۹۲)



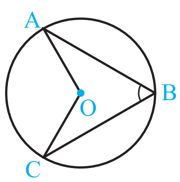
۲۰. در شکل مقابل اندازهٔ x و y را به‌دست آورید. (نهایی- دی ۹۳)



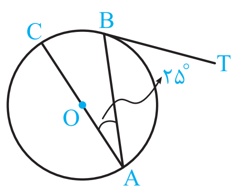
۲۱. زاویهٔ محاطی BAC در دایره‌ای به مرکز O داده شده است. اگر $\overset{\frown}{AB}=120^\circ$ و $\overset{\frown}{AC}=90^\circ$، اندازهٔ زاویهٔ BAC را بیابید.



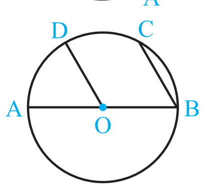
۲۲. در دایرهٔ به مرکز O، اگر $A\hat{O}C=(3\alpha+12)^\circ$ و $A\hat{B}C=(\alpha+16)^\circ$ باشد، مقدار α و اندازهٔ زاویه‌های مرکزی AOC و محاطی ABC را تعیین کنید. (نهایی- خرداد ۹۵)



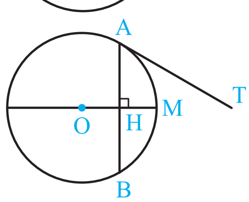
۲۳. در شکل مقابل، اندازهٔ زاویهٔ ظلی ABT را به‌دست آورید (AC قطر دایره است). (نهایی- خرداد ۸۲)



۲۴. در دایرهٔ به مرکز O و قطر AB، داریم $OD \parallel BC$. ثابت کنید $\overset{\frown}{CD}=\overset{\frown}{AD}$

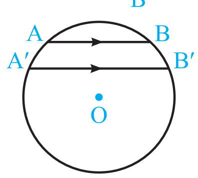


۲۵. زاویهٔ ظلی TAB در دایرهٔ $C(O,R)$ داده شده است. با استفاده از «ویژگی قطر عمود بر وتر» ثابت کنید $T\hat{A}B=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$

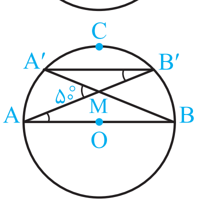


۲۶. آ) در شکل روبه‌رو وترهای AB و $A'B'$ موازی‌اند. نشان دهید کمان‌های $\overset{\frown}{AA'}$ و $\overset{\frown}{BB'}$ برابر هستند.

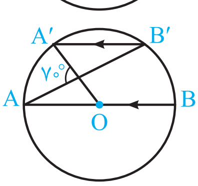
ب) عکس قسمت «آ» را بنویسید و در صورت درستی ثابت کنید.

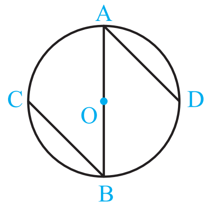


۲۷. در شکل مقابل O مرکز دایره است و $A'B' \parallel AB$. اندازهٔ کمان $A'CB'$ را به‌دست آورید.

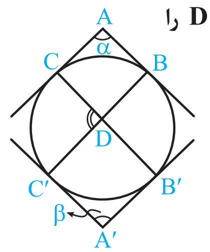


۲۸. در شکل روبه‌رو O مرکز دایره است. اگر $A'B' \parallel AB$ باشد، اندازهٔ کمان‌های $A'B'$ و AA' را بیابید.

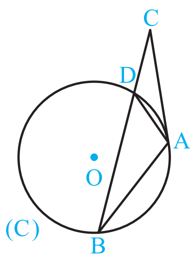




۲۹. در شکل روبه‌رو AB قطری از دایره است و $AD \parallel BC$. ثابت کنید $AD = BC$

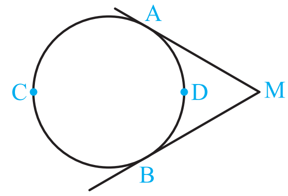


۳۰. در شکل روبه‌رو اضلاع زاویه‌های A و A' بـر دایـره مماس‌انـد. انـدازهٔ زاویـهٔ مشـخص‌شـدهٔ D را بر حسب α و β به‌دست آورید.

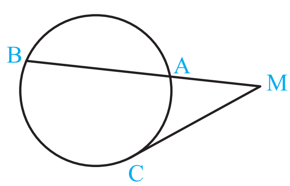


۳۱. در دایرهٔ $C(O,R)$ مماس AC و وتر AB با یکدیگر مساوی‌اند. خط BC دایره را در نقطهٔ D قطـع کرده است. ثابت کنید مثلث ADC ، متساوی‌الساقین است. (نهایی- خرداد ۹۱)

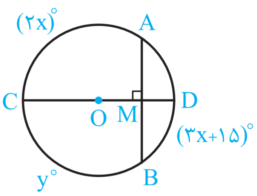
۳۲. در شکل‌های زیر ثابت کنید:



آ) $\widehat{M} = \dfrac{\overset{\frown}{ACB} - \overset{\frown}{ADB}}{۲}$



ب) $\widehat{M} = \dfrac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{AC}}{۲}$

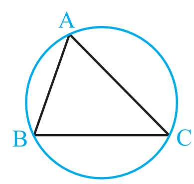


۳۳. در شکل مقابل قطر CD در نقطهٔ M بـر وتـر AB عمـود اسـت. اگـر $\overset{\frown}{AC} = (۲x)^\circ$ و $\overset{\frown}{BC} = y^\circ$ و $\overset{\frown}{BD} = (۳x+۱۵)^\circ$ ، آن‌گاه x و y را محاسبه کنید. (نهایی- شهریور ۹۵)

پاسخ‌های تشریحی

۱۳ مثلث دلخواه ABC را در نظر می‌گیریم.

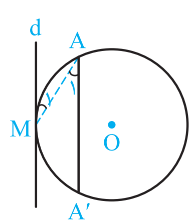
می دانیم از هر سه نقطهٔ دلخواه که روی یک خط قرار نداشته باشند، یک دایره می‌گذرد، پس دایره‌ای را که از رئوس این مثلث می‌گذرد رسم می‌کنیم.



$$\left.\begin{aligned} \text{(محاطی)}\quad \widehat{A} &= \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} \\ \text{(محاطی)}\quad \widehat{B} &= \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} \\ \text{(محاطی)}\quad \widehat{C} &= \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C} = \frac{\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

$$\Rightarrow \widehat{A}+\widehat{B}+\widehat{C} = \frac{۳۶۰^\circ}{۲} = ۱۸۰^\circ$$

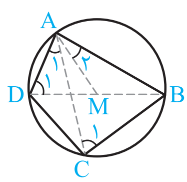
۱۴ از نقطهٔ M به نقطهٔ A وصل می‌کنیم. داریم:



$$d \parallel AA' \xrightarrow{\text{مورب } AM} \widehat{A}_۱ = \widehat{M}_۱$$

$$\Rightarrow \frac{\overset{\frown}{A'M}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AM}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{A'M} = \overset{\frown}{AM}$$

۱۵ با توجه به شکل داریم:



$$\left.\begin{aligned} \text{(زاویهٔ محاطی)}\quad \widehat{C}_۱ = \widehat{D}_۱ &= \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \\ \widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲ \Rightarrow C\widehat{A}B &= D\widehat{A}M \end{aligned}\right\} \xrightarrow{\text{(زز)}} \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{AMD}$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AD} = \frac{BC}{DM} \Rightarrow AD.BC = AC.DM$$

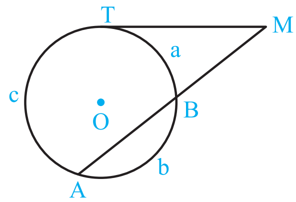
۱۶ برای به‌دست آوردن زاویهٔ BCT ، کـافی اسـت انـدازهٔ کمـان BC را به‌دست آوریم.

$$\text{(طبق فرض)}\ AB=AC \Rightarrow \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC} \xrightarrow{\overset{\frown}{AC}=۱۴۰^\circ} \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{AC}=۱۴۰^\circ$$

$$\Rightarrow \overset{\frown}{BC} = ۳۶۰^\circ - (\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AC}) = ۳۶۰^\circ - ۲۸۰^\circ = ۸۰^\circ$$

$$\text{(ظلی)}\quad B\widehat{C}T = \frac{\overset{\frown}{BC}}{۲} = \frac{۸۰^\circ}{۲} = ۴۰^\circ$$

۱۷ طبق تناسب a، b و c داریم:



$b = ۴a$

$c = ۵a$ (۱)

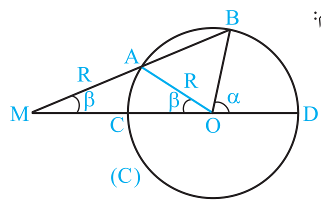
از طرفی: $a+b+c=۳۶۰^\circ \xrightarrow{(۱)} a+۴a+۵a=۳۶۰^\circ$

$\Rightarrow ۱۰a=۳۶۰^\circ \Rightarrow a=۳۶^\circ \Rightarrow c=۱۸۰^\circ$

$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{TA}-\overset{\frown}{TB}}{۲}=\frac{c-a}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ-۳۶^\circ}{۲}=\frac{۱۴۴^\circ}{۲}=۷۲^\circ$

---

۱۸ از نقطهٔ A به O وصل می‌کنیم:



طبق فرض $OA = MA = R$. بنابراین مثلث MAO متساوی‌الساقین است، پس $A\hat{O}M=\hat{M}=\beta$

(مرکزی) $A\hat{O}M=\overset{\frown}{AC}=\beta$ (۱)

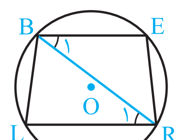
(مرکزی) $B\hat{O}D=\overset{\frown}{BD}=\alpha$ (۲)

از طرفی:

$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{BD}-\overset{\frown}{AC}}{۲} \xrightarrow[\hat{M}=\beta]{\text{طبق روابط (۱) و (۲)}} \beta=\frac{\alpha-\beta}{۲}\Rightarrow \alpha=۳\beta$

---

۱۹ از نقطهٔ R به B وصل می‌کنیم. داریم:



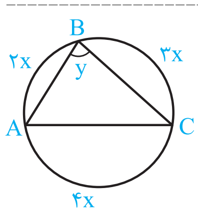
$ER=BL\Rightarrow \overset{\frown}{ER}=\overset{\frown}{BL}$ (۱)

$$\left.\begin{array}{l}\text{(محاطی)}\ \hat{B}_۱=\frac{\overset{\frown}{ER}}{۲}\\ \text{(محاطی)}\ \hat{R}_۱=\frac{\overset{\frown}{BL}}{۲}\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{طبق (۱)}}\hat{B}_۱=\hat{R}_۱$$

$\xrightarrow{\text{با توجه به عکس قضیهٔ خطوط موازی و مورب}} BE \parallel LR$

---

۲۰ (مجموع کمان‌های روی دایره)



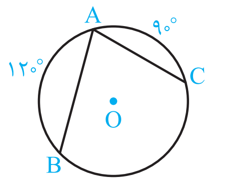
$\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{BC}+\overset{\frown}{AC}=۳۶۰^\circ$

$\Rightarrow ۲x+۳x+۴x=۳۶۰^\circ$

$۹x=۳۶۰^\circ\Rightarrow x=۴۰^\circ$

(محاطی) $y=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}=\frac{۱۶۰^\circ}{۲}=۸۰^\circ$

۲۱



(زاویهٔ محاطی) $B\hat{A}C=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}$

$\overset{\frown}{BC}=۳۶۰-(\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{AC})=۳۶۰^\circ-(۱۲۰^\circ+۹۰^\circ)=۱۵۰^\circ$

بنابراین: $B\hat{A}C=\frac{۱۵۰^\circ}{۲}=۷۵^\circ$

۲۲

$$\left.\begin{array}{l}\text{(زاویهٔ محاطی)}\ A\hat{B}C=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}\Rightarrow ۲A\hat{B}C=\overset{\frown}{AC}\\ \text{(زاویهٔ مرکزی)}\ A\hat{O}C=\overset{\frown}{AC}\end{array}\right\}\Rightarrow ۲A\hat{B}C=A\hat{O}C$$

$\xrightarrow{\text{طبق فرض}} ۲(\alpha+۱۶)=۳\alpha+۱۲\Rightarrow \alpha=۲۰^\circ$

بنابراین: $A\hat{O}C=۷۲^\circ$ ، $A\hat{B}C=۳۶^\circ$

۲۳

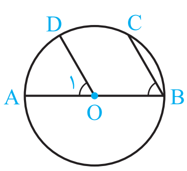
(محاطی) $\hat{A}=\frac{\overset{\frown}{BC}}{۲}\xrightarrow{\hat{A}=۲۵^\circ} \overset{\frown}{BC}=۵۰^\circ$

CA قطر است. $\Rightarrow \overset{\frown}{ABC}=۱۸۰^\circ$

$\Rightarrow \overset{\frown}{AB}=۱۸۰^\circ-\overset{\frown}{BC}=۱۸۰^\circ-۵۰^\circ=۱۳۰^\circ$

(ظلی) $A\hat{B}T=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}=\frac{۱۳۰^\circ}{۲}=۶۵^\circ$

۲۴



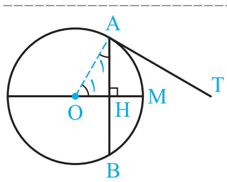
$$\left.\begin{array}{l}OD \parallel BC \xrightarrow{\text{مورب } AB} \hat{O}_۱=\hat{B}\\ \text{(زاویهٔ مرکزی)}\ \hat{O}_۱=\overset{\frown}{AD}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{B}=\overset{\frown}{AD}\quad \text{(۱) پ}$$

از طرفی $\hat{B}$ زاویهٔ محاطی است یعنی:

$B=\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{CD}}{۲}\xrightarrow{\text{طبق (۱)}} \overset{\frown}{AD}=\frac{\overset{\frown}{AD}+\overset{\frown}{CD}}{۲}\Rightarrow \overset{\frown}{AD}=\overset{\frown}{CD}$

---

۲۵ از نقطهٔ O به A وصل می‌کنیم.



$$\left.\begin{array}{l}\text{(مرکزی)}\ \hat{O}_۱=\overset{\frown}{AM}\\ \text{(قطر عمود بر وتر)}\ \overset{\frown}{AM}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}\end{array}\right\}\Rightarrow \hat{O}_۱=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}\quad (۱)$$