برگی از درخت المپیاد ریاضی

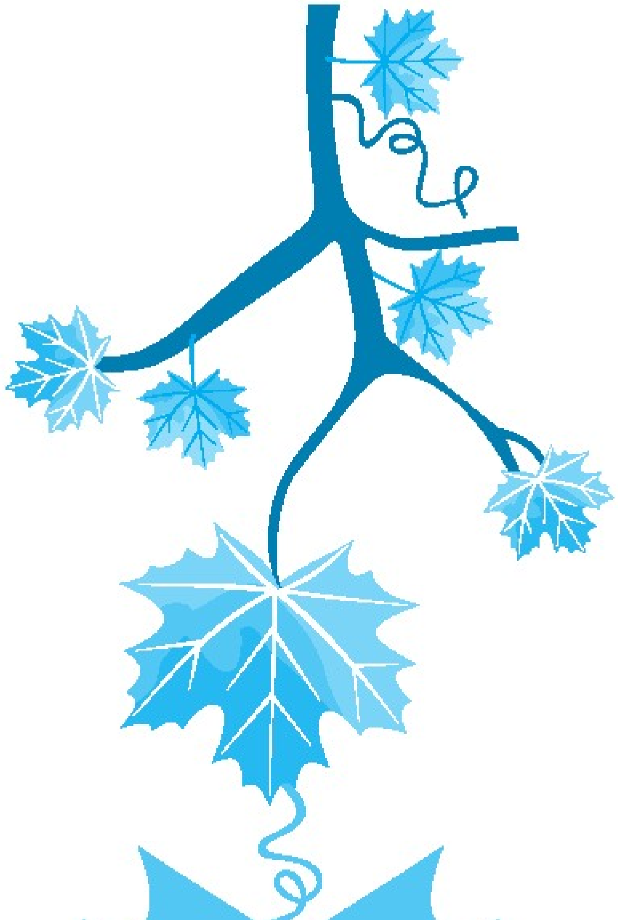
چندجمله‌ای از چندجمله‌ای‌ها

مؤلفین

امیرحسین گرزی

سینا رضایی زارعی

انتشارات خوشخوان



درخت المپیاد درختی است که توسط
انتشارات خوشخوان کاشته شده وهریک
از کتاب های این پروژه برگی ازآن است.
وظیفه ما نگهداری وآبیاری این درخت است.امیدواریم
باعنایات حضرت حق این درخت، تنومند شده
وبه بارواقعی بنشیند.فراموش نکنید که بار ومیوه ی
این درخت شما
عزیزان می باشید.

التماس دعا

پروژه‌ی درخت المپیاد

اعتقاد بر این است که شروع فعالیت‌های المپیاد به صورت حرفه‌ای، باید از ابتدای دوره‌ی دبیرستان شروع شود. اکثر المپیادهای علمی در زمستان سال سوم دبیرستان تعیین تکلیف می‌شوند. بنابراین از شروع دبیرستان تا اواسط سال سوم حدوداً ۸ ترم تحصیلی می‌شود (با احتساب فصل و ترم تابستان) که لازم است برنامه‌ریزی دقیقی برای این چند ترم انجام شود.

انتشارات خوشخوان این برنامه‌ریزی را در قالب پروژه‌ی درخت المپیاد انجام داده است که هر شاخه از درخت، مبحثی از آن المپیاد و هر برگ از آن شاخه شماره‌ای از آن مبحث می‌باشد.

به عنوان مثال اپتیک (۱) کتابی است که در یک ترم تحصیلی در یک کلاس ممتاز می‌توان برای داوطلبان المپیاد فیزیک تدریس کرد.

با عنایات حضرت حق و با کمک تنی چند از همکاران گرامی کتب مربوط به این درخت در هر رشته‌ای از المپیاد معرفی خواهد شد.

منتظر پیشنهادات و نظرات شما سروران هستیم.

گروه المپیاد

انتشارات خوشخوان

پیشگفتار ناشر

مسابقه ها، کنکورها و المپیادهای علمی همایش هایی هستند که کم وبیش در سرتاسر دنیای پهناور به صورت داخلی وبین المللی برگزارمی شوند وسال به سال به تنوع، جذبه وعظمت آن ها افزوده می شود. یکی ازاین همایش های باشکوه که هرسال درچندین رشته درسطح دانش آموزان سنوات آخر دوره متوسطه برگزارمی شود المپیادهای علمی می باشد که قدیمی ترین آن المپیاد ریاضی بوده و ازسال ۱۹۵۹ آغاز و تا به حال ادامه داشته است.

در حال حاضر نتیجه ی کسب شده در المپیادهای علمی برای هر کشوری یکی از شاخص های قدرت علمی آن کشور محسوب شده و نفرات ممتاز این المپیادها به راحتی جذب دانشگاه ها وآکادمی های ممتاز جهان شده وپس ازگذشت سنواتی چند به موفقیت های چشم گیری نایل می شوند چنانچه بسیاری از دانشمندان حال حاضر در رشته های مختلف از جمله شیمی، فیزیک، IT و ... در سال های نه چندان دور از مدال آوران این المپیادها بوده اند.

جمهوری اسلامی ایران برای اولین باردر سال ۱۳۶۶ در المپیاد ریاضی جهان که در کشور کوبا برگزار می شد شرکت کرده و باکسب یک مدال برنز به مقام ۲۶ جهان نائل آمد که تعجب همگان را برانگیخت چراکه درآن سال ایران درگیرجنگ تحمیلی بوده و جهانیان به غیر از جنگ و درگیری چیزی از ایران سراغ نداشتند و درخشش دانش آموزان ایران در آن سال و سنوات بعد نگاه ها را به سمت ایران معطوف کرده وچشم خفته آن ها را تا حدود زیادی بیدار کرد. همانطورکه از رسانه های گروهی مطلع شده اید درتمام المپیادهای علمی تیم اعزامی کشورعزیزمان درسنوات گذشته جزء کشورهای برتر بوده وضمن کسب مدال های رنگارنگ رتبه های بسیار درخشانی ازجمله رتبه اول را حائز شده اند.

نحوه گزینش نفرات اعزامی به المپیادهای جهانی تا حدود زیادی مشابه یکدیگرند به این صورت که درابتدا درمسابقه ای سراسری تحت عنوان مرحله اول که معمولاً به صورت پرسش های چند گزینه ای مطرح می شود حدوداً هزارنفر پذیرفته شده و در رقابتی معمولاً تشریحی که مرحله ی دوم نامیده می شود شرکت می کنند. دراین مرحله در هر رشته حدوداً چهل نفر پذیرفته شده و دردوره ی تابستانی درباشگاه دانش پژوهان جوان که متولی برگزاری تمام المپیاد های علمی می باشد شرکت کرده و پس ازگذراندن این دوره مرحله ی سوم آزمون برگزار شده و عده ای (در حدود ده نفر) مدال طلا، عده ای مدال نقره و عده ای دیگر مدال برنز

کسب می کنند(در این مرحله معمولاً همه‌ی افراد شرکت کننده در دوره مدال کسب می کنند) دارندگان مدال طلا حدود یک سال در آن باشگاه آموزش دیده و پس از آن اعضاء تیم اعزامی شناسایی می شوند. دارندگان مدال طلا همگی بدون کنکور و در رشته و دانشگاه دلخواه خود پذیرفته شده و ادامه ی تحصیل می دهند اما دارندگان مدال های نقره و برنز همانند سایر داوطلبان در کنکور سراسری شرکت کرده و برای کسب رتبه دلخواه جهت پذیرفته شدن در رشته ودانشگاه مورد علاقه خود در قابت می کنند با این تفاوت که این افراد سهمیه‌ی ویژه ای در پذیرفته شدن در رشته ودانشگاه مورد علاقه ی خود دارند که جزئیات آن در سایت باشگاه دانش پژوهان جوان تشریح شده است.

متاسفانه در سال های اخیر در بعضی از مدارس افرادی مثلاً لباس کارشناسی به تن کرده و علیه فعالیت های المپیاد جبهه می گیرند و ادعا می کنند فعالیت برای المپیادهای علمی مانع موفقیت در کنکور سراسری بوده و هرچه دانش آموز به سمت المپیاد سوق پیدا کند از کنکور فاصله گرفته و در صورت عدم کسب مدال طلا (که بسیار محتمل است) آینده ی خود را تباه کرده است در حالی که با تحقیقی که در سال های گذشته انجام شده است فعالیت در زمینه المپیادهای علمی نه تنها مانع فعالیت برای کنکور نیست بلکه مسیر فعالیت برای کسب رتبه مناسب در کنکور را بسیار هموارتر می سازد به عنوان مثال می توانید تمام مدال آوران نقره و برنز ویا حتی آن هایی که در مرحله اول پذیرفته شده ولی به دوره تابستانی راه پیدا نکرده اند را دریک رشته شناسایی کرده و موفقیت های تحصیلی آن ها را در دانشگاه ها جویا شوید که نگارنده ی این متن بارها این تحقیق را انجام داده و به مثبت بودن آن یقین پیدا کرده است.

به هرحال ادعا این است که فعالیت دانش آموز دریک رشته از رشته های المپیاد فواید بسیاری دارد که به تعدادی از آن ها به صورت گذرا اشاره می شود:

۱. همان طور که خداوند به بشر تن سالم داده و انتظار می رود با ورزش ها و نرمش های مناسب از این نعمت خدادادی محافظت شود به هر دانش آموزی نیز استعدادی داده است که باید شکوفا و بهره ور شود. اغلب باشگاه های کشور اعم از خصوصی و دولتی داوطلب زیادی در رشته های متفاوت ورزشی دارند که مشغول فعالیت در یکی از رشته های ورزشی مانند کشتی، تکواندو، بدن سازی و ... می باشند که وقتی از آن افراد راجع به اهدافشان از این فعالیت سوال می شود سالم نگه داشتن بدن را عنوان داشته وانتخاب شدن در تیم ملی را درنهایت عنوان می کنند.چه بسا افرادی که در این رشته ها فعالیت می کنندو هرگز به تیم ملی راه پیدا

نمی کنند که وقتی از این افراد راجع به موفقیت هایشان سؤال می شود هرگز خود را ناموفق معرفی نمی کنند و همین که توانسته اند از بدن سالم خود به روش مناسب محافظت کنند را پیروزی بزرگی می‌دانند بنابرین فعالیت در یکی از زمینه های المپیاد چه در نهایت به کسب مدال منجر شود و یا نشود همین که استعداد خدادادی پرورش می یابد موفقیتی است بس بزرگ.

۲. کتب درسی به اذعان اکثر کارشناس ها و اساتید سال به سال ساده تر شده و برای عموم دانش آموزان دلچسب هستند ولی برای دانش آموزان ممتاز و تیزهوش به هیچ عنوان اغنا کننده نمی باشند لذا لازم است این سری از دانش آموزان فعالیت ویژه ای را در رشته‌ی مورد علاقه‌ی خود داشته باشند تا احساس کنند این فعالیت ها برای آن ها اغنا کننده است.

۳. فعالیت های المپیادی که در نهایت به حل سؤالات پیچیده و عمیق در رشته ی مربوطه می شود باعث می شود تا فرد به تمام مسائل جامعه و پیش آمده در زندگی به دید یک مسأله ی المپیاد نگاه کرده و در حل آن نسبت به سایر رقبا موفق تر باشند. تحقیقات نشان می دهد افرادی که با علاقه و اشتیاق حداقل یکی از شاخه های المپیاد را دنبال می کنند (نه به نیت کسب مدال بلکه به نیت پرورش ذهن) نسبت به سایر افراد در زندگی موفق ترند.

٤. زیربنای اکثر دروس پیش دانشگاهی در دروس المپیاد بنا نهاده می شود بنابرین افرادی که به سبک المپیادی دروس خود را مطالعه می کنند در دوره پیش دانشگاهی با پایه ی بسیار قوی تری با دروس مواجه می شوند و نسبت به رقبای خود راحت تر از عهده آن ها برمی آیند.

۵. با توجه به مصوبه های موجود، کسب مدال در یکی از المپیاد های علمی (حتی مدال برنز) باعث اعطای امتیازهای ویژه ای برای داوطلبان کنکور در ورود به دانشگاه های سراسری می شود که جزئیات آن در سایت های معتبر مخصوصاً سایت باشگاه دانش پژوهان جوان موجود است.

٦. همچنین با توجه به مصوبه های موجود اکثر داوطلبان المپیادها به عضویت نهادهای مختلف از جمله بنیاد ملی نخبگان درمی آیند که با رجوع به سایت های مرتبط با این نهادها و بنیادها امتیازات تعلق یافته به اعضاء را مشاهده خواهید کرد.

انتشارات خوشخوان مفتخر است از بدو تأسیس به فکر تدوین و تألیف منابعی مناسب برای دانش آموزان ممتاز و داوطلبان المپیاد بوده است که خوشبختانه با یاری خداوند متعال و با بهره گیری از اساتید مجربی که خود در سنوات نه چندان دور مدال آور یکی از المپیادهای علمی بوده اند، کتب متعددی به بازار عرضه شده است که مورد توجه داوطلبان قرار گرفته است. بعد از کسب تجربیات لازم به این نتیجه رسیده ایم که لازم است کتبی به صورت کار تدوین و تألیف شود که در آن هر کتاب مخصوص یک ترم تحصیلی باشد. این پروژه به نام درخت المپیاد نام گرفته است و هر کتاب از این پروژه که در اختیار دارید برگی از آن درخت خواهد بود.

بدیهی است انجام چنین پروژه ی عظیمی نظر و همت دسته جمعی می طلبد لذا لازم است از تمام دوستان و همکارانی که ما را در انجام این پروژه یاری نموده اند، تشکر و قدردانی می نمایم و در نهایت نیز از عوامل زحمت کش انتشارات اعم از مشاورین، حروف چین ها، طراحان و کارمندان و کارگران عزیز کمال امتنان را دارم.

با تشکر

رسول حاجی زاده مدیر انتشارات خوشخوان

مقدمه مولفین

منّت خدای را عز و جل که طاعتش موجب قربتست و به شکر اندرش مزید نعمت هر نفسی که فرو می‌رود ممدّ حیاتست و چون بر می‌آید مفرّح ذات. پس در هر نفسی دو نعمت موجودست و بر هر نعمت شکری واجب

از دست و زبان که برآید کز عهده‌ی شکرش به در آید

(گلستان سعدی)

بعد از چند سال تدریس المپیاد، به پیشنهاد چند تن از دوستان تصمیم به نوشتن کتابی در زمینه چندجمله‌ای‌ها گرفتیم. در این کتاب سعی شده است تا همه‌ی آن‌چه برای چندجمله‌ای‌ها در المپیاد ریاضی مورد نیاز است، پوشانده شود. مطالب این کتاب برای آمادگی در مبحث چندجمله‌ای‌ها برای المپیاد ریاضی تا مرحله‌ی دوم و کمی فراتر از آن کافی است.

آنچه در این کتاب می بینید:

در کتاب حاضر، ۵ مبحث در چندجمله‌ای‌ها بررسی شده است.

هر فصل دارای سه بخش کلی است که در بخش اول هر فصل به آموزش مبحث مربوطه پرداخته‌ایم و مثال‌های گوناگون با آن را حل و بررسی کرده‌ایم. در بخش بعدی سعی شده است با حل مسئله‌هایی که در مسابقات مختلف مطرح شده‌اند، خواننده مهارت لازم برای حل مسائل را کسب کند. در پایان هر فصل نیز مسائل بیش‌تری برای تمرین و تسلط از کشورهای مختلف آورده شده است.

در فصل نخست کتاب، مطالبی در مورد آشنایی کلی با چندجمله‌ای‌ها و اعداد مختلط بیان شده است و با حل تمرین‌هایی از مباحث مختلف المپیاد سعی شده است تا کاربرد اعداد مختلط تا حد امکان آموزش داده شود.

فصل دوم به مبحث مهم ریشه‌ی یک عبارت جبری اختصاص دارد. در این فصل به قضایای مهمی از قبیل «قضیه‌ی اساسی جبر»، «قضیه‌ی ویت» و قضایایی در مورد مکان هندسی ریشه‌ها در صفحه‌ی اعداد مختلط پرداخته شده است.

در فصل سوم، قضیه‌ی مقدار میانی را مورد بررسی قرار داده‌ایم و به حل مسائلی پرداخته‌ایم که نشان می‌دهد این قضیه در عین سادگی، قدرت زیادی در حل مسائل دارد.

فصل چهارم، بیشتر به ساختار چندجمله‌ای‌ها اختصاص دارد که اساسی‌ترین قسمت آن، قضیه‌ی جذاب«درون‌یابی لاگرانژ» است که رابطه‌ی بین مقادیر و ضرایب یک چندجمله‌ای را بیان می‌کند.

در ادامه به حل مسائل تکمیلی مرتبط با فصل‌های قبلی که در المپیادهای مختلف بیان شده‌اند پرداخته‌ایم تا خواننده تسلط بیشتری پیدا کند.

فصل انتهایی کتاب نیز به بررسی موضوع تحویل ناپذیری چندجمله‌ای‌ها اختصاص دارد که برای

مرحله دوم المپیاد ریاضی ایران ، چندان ضروری نیست اما مطالعه‌ی آن برای مراحل بعدی و همین‌طور اشراف بیشتر توصیه می‌شود.

کتاب با مسائل متفرقه از مسابقات منطقه‌ای و جهانی ریاضی به پایان می رسد.

توصیه‌ای که به دانش آموزان برای آموزش المپیاد داریم، این است که با صبر و حوصله در آموزش ریاضیات تلاش کنند. همین‌طور بهتر است که بر روی حل تمرین‌های المپیاد وقت گذاشته و نا امید نشوند.

خوش است زیر مغیلان به راه بادیه خفت، شب رحیل، ولی ترک جان بباید گفت (گلستان سعدی)

در انتها لازم می‌دانیم از دوستان و همکاران عزیزمان، آقایان احسان توحیدی، حسین ذاکری‌نیا، مجید دینی‌پور، عرفان شریفی، حشمت قادرپناه و همین‌طور از آقای سعدی بابت اشعار زیبایشان که در نوشتن این اثر، ما را یاری کرده‌اند، تشکر کنیم. به طور خاص از دوست عزیزمان، آقای حسام‌الدین رجب‌زاده که ویراستاری این اثر را تقبل کردند و نظرات سازنده‌ی خود را به ما گوشزد نمودند، همین‌طور از کارکنان محترم انتشارات خوشخوان، شخص آقای اکبری، مسئول پروژه برگ و آقای حاجی‌زاده رئیس انتشارات خوشخوان که با تلاش خود این کتاب را برای دانش‌آموزان آماده نمودند، قدردانی می‌نمایم.

در پایان از همه‌ی اساتید و دانش‌آموزان عزیز خواهشمندیم هرگونه پیشنهاد، انتقاد و نظرات خوددر مورد این کتاب را از طریق پست الکترونیکی amirhosseingorzi@gmail.com و sina.rezaie71@yahoo.com با ما در میان بگذارند.

و من الله توفیق

امیرحسین گرزی

سینا رضائی زارعی

فهرست مطالب

۱

چندجمله‌ای‌ها (آشنایی)

یکی از مباحث مورد توجه و جذاب در المپیاد ریاضی که در سال‌های اخیر سهم به سزایی از سؤالات مراحل مختلف را به خود اختصاص داده است مبحث جبر است. غالباً در این درس ۳ مبحث مهم تدریس می‌شود که عبارتند از:

۱. چندجمله‌ای‌ها

۲. نابرابری‌ها

۳. معادلات تابعی

ما در این کتاب برآنیم تا به مبحث اول یعنی چندجمله‌ای‌ها بپردازیم و مباحث لازم و مفید برای آشنایی با چندجمله‌ای‌ها و توانایی حل مسئله به کمک آن‌ها را بیان کنیم.

۱-۱ آشنایی با چندجمله‌ای‌ها

منظور از یک چندجمله‌ای عبارتی جبری به شکل:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

می‌باشد که در آن به اعداد $a_n, \ldots, a_1, a_0$ ضرایب این چندجمله‌ای می‌گوییم. هم‌چنین به بزرگ‌ترین توانی که ضریب متناظر آن غیرصفر باشد درجه ی چندجمله‌ای گوییم و با $\deg$ نمایش می‌دهیم.

به ضریب متناظر با بزرگ‌ترین درجه «ضریب پیش‌رو» چندجمله‌ای گفته می‌شود. اگر چندجمله‌ای دارای ضریب پیش‌رو واحد باشد به آن چندجمله‌ای «تکین» می‌گوییم.

معمولاً چندجمله‌ای‌ها را با حروف بزرگ لاتین به شکل زیر نمایش می‌دهند:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_0$$

هم‌چنین چندجمله‌ای‌ها را بسته به این که ضرایب‌شان عضو چه مجموعه‌ای باشد دسته‌بندی می‌کنند. بدین شکل که اگر K مجموعه‌ای دلخواه باشد منظور از $K[x]$ مجموعه‌ی همه‌ی چندجمله‌ای‌ها با ضرایب عضو K می‌باشد و با این نمادگذاری منظور از $\mathbb{Z}[x]$، $\mathbb{Q}[x]$، $\mathbb{R}[x]$ و $\mathbb{C}[x]$ به ترتیب چندجمله‌ای‌های با ضرایب صحیح، گویا، حقیقی و مختلط[1] می‌باشد.

برای مثال اگر $P(x) = 3x^2 + x - 1$ باشد می‌دانیم $P(x)$ با ضرایب صحیح و دارای ضریب پیش‌رو ۳ و درجه‌ی ۲ است. پس $\deg(P) = 2$، $P(x) \in \mathbb{Z}[x]$ می‌باشد.

۲-۱ اعمال اصلی روی چندجمله‌ای‌ها

از ۴ عمل اصلی در حساب می‌توان سه عمل +، − و × را برای چندجمله‌ای‌ها تعریف کرد:

تعریف جمع و تفریق: اگر $p(x)$ و $q(x)$ دو چندجمله‌ای باشند و

$$\begin{aligned} p(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \\ q(x) &= b_k x^k + b_{k-1} x^{k-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \end{aligned} \qquad (n \geq k)$$

حاصل $p(x) \mp q(x)$ به صورت زیر است:

$$p(x)+q(x) = a_n x^n + \cdots + a_{k+1} x^{k+1} + (a_k + b_k) x^k + (a_{k-1} + b_{k-1}) x^{k-1} + \cdots + (a_0 + b_0)$$

در واقع در عمل جمع ضرایب متناظر توان‌های یکسان را با هم جمع می‌کنیم هم‌چنین:

$$p(x) - q(x) = a_n x^n + \cdots + a_{k+1} x^{k+1} + (a_k - b_k) x^k + \cdots + (a_0 - b_0)$$

تعریف ضرب: مشابه قبل برای تعریف ضرب دو چندجمله‌ای $p(x)$ و $q(x)$ داریم:

$$\begin{aligned} p(x).q(x) &= (a_n x^n + \cdots + a_0)(b_k x^k + \cdots + b_0) \\ &= a_n b_k x^{n+k} + \cdots + (a_1 b_0 + b_1 a_0) x + a_0 b_0 \end{aligned}$$

در واقع ضریب x^i در حاصل‌ضرب $p(x).q(x)$ برابر است با:

$$b_0 a_i + b_1 a_{i-1} + \cdots + b_{i-1} a_1 + b_i a_0$$

۱) در فصول بعد کتاب توضیحاتی در مورد این اعداد داده می‌شود.

توجه کنید اگر j از درجه‌ی p یا q بزرگ‌تر بود، a_j یا b_j را برابر صفر می‌گیریم.

- به راحتی به‌دست می‌آید که برای هر دو چندجمله‌ای $p(x)$ و $q(x)$ داریم:

$$\deg(p(x) \pm q(x)) \leq \max\{ \deg(p(x)), \deg(q(x))\}$$
$$\deg(p(x).q(x)) = \deg(p(x)) + \deg(q(x))$$

مثال ۱-۱ فرض کنید $p(x) = ۳x^۲ - x + ۱$ و $q(x) = x + ۳$ حاصل $p(x).q(x)$ و $p(x) - q(x)$ را به‌دست آورید.

حل: داریم:

$$p(x) - q(x) = (۳x^۲ - x + ۱) - (x + ۳)$$
$$= ۳x^۲ - x + ۱ - x - ۳ = ۳x^۲ - ۲x - ۲$$
$$p(x).q(x) = (۳x^۲ - x + ۱)(x + ۳) = ۳ - ۲x + ۸x^۲ + ۳x^۳$$

چهارمین عمل اصلی یعنی ÷ همواره روی چندجمله‌ای‌ها قابل بیان نیست و تنها در برخی موارد می‌توان دوچندجمله‌ای را بر هم تقسیم کرد که در فصل بعدی بیان خواهیم کرد.

ریشه

یکی از مهم‌ترین موضوعات در بررسی چندجمله‌ای‌ها، ریشه‌ها هستند.

تعریف

اگر $P(x)$ یک چندجمله‌ای دلخواه باشد، آن‌گاه عدد a را ریشه‌ی چندجمله‌ای $P(x)$ گوییم هرگاه $P(a) = ۰$ برقرار باشد.

در تعریف بالا منظور از $p(a)$ یعنی مقدار عبارت $p(x)$ به ازای $x = a$.

مثال ۱-۲ اگر $p(x) = x - ۱$ در این صورت ۱ ریشه $p(x)$ است. چراکه $p(۱) = ۱ - ۱ = ۰$.

به عنوان مثالی دیگر اگر $p(x) = x^۲ - x - ۲$ آن‌گاه $p(۲) = ۰$، پس ۲ ریشه‌ی $p(x)$ خواهد بود.

در بررسی چندجمله‌ای‌ها ممکن است با این سؤال مواجه شویم:
«آیا هر چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی حتماً دارای ریشه‌ای در اعداد حقیقی است؟»

اگر اندکی روی این سؤال فکر کنیم در می‌یابیم که جواب آن خیر است چرا که کافی است چندجمله‌ای $p(x) = x^{2} + 1$ را در نظر بگیرید. برای هر عدد حقیقی x داریم $p(x) > 0$ و این یعنی $p(x)$ در اعداد حقیقی ریشه ندارد.

آن‌چه که دانشمندان ریاضی پس از مواجه با این سؤال انجام دادند ساختن اعدادی جدید از روی اعداد حقیقی بود که به کمک این اعداد که آن‌ها را اعداد مختلط نامیدند توانستند ثابت کنند که:
هر چندجمله‌ای $p(x)$ با ضرایب مختلط و از درجه‌ی بزرگ‌تر از 0 دارای حداقل یک ریشه‌ی مختلط است.

حال به معرفی اعداد مختلط می‌پردازیم.

۱-۳ اعداد مختلط

همان‌طور که گفتیم یکی از دلایل به وجود آمدن اعداد مختلط معادله $x^{2} + 1 = 0$ بود که برای آن ریشه‌ای در اعداد حقیقی نداشتیم. در حقیقت به کمک ریشه‌ای فرضی برای این معادله ما اعداد مختلط را تعریف می‌کنیم:

- i را عددی فرضی در نظر بگیرید به طوری که $i^{2} = -1$. به وضوح $i \notin \mathbb{R}$، $i^{2} + 1 = 0$ خواهد بود.

تعریف

منظور از مجموعه‌ی اعداد مختلط که آن را به اختصار با $\mathbb{C}$ نمایش می‌دهیم، مجموعه‌ی زیر است:

$$\mathbb{C} = \{a + bi \,|\, a, b \in \mathbb{R}\}$$

تعریف

برای یک عدد مختلط $z = a + bi$ به اعداد a و b به ترتیب قسمت حقیقی و قسمت موهومی z می‌گوییم و با $\mathrm{Re}(z)$ [1] و $\mathrm{Im}(z)$ [2] نمایش می‌دهیم، دقت کنید قسمت حقیقی و موهومی یک عدد مختلط، حقیقی هستند.

1) Real
2) Imaginary

دو عدد مختلط $z_۱$ و $z_۲$ را یکسان (مساوی) گوییم اگر و تنها اگر

$$\mathrm{Re}(z_۱) = \mathrm{Re}(z_۲) \qquad , \qquad \mathrm{Im}(z_۱) = \mathrm{Im}(z_۲)$$

نکته ۱. طبق تعریف اگر a عددی حقیقی باشد می‌توان نوشت $a = a + ۰ \times i$ که در نتیجه هر عدد حقیقی خود عددی مختلط است و در نتیجه $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$.

تعریف ۴ عمل اصلی

اگر $z = a + bi$ و $z' = a' + b'i$ اعدادی مختلط باشند:

۱. حاصل $z + z'$ برابر $(a + a') + (b + b')i$ است.

۲. حاصل $z - z'$ برابر $(a - a') + (b - b')i$ است.

۳. حاصل $z \times z'$ برابر است با:

$$z.z' = (a + bi) \times (a' + b'i) = (aa' - bb') + (ab' + ba')i$$

٤. حاصل $\frac{z}{z'}$ $(z' \neq ۰)$ برابر است با:

(الف) ابتدا حالتی را در نظر بگیرید که $b' = ۰$ در این صورت $z' \in \mathbb{R}$ است پس تعریف کنید:

$$\frac{z}{z'} = \frac{a + bi}{a'} = (\frac{a}{a'}) + (\frac{b}{b'})i$$

(ب) در غیر این صورت اگر $b' \neq ۰$ داریم:

$$\frac{z}{z'} = \frac{a + bi}{a' + b'i} = \frac{(a + bi)(a' - b'i)}{(a' + b'i)(a' - b'i)} = \frac{(aa' + bb') + (a'b - ab')i}{a'^۲ + b'^۲}$$

$$= \left(\frac{aa' + bb'}{a'^۲ + b'^۲}\right) + \left(\frac{a'b - b'a}{a'^۲ + b'^۲}\right) i$$

مثال ۱-۳ فرض کنید $z_۱ = ۱ + ۲i$ و $z_۲ = ۳ + i$ حاصل $\frac{z_۱}{z_۲}$ و $z_۱ - z_۲$ را محاسبه کنید.

حل: داریم:

$$z_۱ - z_۲ = (۱ + ۲i) - (۳ + i) = -۲ + i$$

هم‌چنین داریم:

$$\frac{z_۱}{z_۲} = \frac{۱ + ۲i}{۳ + i} = \frac{(۱ + ۲i)(۳ - i)}{(۳ + i)(۳ - i)} = \frac{۵ + ۵i}{۱۰} = (\frac{۵}{۱۰}) + (\frac{۵}{۱۰})i$$

بنابراین تا به حال توانسته‌ایم ۴ عمل اصلی را روی اعداد مختلط تعریف کنیم با کمی توجه می‌توان دید که این ۴ عمل روی اعداد حقیقی مشابه قبل عمل کرده و حاصل یکسانی دارند.

تعریف

اگر $z = a + bi$ عددی مختلط باشد (a و b اعدادی حقیقی هستند). آنگاه به عدد مختلط $a - bi$ «مزدوج» عدد z گوییم و آن را با $\overline{z}$ نمایش می‌دهیم.

تعریف

اگر z عددی مختلط باشد $(z = a + bi)$ در این صورت به عدد $\sqrt{a^2 + b^2}$ «نُرم» عدد z گوییم و با نماد $|z|$ نمایش می‌دهیم.

نکته ۲. می‌توان به راحتی اثبات کرد که برای هر عدد مختلط z داریم:

$$|z|^2 = z.\overline{z}$$

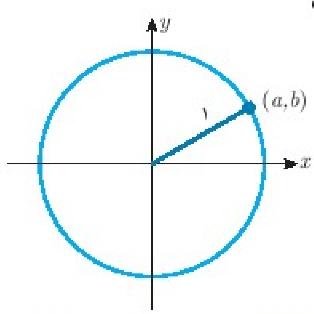
اثبات:

$$\begin{aligned} z.\overline{z} &= (a+bi)(a-bi) = a^2 - (-b^2) + (-ab+ab)i \\ &= (a^2+b^2) = |z|^2 \end{aligned}$$

مثال ۱-٤ همه‌ی اعداد مختلطی را بیابید که نرم آن‌ها برابر ۱ باشد.

حل: عدد مورد نظر را z بنامید. پس $|z| = 1$ اگر $z = a + bi$ در این صورت:

$$a^2 + b^2 = |z|^2 = 1$$



می‌دانیم اگر a را روی محور طول‌ها در صفحه‌ی مختصات و b را روی محور عرض‌ها نمایش دهیم معادله‌ی بالا شکل یک دایره به شعاع یک و به مرکز مبدأ مختصات خواهد بود:

مثال ۱-۵ برای هر عدد مختلط z نشان دهید: $|z| = |\overline{z}|$

حل: بر عهده‌ی خواننده

مثال ۱-۶ حاصل عبارت $A = i^{105} + i^{99} - i^{7} + i + 1$ را بیابید.

حل: به راحتی می‌توان به‌دست آورد $i^2 = -1$، $i^3 = -i$، $i^4 = 1$. پس داریم:

$$i^{105} = i \ , \ i^{99} = -i \ , \ i^{7} = -i$$

پس به‌دست می‌آید:

$$A = i + (-i) - (-i) + i + 1 = 2i + 1$$

مثال ۱-۷ فرض کنید معادله‌ی $x^2 + 2x + 5 = 0$ جواب‌هایی به شکل $z = a + bi$ دارد. آن‌ها را بیابید.

حل: اگر z جواب معادله‌ی مذکور باشد داریم:

$$z^2 + 2z + 5 = 0 \ \Rightarrow \ (a^2 - b^2) + 2abi + 2(a + bi) + 5 = 0$$
$$\Rightarrow (a^2 - b^2 + 2a + 5) + (2ab + 2b)i = 0$$
$$\Rightarrow \begin{cases} 2ab + 2b = 0 \\ a^2 - b^2 + 2a + 5 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \begin{cases} b(a+1) = 0 & (1) \\ b^2 = a^2 + 2a + 5 & (2) \end{cases}$$

معادله‌ی (۱) دو حالت دارد اگر $b = 0$ آن‌گاه $a^2 + 2a + 5 = 0$ می‌شود اما معادله در اعداد حقیقی جواب ندارد چرا که:

$$a^2 + 2a + 5 = (a+2)^2 + 1 > 0$$

حالت دیگر $a + 1 = 0$ یا $a = -1$ که از آن به‌دست می‌آید $b^2 = 4$ پس $b = \pm 2$ بنابراین ریشه‌ها عبارتند از $-1 + 2i$ و $-1 - 2i$.

مثال ۱-۸ معادله‌ی $x^2 + (2+i)x + 3 + 2i = 0$ دو جواب به شکل $a + bi$ دارد. آن‌ها را بیابید.

حل: به عهده‌ی خواننده.

قضیه

اگر A و B اعداد مختلط دلخواهی باشند، روابط زیر برقرار است:

۱. $(\overline{A+B}) = \overline{A} + \overline{B}$

۲. $(\overline{A-B}) = \overline{A} - \overline{B}$

۳. $(\overline{AB}) = \overline{A}.\overline{B}$

٤. اگر $B \neq ۰$ باشد:

$$(\overline{\frac{A}{B}}) = \frac{\overline{A}}{\overline{B}}$$

۵. $|AB| = |A|.|B|$

۶. اگر $B \neq ۰$ باشد،

$$|\frac{A}{B}| = \frac{|A|}{|B|}$$

اثبات: اثبات این قضیه با محاسبه‌ی عبارات طرفین ساده بوده و بر عهده‌ی خواننده گذاشته می‌شود.

نکته ۳. عدد مختلط z عددی حقیقی است اگر و تنها اگر $z = \overline{z}$.

اثبات: اگر $z = a + bi$ باشد داریم $\overline{z} = a - bi$ حال:

$$z = \overline{z} \Leftrightarrow a + bi = a - bi \Leftrightarrow -b = b \Leftrightarrow b = ۰ \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$$

مثال ۱-۹ خواص زیر را برای نرم اعداد مختلط ثابت کنید:

۱. $-|z| \leq \mathrm{Im}(z) \leq |z|$

۲. $-|z| \leq \mathrm{Re}(z) \leq |z|$

۳. برای هر عدد مختلط دلخواه $|z| \geq ۰$ و $|z| = ۰$ اگر و تنها اگر $z = ۰$.

٤. برای هر عدد مختلط z، $|-z| = |z| = |\overline{z}|$

۵. برای هر دو عدد مختلط $z_۱$ و $z_۲$:

$$|z_۱ z_۲| = |z_۱||z_۲|$$

حل: به عنوان تمرین بر عهده‌ی خواننده گذاشته می‌شود.

مثال ۱-۱۰ برای دو عدد مختلط $z_۱$ و $z_۲$ نشان دهید:

$$|z_۱ - z_۲|^۲ + |z_۱ + z_۲|^۲ = ۲(|z_۱|^۲ + |z_۲|^۲)$$

حل: داریم:

$$\begin{aligned} |z_۱ + z_۲|^۲ + |z_۱ - z_۲|^۲ &= (z_۱ + z_۲)(\overline{z_۱ + z_۲}) + (z_۱ - z_۲)(\overline{z_۱ - z_۲}) \\ &= |z_۱|^۲ + |z_۲|^۲ + z_۱\overline{z}_۲ + \overline{z}_۱ z_۲ + |z_۱|^۲ + |z_۲|^۲ - z_۱\overline{z}_۲ - \overline{z_۱} z_۲ \\ &= ۲(|z_۱|^۲ + |z_۲|^۲) \end{aligned}$$

مثال ۱-۱۱ ثابت کنید اگر $|z_۱| = |z_۲| = ۱$ و $z_۱ z_۲ \neq -۱$، آنگاه $\frac{z_۱ + z_۲}{۱ + z_۱ z_۲} \in \mathbb{R}$.

حل: قرار دهید $A = \frac{z_۱ + z_۲}{۱ + z_۱ z_۲}$ می‌دانیم

$$z_۱\overline{z}_۱ = ۱ \ \Rightarrow \ \overline{z}_۱ = \frac{۱}{z_۱}$$

و به طریق مشابه:

$$\overline{z}_۲ = \frac{۱}{z_۲}$$

داریم:

$$\overline{A} = \frac{\overline{z_۱ + z_۲}}{\overline{۱ + z_۱ z_۲}} = \frac{\overline{z}_۱ + \overline{z}_۲}{\overline{۱} + \overline{z_۱ z_۲}} = \frac{\frac{۱}{z_۱} + \frac{۱}{z_۲}}{۱ + \frac{۱}{z_۱ z_۲}} = \frac{z_۱ + z_۲}{۱ + z_۱ z_۲} = A$$

پس $A \in \mathbb{R}$ است.

مثال ۱-۱۲ فرض کنید $z_۱, z_۲, \ldots, z_n$ اعدادی مختلط باشند و

$$|z_۱| = |z_۲| = \cdots = |z_n| = ۱$$

ثابت کنید عدد زیر عددی حقیقی است:

$$\frac{(z_۱ + z_۲)(z_۲ + z_۳)\cdots(z_n + z_۱)}{z_۱ z_۲ \cdots z_n}$$

حل: به راحتی برای اثبات این‌که عبارت داده شده عددی حقیقی است کافی است اثبات کنیم با مزدوجش برابر است، اما داریم:

$$\left(\overline{\frac{(z_۱+z_۲)\cdots(z_n+z_۱)}{z_۱z_۲\cdots z_n}}\right)=\left(\frac{(\overline{z_۱}+\overline{z_۲})(\overline{z_۲}+\overline{z_۳})\cdots(\overline{z_n}+\overline{z_۱})}{\overline{z_۱}\ \overline{z_۲}\cdots\overline{z_n}}\right)$$

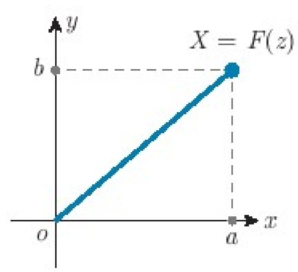
اما از آن‌جایی که برای $۱\leq i\leq n$ داریم $|z_i|=۱$ پس:

$$\forall_i\in\{۱,۲,\dots n\}:z_i\overline{z_i}=|z_i|^۲=۱\ \Rightarrow\ \overline{z_i}=\frac{۱}{z_i}$$

با جاگذاری $\overline{z_i}$ها در روابط و کمی ساده‌سازی می‌توان ثابت کرد که عبارت داده شده با مزدوجش برابر بوده و در نتیجه عددی حقیقی است.

۱-۴ نمایش قطبی اعداد مختلط

اگر $\mathbb{C}$ مجموعه‌ی اعداد مختلط باشد تناظری یک‌به‌یک و پوشا بین نقاط صفحه و $\mathbb{C}$ وجود دارد که بدین شکل است.



$$F:\mathbb{C}\to\mathbb{R}^۲$$
$$F(a+bi)=(a,b)$$

خواننده به سادگی می‌تواند بررسی کند که تابع فوق تابعی یک‌به‌یک و پوشاست.

$$z=a+bi$$

در شکل بالا توجه کنید که $OX^۲=a^۲+b^۲$ بنابراین داریم که:

$$OX^۲=|z|^۲$$

و هم‌چنین $b=OX.\sin\theta$ و $a=OX.\cos\theta$ که θ زاویه‌ی بین نیم‌خط مثبت محور xها و OX می‌باشد.

با توجه به این مطالب می‌توان نوشت:

$$z=|z|(\cos\theta+i\sin\theta)$$

که θ زاویه‌ای یکتا در بازه‌ی $[۰,۲\pi)$ است.

نمایش قطبی

اگر z عددی مختلط باشد نمایشی به صورت

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) \ \ , \ \ r \geq ۰ \cdot \theta \in (۰, ۲\pi]$$

وجود دارد که به این نمایش، نمایش قطبی عدد مختلط z می‌گوییم.

توجه: با نرم‌گیری از طرفین معادله می‌توان به راحتی چک کرد که $r = |z|$.

تعریف

اگر $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ نمایش قطبی عدد z باشد. به اعداد r و θ به ترتیب نرم و آرگومان z گوییم و با $|z|$ و $\arg(z)$ نمایش می‌دهیم.

یکی از ویژگی‌های جالب توجه این نمایش را در قضیه‌ی زیر خواهیم دید:

قضیه

اگر A و B اعدادی مختلط باشند داریم:

$$|AB| = |A|\,|B|$$
$$\arg(AB) = \arg(A) + \arg(B)$$

اثبات: قسمت اول در قضیه‌ای پیش از این اثبات گردید.

حال برای اثبات قسمت دوم قضیه داریم:

$$\begin{aligned}
& A = r(\cos\theta + i\sin\theta) \\
& B = r'(\cos\gamma + i\sin\gamma) \\
\Rightarrow\ & AB = (rr')[(\cos\theta + i\sin\theta)(\cos\gamma + i\sin\gamma)] \\
& = rr'([\cos\theta\cos\gamma - \sin\theta\sin\gamma]) + i[\cos\theta\sin\gamma + \sin\theta\cos\gamma] \\
& = rr'(\cos(\theta+\gamma) + i\sin(\theta+\gamma))
\end{aligned}$$

نکته ٤. توجه کنید که اگر در محاسبات بالا به عددی بزرگ‌تر از ۲π برای آرگومان رسیدیم، می‌توان هر مضرب صحیح دلخواهی از ۲π را آن کم کرد، تا حاصل در بازه‌ی $(۲\pi, ۰]$ قرار گیرد. در واقع آرگومان θ و $\theta + ۲k\pi$ یکسان است.

نکته ۵. توجه کنید که به نحو کاملاً مشابه می‌توان اثبات کرد که اگر A و B اعدادی مختلط باشند و $B \neq ۰$ آن‌گاه:

$$|\frac{A}{B}| = \frac{|A|}{|B|}$$
$$\arg(\frac{A}{B}) = \arg(A) - \arg(B)$$

نتیجه با توجه به قضیه‌ی قبل، بدیهی است اگر z_i $(i = ۱, ۲, \cdots, n)$ اعداد مختلط با اندازه‌ی r_i و آرگومان θ_i باشند و $z = z_۱ z_۲ \cdots z_n$ خواهیم داشت:

$$|z| = r_۱ r_۲ \cdots r_n$$
$$\arg(z) = \arg(z_۱) + \arg(z_۲) + \cdots + \arg(z_n)$$

نتیجه (قانون دموآور) اگر $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ باشد و $n \in \mathbb{Z}$ خواهیم داشت:

$$z^n = r^n(\cos\theta + i\sin\theta)^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta))$$

این شیوه از نمایش اعداد کاربردهای بسیار زیادی در مسائل گوناگون دارد به عنوان یک نمونه می‌توان به مثال زیر توجه کرد.

مثال ۱-۱۳ حاصل عبارت $(۱ + i)^{۱۳۹۲}$ را محاسبه کنید.

حل: می‌توان نوشت:

$$۱ + i = |۱ + i|\Big(\cos\arg(۱ + i) + i\sin\arg(۱ + i)\Big)$$

اما داریم: $|۱ + i| = \sqrt{۲}$

هم‌چنین با محاسبه‌ی آسان می‌توان ثابت کرد $\arg(۱ + i) = \frac{\pi}{۴}$ پس:

$$(۱ + i) = \sqrt{۲}(\cos\frac{\pi}{۴} + i\sin\frac{\pi}{۴})$$
$$\Rightarrow (۱ + i)^{۱۳۹۲} = (\sqrt{۲})^{۱۳۹۲}\Big(\cos(۱۳۹۲ \times \frac{\pi}{۴}) + i\sin(۱۳۹۲ \times \frac{\pi}{۴})\Big)$$
$$= ۲^{۶۹۶}\Big(\cos(۳۴۸\pi) + i\sin(۳۴۸\pi)\Big) = ۲^{۶۹۶}$$

مثال ۱-۱٤ برای هر عدد حقیقی θ، ثابت کنید:

$$\sin(5\theta) = 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta$$

حل: طبق روابط بیان شده داریم:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \cos 5\theta + i\sin 5\theta$$

اما از طرفی دیگر داریم:

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^5 &= \cos^5\theta + \binom{5}{1}\cos^4\theta(i\sin\theta)\\ &+ \binom{5}{2}\cos^3\theta(i\sin\theta)^2 + \binom{5}{3}\cos^2\theta(i\sin\theta)^3\\ &+ \binom{5}{4}\cos\theta(i\sin\theta)^4 + (i\sin\theta)^5\end{aligned}$$

حال با ساده کردن دو طرف و مقایسه‌ی قسمت‌های حقیقی و موهومی طرفین داریم:

$$\mathrm{Im}(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = 16\sin^5\theta - 20\sin^3\theta + 5\sin\theta$$
$$\mathrm{Im}(\cos\theta + i\sin\theta)^5 = \sin 5\theta$$

و به وضوح حکم مورد نظر مسئله نتیجه می‌گردد.

مثال ۱-۱۵ بسط $\cos 3\theta$ و $\sin 3\theta$ را حساب کنید.

حل: در قانون دموآور قرار دهید $n = 3$ و $r = 1$. به سادگی به‌دست می‌آید:

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$
$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta \times \sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$$

همان طور که گفته شد تناظری بین نقاط صفحه و اعداد مختلط وجود دارد. یکی از ویژگی‌های بردارهای صفحه این است که برای هر دو بردار A و B داریم:

$$|A+B| \le |A| + |B|$$

و به طور ناخودآگاه با توجه به تناظر بین بردارها و اعداد مختلط به نظر می‌رسد که چنین نابرابری برای اعداد مختلط هم برقرار است که در قضیه‌ی زیر این موضوع را به زبان اعداد مختلط بیان کرده‌ایم.

قضیه (نابرابری مثلث)

اگر A و B دو عدد مختلط دلخواه باشند آنگاه:

$$|A| + |B| \geq |A + B|$$

و تنها زمانی حالت تساوی برقرار است که برای مقداری حقیقی مثبت مثل k داشته باشیم $A = k.B$.

اثبات: فرض کنید $A = x + iy$ و $B = z + it$ که x، y و z و t اعدادی حقیقی هستند، حال داریم:

$$A + B = (x + z) + i(y + t)$$

بنابراین

$$|A + B| = \sqrt{(x + z)^{۲} + (y + t)^{۲}}$$
$$|A| + |B| = \sqrt{x^{۲} + y^{۲}} + \sqrt{z^{۲} + t^{۲}}$$

حال پس کافی است نشان دهیم:

$$\forall\, x, y, z, t \in \mathbb{R} \;:\; \sqrt{(x + z)^{۲} + (y + t)^{۲}} \leq \sqrt{x^{۲} + y^{۲}} + \sqrt{z^{۲} + t^{۲}}$$

و این هم با به توان ۲ رساندن دو طرف معادل است با:

$$\Leftrightarrow\; (x + z)^{۲} + (y + t)^{۲} \leq x^{۲} + y^{۲} + t^{۲} + ۲\sqrt{(x^{۲} + y^{۲})(z^{۲} + t^{۲})}$$
$$\Leftrightarrow\; \sqrt{(x^{۲} + y^{۲})(z^{۲} + t^{۲})} \geq xz + yt$$

و این هم نتیجه‌ی نابرابری کوشی است چرا که:

$$(x^{۲} + y^{۲})(z^{۲} + t^{۲}) \geq (\sqrt{x^{۲}z^{۲}} + \sqrt{y^{۲}t^{۲}})^{۲} = (xz + yt)^{۲}$$
$$\Rightarrow \sqrt{(x^{۲} + y^{۲})(z^{۲} + t^{۲})} \geq |xz + yt| \geq xz + yt$$

توجه کنید که تساوی نابرابری کوشی هم زمانی است که برای مقداری حقیقی مثل $k \geq 0$ داشته باشیم:

$$\left.\begin{array}{l} x = kz \\ y = kt \end{array}\right\} \Rightarrow A = kB$$

و این کل قضیه را نتیجه خواهد داد.

توجه: می‌توان نابرابری مثلث را به تعداد بیش‌تری متغیر هم بدین شکل تعمیم داد:

$$\forall\, a_1, a_2, \cdots, a_n \in \mathbb{C} : |a_1 + a_2 + \cdots + a_n| \leq |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$$

و حالت تساوی هم تنها زمانی رخ می‌دهد که:

$$\forall\, ij\ \exists k \in \mathbb{R}^+ \ :\ a_i = ka_j$$

مثال ۱-۱۶ برای هر ۳ عدد حقیقی دلخواه x، y و z ثابت کنید:

$$|x| + |y| + |z| \leq |x + y - z| + |x + z - y| + |y + z - x|$$

اثبات: طبق نابرابری مثلث داریم:

$$|x + y - z| + |x + z - y| \geq 2|x|$$
$$|x + y - z| + |y + z - x| \geq 2|y|$$
$$|y + z - x| + |x + z - y| \geq 2|z|$$

با جمع این ۳ رابطه حکم نتیجه می‌گردد.

مثال ۱-۱۷ ثابت کنید اگر α ریشه‌ی معادله‌ی $x^n + x + 2$ باشد آن‌گاه $|\alpha| \geq 1$.

اثبات: داریم:

$$\alpha^n + \alpha + 2 = 0 \ \Rightarrow\ \alpha^n + \alpha = -2$$
$$\xRightarrow{\text{نرم‌گیری از طرفین}} |\alpha^n + \alpha| = |-2| = 2$$

اما طبق نابرابری مثلث:

$$|\alpha^n + \alpha| \leq |\alpha|^n + |\alpha| \ \Rightarrow\ |\alpha|^n + |\alpha| \geq 2$$

اما اگر $|\alpha| < ۱$ باشد:

$$\left.\begin{array}{l}|\alpha|^n < ۱\\ |\alpha| < ۱\end{array}\right\} \Rightarrow |\alpha|^n + |\alpha| < ۲$$

تناقض حاصله نشان می‌دهد $|\alpha| \geq ۱$.

در ادامه‌ی درس به یکی از نمایش‌های جالب‌تر اعداد مختلط اشاره می‌کنیم. تا به حال به دو ویژگی در مورد ضرب اعداد مختلط دست یافته‌ایم و یکی از آن‌ها عبارت است از رابطه‌ی $\arg(AB) = \arg(A) + \arg(B)$ اما با کمی تأمل در این رابطه در می‌یابیم که توابع آشنایی هم به جز $\arg$ داریم که این خاصیت را دارند. یکی از مشهورترین این توابع، تابع $f(x) = A^x$ است چرا که:

$$A^x A^y = A^{x+y}$$

بنابراین شاید این ایده به ذهن برسد که شاید اعداد مختلط هم نمایشی به شکل توابع نمایی داشته باشند در واقع این ایده صحیح بوده و در زیر به آن می‌پردازیم:[۱]

از ریاضیات مدرن سه رابطه‌ی بسیار جالب می‌دانیم و آن‌ها عبارتند از روابط زیر که برای هر $x \in \mathbb{R}$ برقرارند:

$$\begin{aligned}\cos(x) &= ۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} - \cdots\\ \sin(x) &= \frac{x}{۱!} - \frac{x^۳}{۳!} + \frac{x^۵}{۵!} - \cdots\\ e^x &= ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \cdots\end{aligned}$$

اگر فرض را بر این بگیریم که قواعد به توان رساندن در اعداد مختلط هم صحیح باشد داریم:

$$\begin{aligned}\forall\theta \in \mathbb{R} \,:\, e^{i\theta} &= ۱ + \frac{i\theta}{۱} + \frac{(i\theta)^۲}{۲!} + \cdots\\ &= \left(۱ - \frac{\theta^۲}{۲!} + \frac{\theta^۴}{۴!} - \cdots\right) + i\left(\frac{\theta}{۱!} - \frac{\theta^۳}{۳!}\cdots\right)\\ &= \cos\theta + i\sin\theta\end{aligned}$$

و همین ایده منجر به یک شیوه‌ی دیگر نمایش اعداد مختلط می‌شود که به نمایش نمایی اعداد مختلط معروف است.

۱) نتایج این قسمت را بدون اثبات می‌توانید بپذیرید.

هر عدد مختلط مثل z را می‌توان به صورت $re^{i\theta}$ نمایش داد که در آن θ برابر $\arg(z)$ بوده و r هم $|z|$ می‌باشد.

با این شیوه از نمادگذاری می‌توان نوشت:

$$re^{i\theta} \times r'e^{i\theta'} = (rr')e^{i(\theta+\theta')}$$
$$\frac{re^{i\theta}}{r'e^{i\theta'}} = (\frac{r}{r'})e^{i(\theta-\theta')}$$

و به همین شکل می‌توان روابط دیگری هم با استفاده از این شیوه نمایش استخراج کرد به عنوان یک مثال به دانش‌آموزان توصیه می‌گردد که قضایای مربوط به نمایش هندسی را سعی کنند با این شیوه نمایش اثبات کنند.

در ادامه برآنیم تا به کمک مطالب گفته شده در این فصل به حل گونه‌ی خاصی از معادلات چندجمله‌ای که در ادامه‌ی درس نقش مهمی ایفا می‌کنند بپردازیم:

در واقع این معادلات همان معادلات $x^n = ۱$ می‌باشند در ادامه اثبات خواهیم کرد که هر چنین معادله‌ای دقیقاً در اعداد مختلط دارای n جواب متمایز است که نام خاصی را به این جواب‌ها اختصاص می‌دهیم.

تعریف

عدد مختلط w را «ریشه‌ی nاُم واحد» گوییم هرگاه $w^n = ۱$ برقرار باشد.

قضیه

تعداد ریشه‌های nاُم واحد دقیقاً nتاست و عبارتند از:

$$e^{i\theta}\ ;\ \theta = \frac{۲k\pi}{n}\ ;\ k = ۱, ۲, \dots, n$$

اثبات: فرض کنید w ریشه‌ی nام واحد باشد:

$$w^n = ۱ \ \Rightarrow\ |w|^n = ۱ \ \Rightarrow\ |w| = ۱$$

پس می‌توان نوشت:

$$w = e^{i\theta} \ \Rightarrow\ w^n = e^{in\theta} = ۱$$

اما می‌توان بررسی کرد که $e^{i\theta}$ برابر ۱ است اگر و تنها اگر رابطه $\theta = ۲k\pi$ برای مقداری صحیح مثل k برقرار باشد. پس:

$$n\theta = ۲k\pi \;\Rightarrow\; \theta = \frac{۲k\pi}{n}$$

اما مقدارهایی از θ که به اندازه‌ی مضربی از ۲π با یکدیگر اختلاف دارند یکسان هستند. بنابراین مقدارهای θ متناظر با $k = ۱, ۲, \ldots, n$ می‌باشد زیرا بقیه‌ی مقادیر برای k با یکی از این n مقدار برابر می‌باشند. بنابراین حکم اثبات می‌گردد. دقت کنید در حالت $k = n$، $\theta = ۲k$ و $w = ۱$.

تعریف

عدد مختلط w را ریشه‌ی اولیه‌ی nام واحد گوییم هرگاه $w^n = ۱$ باشد و برای هر عدد طبیعی $i < n$ داشته باشیم $w^i \neq ۱$.

قضیه

تعداد ریشه‌های nام اولیه واحد دقیقاً $\varphi(n)$تاست و عبارتند از:

$$e^{\frac{i۲k\pi}{n}} \;;\; k \in \{۱, ۲, \cdots n\} \;:\; (k, n) = ۱$$

اثبات: اثبات این قضیه‌ی ساده بوده و بر عهده‌ی دانش‌آموزان گذاشته می‌شود.

حال به عنوان مثال می‌خواهیم تمام ریشه‌های معادله‌ی $z^۳ = ۱$ را بیابیم. فرض کنید

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

بنابر قضایا و مباحث گفته شده، داریم:

$$۱ = z^۳ = r^۳(\cos ۳\theta + i \sin ۳\theta) \;\Rightarrow\; r = ۱\;,\; \cos ۳\theta = ۱\;,\; \sin ۳\theta = ۰$$

$$\Rightarrow ۳\theta = ۲k\pi \;\Rightarrow\; \theta = \frac{۲k\pi}{۳} \qquad (k = ۰, \pm ۱, \pm ۲, \ldots)$$

دقت کنید به ازای $k = ۰, ۱, ۲$، داریم: $\theta_۰ = ۰$، $\theta_۱ = \frac{۲\pi}{۳}$ و $\theta_۲ = \frac{۴\pi}{۳}$ و برای kهای دیگر، مقادیر θ تنها در مضارب ۲π فرق دارند و در حقیقت جواب جدیدی به ما نمی‌دهند. اعداد متناظر با $\theta_۰$ و $\theta_۱$ و $\theta_۲$ را با $z_۰$، $z_۱$ و $z_۲$ در صفحه‌ی مختصات نشان داده‌ایم.

به راحتی می‌توانید بررسی کنید نقاط z_0، z_1 و z_2، مثلث متساوی‌الاضلاعی تشکیل می‌دهند که در دایره‌ی واحد محاط است.

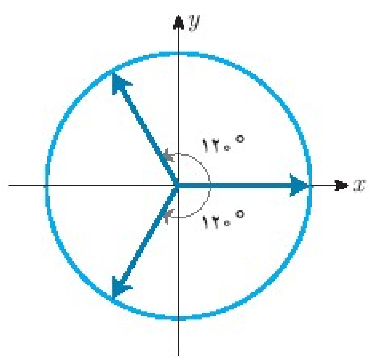
حالا کاملاً مشابه جواب‌های معادله‌ی $z^n = 1$ را بررسی می‌کنیم. اگر $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$، بنابر قضیه‌ی دموآور خواهیم داشت:

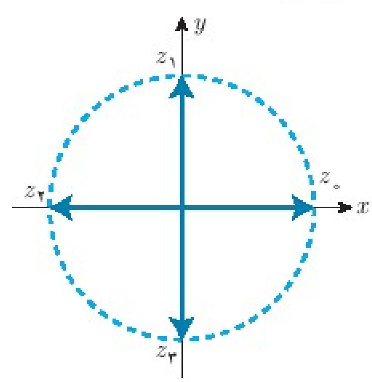
$$1 = z^n = r^n(\cos(n\theta) + i\sin(n\theta)) \Rightarrow r = 1\ ,\ n\theta = 2k\pi$$
$$\Rightarrow r = 1\ ,\ \theta = \frac{2k\pi}{n} \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

مجدداً به سادگی نتیجه می‌شود تنها به ازای $(k = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$، جواب‌های متمایز محاسبه می‌شوند و بقیه جواب تنها در مضربی از 2π با یکی از ریشه‌های معرفی شده به ازای $(k = 0, 1, 2, \dots, n-1)$ تفاوت دارند. حال متناظر با $(k = 0, 1, \dots, n-1)$، θ_i و z_iها را معرفی می‌کنیم:

$$k = 0 \Rightarrow \theta_0 = 0 \Rightarrow z_0 = 1$$
$$k = 1 \Rightarrow \theta_1 = \frac{2\pi}{n} \Rightarrow z_1 = \cos\theta_1 + i\sin\theta_1$$
$$\vdots$$
$$k = n-1 \Rightarrow \theta_{n-1} = \frac{2\pi(n-1)}{n} \Rightarrow z_{n-1} = \cos\theta_{n-1} + i\sin\theta_{n-1}$$

مجدداً می‌توان چک کرد اعداد مختلط $z_0, z_1, \dots, z_{n-1}$ رئوس یک nضلعی منتظم محاط در دایره واحد تشکیل می‌دهند.





$n = 4$