تابع چند جمله‌ای ـ توابع صعودی و نزولی

۱) اگر f تابع ثابت، g تابع همانی و $\frac{۲f(۳)}{۵g(-۱)}=۱$ باشد، آن‌گاه حاصل $f(۲)\times g(۲)$ کدام گزینه می‌باشد؟

۱) ۵   ۲) ۵-

۳) ۴   ۴) ۴-

%۵۴
مهر ۱۳۹۸

۲) نمودار تابع خطی $f(x)$ از نقاط $(۰,۲)$ و $(-۱,-۱)$ می‌گذرد. حاصل $(f(۱))^۲-۴f(۲)$ کدام است؟

۱) ۱۷   ۲) ۲۱

۳) ۷-   ۴) ۲۷-

%۴۳
مهر ۱۳۹۹

۳) اگر $f(x)$ تابع همانی، $g(x)$ تابع ثابت و $h(x)=g^۲(x)-۲f(x)g(x)$ باشد و داشته باشیم: $h(۳)=-۸$، آن‌گاه حاصل $h(۲)$ کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۴   ۲) ۴-

۳) ۲   ۴) ۲-

%۶۵
دی ۱۳۹۸

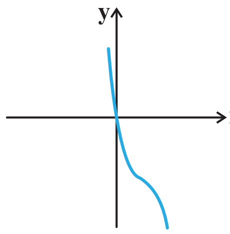
۴) در تابع با ضابطهٔ $f(x)=ax^۳-x+c$ اگر داشته باشیم: $f(۱)=f(-۱)+۲$ و $f(۲)=۱۳$؛ آن‌گاه حاصل $f(a\times c)$ کدام است؟

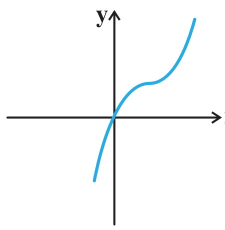
۱) ۱۲-   ۲) ۱۴-

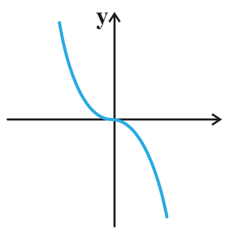
۳) ۱۵-   ۴) ۱۳-

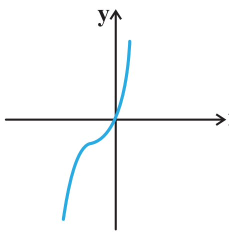
%۸۱
شهریور ۱۳۹۸

۵) نمودار تابع $f(x)=۶x^۲-x^۳-۱۲x$ شبیه کدام گزینه است؟

۱)


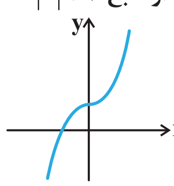
۲)


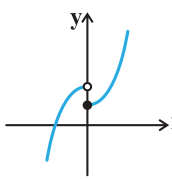
۳)


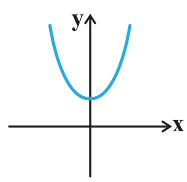
۴)


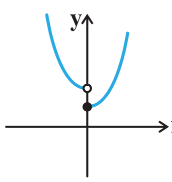
%۴۴
آبان ۱۳۹۷

۶) نمودار تابع $y=x^۲|x|+۱$ به کدام صورت است؟

۱)


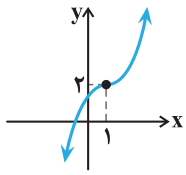
۲)


۳)


۴)


%۵۸
مهر ۱۳۹۷

۷) نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(x-a)^{۳}+b$ به‌صورت زیر است. حاصل $a.b$ کدام است؟



۱) ۲
۲) ۲-
۳) ۳
۴) ۳-

%۶۷
دی ۱۳۹۷

۸) دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{\dfrac{۹|x|+x^{۳}}{|x|}}$ کدام است؟

۱) $(-۳,۳)$
۲) $[-۳,۰)\cup(۳,+\infty)$
۳) $[-۳,+\infty)$
۴) $[-۳,۰)\cup(۰,+\infty)$

%۷۰
دی ۱۳۹۹

۹) تابع $y=۲x+\dfrac{|x|}{x}$ در دامنهٔ خود چگونه است؟

۱) اکیداً صعودی
۲) اکیداً نزولی
۳) هم صعودی و هم نزولی
۴) غیریکنوا

%۴۷
مهر ۱۳۹۷

۱۰) تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+۱|-|x-۲|$، در کدام بازه، اکیداً صعودی است؟

۱) $(-\infty,۲)$
۲) $(-۱,+\infty)$
۳) $(-۱,۲)$
۴) $(۲,+\infty)$

%۷۶
فروردین ۱۴۰۰

۱۱) اگر بزرگترین بازه‌ای که تابع $f(x)=(x-۲)|x-۴|$ در آن نزولی است، $[a,b]$ باشد، حاصل $\dfrac{b}{a}$ کدام است؟

۱) -۳
۲) ۳
۳) $\dfrac{۴}{۳}$
۴) $\dfrac{-۴}{۳}$

%۵۷
فروردین ۱۴۰۱

۱۲) در بازه‌ای که تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x+۲|+|x-۵|$ اکیداً صعودی است، نمودار آن با نمودار تابع $g(x)=۶x^{۲}+۵x+۱$ چند نقطهٔ تلاقی دارد؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) فاقد نقطهٔ مشترک هستند.

%۴۱
دی ۱۳۹۹

۱۳) اگر $f(x)=\sqrt{x+۲}-۱$ باشد، آن‌گاه دامنهٔ تابع $y=\dfrac{۱}{\sqrt{xf(x)}}$ کدام است؟

۱) $(-۱,۰)$
۲) $(۰,+\infty)$
۳) $\mathbb{R}-[-۱,۰]$
۴) $[-۲,-۱)\cup(۰,+\infty)$

%۶۴
آبان ۱۴۰۰

ترکیب توابع

۱۴) اگر $f(x)=[\dfrac{۱}{x}]$ و $g(x)=|x|$، حاصل $f(g(۱-\sqrt{۲}))-g(f(۱-\sqrt{۲}))$ کدام است؟ ([ ]، علامت جزء صحیح است.)

۱) صفر
۲) ۵
۳) -۱
۴) $-\dfrac{۱}{۲}$

%۷۱
مرداد ۱۳۹۷

۱۵) اگر $f(g(x))=۳x^{۲}-۶x-۵$ و $f(x)=۳x+۴$ باشد، $g(۲)$ کدام است؟

۱) صفر
۲) ۲
۳) ۵-
۴) ۳-

%۷۶
دی ۱۳۹۷

۱۶) اگر $f=\{(۵,۲),(۳,۴),(۱,۸),(۶,۹)\}$ و $g(x)=۲f(x+۲)-۳$ باشد و داشته باشیم: $(gof)(a)=۱۵$، a کدام است؟

۱) ۵
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۳

%۶۱
آذر ۱۳۹۷

۱۷ با توجه به ماشین $x \to \boxed{f} \to \boxed{g} \to x\sqrt{x}+\sqrt{x}$ اگر $f(x)=\sqrt{x}$ باشد، $g(x)$ کدام است؟

۱) $x(x^۲+۱)$ ۲) $x^۲(x+۱)$

۳) $x^۳+۱$ ۴) $x^۲+x$

٪۵۱ — شهریور ۱۳۹۷

۱۸ اگر $f=\{(۲,۵),(۶,۳),(۳,۴),(۴,۷)\}$ و $g=\{(۳,۲),(۲,۱),(۴,۵),(۱,۳)\}$ باشد، آن‌گاه برد تابع $fo(۲g)$ کدام است؟

۱) $\{۵,۳\}$ ۲) $\{۴,۵,۷\}$

۳) $\{۷,۵,۳\}$ ۴) $\{۳,۷,۵,۴\}$

٪۶۷ — آبان ۱۳۹۸

۱۹ اگر $f(x)=\frac{۲x-۱}{x+۱}$ و $g(x)=\frac{۲x+۲}{۲-x}$ باشند، ضابطهٔ تابع $g(f(x))$ کدام است؟

۱) $x-۱$ ۲) $x+۱$

۳) x ۴) $۲x$

٪۵۲ — شهریور ۱۳۹۹

۲۰ اگر $f(x)=\sqrt{x+۱}$ و $g(x)=-|\sqrt{x}+۱|+۲$ باشد، آنگاه دامنهٔ تابع fog کدام است؟

۱) $\{۰\}$ ۲) $[۰,۴]$

۳) $[-۲,۰]$ ۴) $[۴,+\infty)$

٪۵۴ — شهریور ۱۴۰۰

۲۱ اگر $f(x)=\sqrt{۲+x}$ و $g(x)=x^۲$ باشد، آنگاه معادلهٔ $g(f(x))=۵$ چند ریشه حقیقی دارد؟

۱) فقط یک ریشهٔ مثبت ۲) فقط یک ریشهٔ منفی

۳) یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی ۴) ریشهٔ حقیقی ندارد.

٪۵۳ — فروردین ۱۳۹۸

۲۲ اگر دو تابع $f(x)=۳x-۲$ و $(fog)(x)=\frac{x^۲+۱}{x+۱}$ مفروض باشند، مقدار $g(۱)$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) صفر

۳) ۲ ۴) ۴

٪۴۷ — فروردین ۱۳۹۹

۲۳ اگر توابع $f=\{(-۲,-۱),(-۱,۲),(۲,۱),(۳,۵)\}$ و $g(x)=\sin(\frac{\pi}{۲}x)$ مفروض باشند، آن‌گاه تابع $(gof)(x)$ از لحاظ یکنوایی چگونه است؟

۱) اکیداً یکنواست. ۲) فقط صعودی است.

۳) فقط نزولی است. ۴) غیریکنواست.

٪۵۹ — دی ۱۴۰۰

۲۴ هرگاه $f(x)=\frac{۱}{x-۱}$ باشد، D_{fof} برابر با کدام گزینه است؟

۱) $R-\{۱\}$ ۲) $R-\{۱,۲\}$

۳) $R-\{۲\}$ ۴) R

٪۵۶ — مرداد ۱۳۹۷

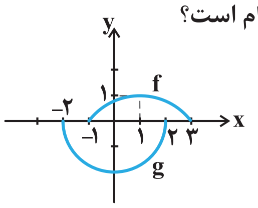
۲۵ نمودار تابع $y=x^۲$ را ۲ واحد به‌سمت راست و ۳ واحد به‌سمت پایین انتقال می‌دهیم. معادلهٔ منحنی حاصل کدام است؟

۱) $y=x^۲+۴x+۷$ ۲) $y=x^۲-۴x+۱$

۳) $y=x^۲-۴x+۷$ ۴) $y=x^۲+۴x+۱$

٪۵۱ — مرداد ۱۳۹۷

۲۶ در شکل زیر نمودار تابع g از روی نمودار f ساخته شده است. ضابطهٔ تابع g کدام است؟



۱) $۲f(x)$

۲) $-۲f(x)$

۳) $-۲f(x-۱)$

۴) $-۲f(x+۱)$

٪۵۴ — آبان ۱۴۰۰

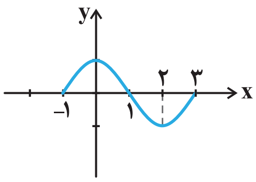
۲۷ برد تابع $f(x)=|x+۱|-۴$ با دامنهٔ $[-۲,۵)$ کدام است؟

۱) $[-۴,۵)$ ۲) $[-۲,۵)$

۳) $[-۴,۲)$ ۴) $(-۵,۲)$

٪۶۱ — آذر ۱۳۹۸

۲۸) شکل زیر نمودار تابع $y=f(x)$ است. نمودار تابع $y=f(۱-x)$ در کدام فاصله اکیداً نزولی است؟



۱) $[-۴,-۳]$
۲) $(-۳,-۱)$
۳) $(-۱,۱)$
۴) $[۱,۲]$

%۵۳
دی ۱۳۹۷

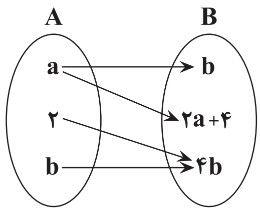
۲۹) تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^{۲}+۴x+۳$ در کدام‌یک از بازه‌های زیر یک‌به‌یک است؟

۱) $(-۳,-۱)$
۲) $(-۲,۰)$
۳) $(-۴,۴)$
۴) $(-۳,۰)$

%۳۹
دی ۱۳۹۷

تابع وارون

۳۰) اگر نمودار پیکانی زیر نمایانگر یک تابع وارون‌پذیر باشد، آن‌گاه زوج مرتب (a,b) برابر با کدام گزینه است؟



۱) $(-۱,۲)$
۲) $(۲,-۱)$
۳) $(۲,۸)$
۴) $(-۱,-۴)$

%۵۴
فروردین ۱۳۹۹

۳۱) ضابطهٔ وارون تابع $y=-\sqrt{x+۴}-۳$ در کدام گزینه آمده است؟

۱) $y=x^{۲}+۶x+۵\,,\ x\leq -۳$
۲) $y=-x^{۲}+۶x+۵\,,\ x\leq -۳$
۳) $y=x^{۲}+۶x+۵\,,\ x\geq -۲$
۴) $y=-x^{۲}+۶x+۵\,,\ x\geq -۲$

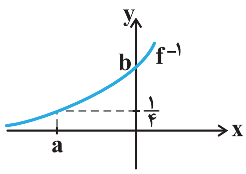
%۴۵
دی ۱۳۹۹

۳۲) اگر $f^{-۱}(x)=\sqrt{x+۷}$ و $g=\{(۲,۱),(-۱,۰),(۱,۳),(۰,۶)\}$، آن‌گاه حاصل $f^{-۱}(۲g^{-۱}(۳))$ کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۲}$
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

%۴۵
فروردین ۱۳۹۹

۳۳) شکل زیر نمودار وارون تابع $f(x)=\sqrt{x}-\frac{۱}{x}$ است. $a+b$ کدام است؟



۱) $-\frac{۵}{۲}$
۲) $-\frac{۳}{۲}$
۳) $-\frac{۷}{۴}$
۴) $-\frac{۵}{۴}$

%۷۳
آبان ۱۳۹۹

۳۴) اگر $f=\{(-۱,۳),(۰,۲),(۲,۱),(۴,۰)\}$ و $g=\{(۱,-۲),(-۲,۰),(۳,-۱),(۰,۱)\}$ باشند و داشته باشیم: $(gof^{-۱})(a)=۱$، آنگاه مقدار $(fog)(-a)$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) صفر

%۵۹
فروردین ۱۳۹۸

۳۵) اگر $f(x)=\sqrt{x}$ و $g=\{(-۱,۴),(۴,-۲),(۳,-۳),(-۲,-۱)\}$ باشد، آنگاه تابع $f^{-۱}+g^{-۱}$ از چند زوج مرتب تشکیل شده است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

%۶۲
آبان ۱۴۰۰

۳۶) اگر $f(x)=x+۴$ و $g(x)=۲x-۵$، نمودار تابع $f^{-۱}og^{-۱}$ محور xها را با چه طولی قطع می‌کند؟

۱) $+\frac{۱}{۲}$
۲) ۳
۳) -۱
۴) $-\frac{۳}{۲}$

%۶۸
شهریور ۱۳۹۷

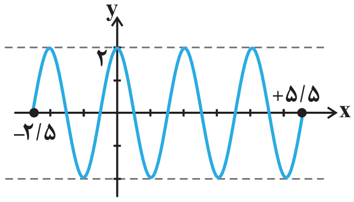
فصل ۲ : مثلثات

ردیف	نام مبحث	تعداد سؤال	پاسخ‌های صحیح بیشتر از ۴۰٪	پاسخ‌های صحیح بین ۳۰٪ تا ۴۰٪	پاسخ‌های صحیح کمتر از ۳۰٪
۱	تناوب و تانژانت	۷	۳	۲	۲
۲	معادلات مثلثاتی	۱۰	۵	۳	۲

ریاضی (۳) دوازدهم تجربی

تناوب و تانژانت

۳۷ شکل مقابل قسمتی از نمودار تابع $y=a\sin\pi(\frac{۱}{۲}+bx)$ است. حاصل ab کدام می‌تواند باشد؟



۱) ۴

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

%۳۸
آذر ۱۳۹۷

۳۸ در کدام تابع زیر، ماکزیمم تابع از مینیمم آن ۵ واحد بیش‌تر بوده و دورهٔ تناوب آن $\frac{۱}{۳}$ است؟

۱) $y=\frac{۵}{۲}-\frac{۳}{۲}\sin(۲\pi x)$

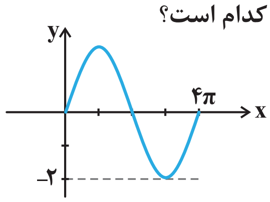
۲) $y=\frac{۳}{۲}+\frac{۵}{۲}\sin(۶x)$

۳) $y=\frac{۳}{۲}-\frac{۵}{۲}\cos(۶\pi x)$

۴) $y=\frac{۵}{۲}+\frac{۳}{۲}\cos(۶\pi x)$

%۵۲
آذر ۱۳۹۹

۳۹ اگر قسمتی از نمودار $f(x)=a\sin bx$ به‌صورت شکل زیر باشد، حاصل ab کدام است؟



۱) ۱

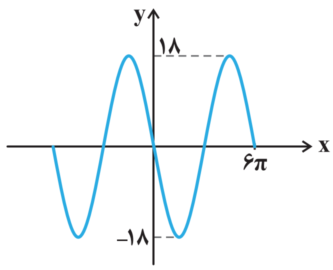
۲) ۱-

۳) ۴

۴) ۴-

%۵۶
فروردین ۱۴۰۰

۴۰ اگر نمودار تابع $f(x)=b\sin(ax)$ به‌صورت زیر باشد، کم‌ترین مقدار $a+b$ کدام است؟



۱) $\frac{۵۳}{۳}$

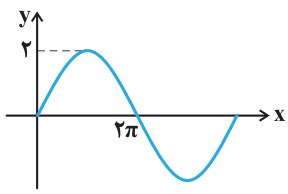
۲) $-\frac{۵۳}{۳}$

۳) -۱۸

۴) $-\frac{۱}{۳}$

%۶۵
آذر ۱۳۹۸

۴۱ اگر نمودار $f(x)=a\sin bx$ به شکل زیر باشد، آن‌گاه ab کدام است؟



۱) ۲

۲) $\frac{۱}{۲}$

۳) ۴

۴) ۱

%۵۱
فروردین ۱۳۹۹

۴۲) دورهٔ تناوب تابع $f(x)=\sqrt{۱-\cos^{۲}x}$ برابر کدام است؟

۱) ۲π ۲) ۴π

۳) π ۴) $\frac{\pi}{۲}$

%۴۶ آبان ۱۳۹۹

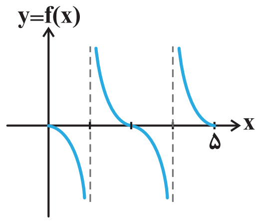
۴۳) شکل مقابل، بخشی از نمودار تابع $f(x)=a\tan(b\pi x)$ را نشان می‌دهد. کدام گزینه می‌تواند صحیح باشد؟

۱) $a\in R\ ,\ b=\pm\frac{۲}{۵}$

۲) $a>۰\ ,\ b=\frac{۲}{۵}$

۳) $a<۰\ ,\ b=\frac{-۲}{۵}$

۴) $a<۰\ ,\ b=\frac{۲}{۵}$



%۵۸ آذر ۱۳۹۸

معادلات مثلثاتی

۴۴) اگر $\sin(\frac{\pi}{۲}+\alpha)=-\frac{۱}{۳}$ باشد، مقدار $\cos ۲\alpha$ کدام است؟

۱) $\frac{۲}{۹}$ ۲) $\frac{۷}{۹}$

۳) $-\frac{۲}{۹}$ ۴) $-\frac{۷}{۹}$

%۶۶ دی ۱۳۹۸

۴۵) اگر $\sin\alpha-\cos\alpha=\frac{۱}{۲}$، آنگاه مقدار $\cos\left(\frac{۳\pi}{۲}-۲\alpha\right)$ کدام است؟

۱) $-\frac{۳}{۴}$ ۲) $-\frac{۳}{۸}$

۳) $\frac{۳}{۸}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

%۵۴ فروردین ۱۳۹۸

۴۶) اگر $f(x)=\sin x-\cos x$ و $g(x)=\sin x+\cos x$، آن‌گاه دورهٔ تناوب تابع $f.g$ کدام است؟

۱) ۲π ۲) π

۳) $\frac{\pi}{۲}$ ۴) تابع متناوب نیست.

%۷۱ دی ۱۳۹۷

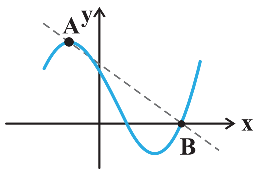
۴۷) هرگاه $\tan(\frac{\pi}{۲}+x)=\frac{۲}{۵}$ باشد، حاصل $\sin ۲x$ برابر است با:

۱) $-\frac{۱۵}{۱۷}$ ۲) $-\frac{۱۹}{۲۰}$

۳) $-\frac{۲۰}{۲۹}$ ۴) $-\frac{۲۱}{۲۵}$

%۳۸ دی ۱۳۹۹

۴۸ شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $y = 1 - 2\sin x$ را نشان می‌دهد. شیب پاره‌خط AB کدام است؟



۱) $-\frac{9}{4\pi}$

۲) $-\frac{3}{8\pi}$

۳) $-\frac{9}{2\pi}$

۴) $-\frac{3}{\pi}$

%۳۷
فروردین ۱۴۰۰

۴۹ تعداد نقاط تلاقی نمودار تابع $y = -3\sin(2\pi x) + 1$ با خط $y = -1$ در بازه‌ی $[0, 1/5]$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) ۳

۳) ۲ ۴) ۱

%۳۳
آذر ۱۳۹۸

۵۰ معادله‌ی $\sin(\frac{\pi}{3} + x) + 2\sin(\frac{2\pi}{3} - x) = \frac{3}{2}$ در بازه‌ی $[0, 2\pi]$ چند ریشه‌ی متمایز دارد؟

۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) فاقد ریشه است.

%۷۵
آذر ۱۳۹۸

۵۱ معادله‌ی $\sin x \cos^3 x - \cos x \sin^3 x = \frac{1}{12}$ در فاصله‌ی $[0, \pi]$ چند جواب دارد؟

۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

%۷۶
آبان ۱۴۰۰

۵۲ مجموعه جواب معادله‌ی مثلثاتی $2\sin^2 x = \sin x$ نمایانگر رأس‌های کدام شکل روی دایرهٔ مثلثاتی است؟

۱) متوازی‌الاضلاع

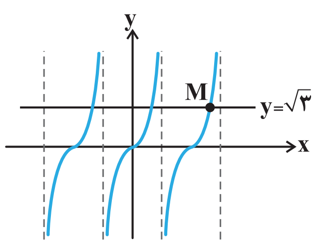
۲) پاره‌خط

۳) ذوزنقه

۴) مربع

%۶۴
آبان ۱۳۹۹

۵۳ با توجه به نمودار تابع $y = \tan x$ و خط $y = \sqrt{3}$، طول نقطهٔ M کدام است؟



۱) $\frac{\pi}{3}$

۲) $\frac{4\pi}{3}$

۳) $\frac{\pi}{6}$

۴) $\frac{7\pi}{6}$

%۶۹
آذر ۱۳۹۹

فصل ۳ :
حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

ردیف	نام مبحث	تعداد سؤال	پاسخ‌های صحیح بیشتر از ۴۰٪	پاسخ‌های صحیح بین ۳۰٪ تا ۴۰٪	پاسخ‌های صحیح کمتر از ۳۰٪
۱	حد بی‌نهایت	۲۳	۱۲	۹	۲
۲	حد در بی‌نهایت	۷	۳	۴	۰

ریاضی (۳) دوازدهم تجربی

حد بی‌نهایت

۵۴) اگر عبارت $۳x^۴+ax^۳+b$ بر $(x^۲-۱)$ بخش‌پذیر باشد، زوج‌مرتب (a,b) کدام است؟

۱) $(-۳,۰)$
۲) $(۰,-۳)$
۳) $(۲,۱)$
۴) اطلاعات مسئله ناقص است.

٪۴۴
آذر ۱۳۹۸

۵۵) اگر چندجمله‌ای $f(x)=x^۲-x+۲-۲a$ بر $(x+۲)$ بخش‌پذیر باشد، آن‌گاه باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $(x-a)$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۴
۳) ۶
۴) ۸

٪۶۳
فروردین ۱۳۹۸

۵۶) اگر $f(x)=x^۳+ax^۲+bx-۴$ بر $x-۱$ بخش‌پذیر باشد و باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x+۲$ برابر -۱۲ باشد، مقدار $f(-۱)$ کدام است؟

۱) -۸
۲) -۴
۳) -۲
۴) -۶

٪۴۴
آذر ۱۳۹۹

۵۷) اگر باقیمانده تقسیم $f(x)=x^۳+x^۲+ax$ بر $x-۲$ برابر ۸ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۱^+}\dfrac{f(x)}{x^۲-[x]}$ کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۱/۵
۴) ۰/۵

٪۵۹
فروردین ۱۴۰۱

۵۸) حاصل $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x^۳-۸}{x^۳-۳x-۲}$ چند برابر $\dfrac{۱}{۳}$ است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

٪۵۲
دی ۱۳۹۸

۵۹) حاصل $\lim\limits_{x\to ۳^-}\dfrac{[x]\sqrt{x^۲-۶x+۹}}{x^۲-۵x+۶}$ کدام است؟ ([ ] ، نماد جزء صحیح است.)

۱) ۳
۲) ۲
۳) -۳
۴) -۲

٪۳۵
دی ۱۴۰۰

۶۰) حد عبارت $f(x)=\dfrac{x^۲-|x-۲|-۴}{x-۲}$ وقتی $x\to ۲^-$ کدام است؟

۱) ۳
۲) ۵
۳) ۴
۴) ۲

٪۵۵
آذر ۱۳۹۷

۶۱) حد تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt{x}-۱}{x^۲-۱}$ وقتی x به‌سمت عدد یک میل می‌کند، کدام است؟

۱) $-\dfrac{۱}{۴}$
۲) ۴
۳) $\dfrac{۱}{۴}$
۴) -۴

٪۵۲
فروردین ۱۳۹۹

۶۲) حاصل $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-۱}$ برابر کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۲}$
۲) $\dfrac{۳}{۲}$
۳) ۲
۴) ۱

٪۳۹
فروردین ۱۴۰۰

۶۳) حد تابع $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۸x}{\sqrt[۳]{x}-۲}$ در $x=۸$ کدام است؟

۱) ۹۰   ۲) ۹۲

۳) ۹۶   ۴) ۹۸

%۵۰ — آذر ۱۳۹۹

۶۴) حاصل $\lim\limits_{x\to -۱}\dfrac{۲x+\sqrt{۳-x}}{x^{۲}+x}$ کدام است؟

۱) $\dfrac{-۷}{۴}$ ۲) $\dfrac{-۱}{۴}$

۳) $\dfrac{۳}{۴}$ ۴) $\dfrac{۵}{۴}$

%۴۲ — فروردین ۱۳۹۸

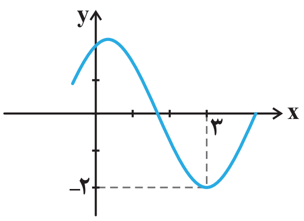
۶۵) حاصل حد تابع $f(x)=\dfrac{\sqrt[۳]{x}-۱}{x^{۲}+۳x-۴}$ در نقطهٔ $x=۱$ کدام است؟

۱) $\dfrac{۱}{۵}$ ۲) $\dfrac{۱}{۱۵}$

۳) $\dfrac{۱}{۸}$ ۴) $\dfrac{۱}{۱۸}$

%۵۶ — دی ۱۳۹۸

۶۶) شکل زیر قسمتی از نمودار تابع $f(x)$ می‌باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{۱-x}{f(x)+۲}$ برابر است با:



۱) $-\dfrac{۲}{۵}$

۲) $+\dfrac{۲}{۵}$

۳) $+\infty$

۴) $-\infty$

%۷۰ — دی ۱۳۹۹

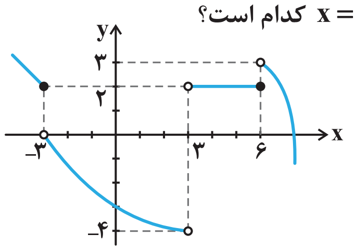
۶۷) حاصل $\lim\limits_{x\to ۳^{-}}\dfrac{([x]+۳)\left|x^{۲}-۲x-۳\right|}{x-۳}$ کدام است؟

۱) صفر   ۲) $-\infty$

۳) -۲۰ ۴) ۱۰

%۵۷ — دی ۱۳۹۹

۶۸) با توجه به نمودار تابع f، حاصل حد چپ تابع $y=(fof)(\dfrac{۳}{x})$ در $x=\dfrac{۱}{۲}$ کدام است؟



۱) صفر

۲) ۲

۳) ۳

۴) -۴

%۵۵ — دی ۱۴۰۰

۶۹) حدود a کدام باشد تا بازهٔ $(۲a-۱,a+۲)$ یک همسایگی عدد $x=۳$ محسوب شود؟

۱) $۱<a<۲$

۲) $\dfrac{۳}{۲}<a<\dfrac{۷}{۲}$

۳) $۲<a<۴$

۴) $-۱<a<۲$

%۴۳ — مرداد ۱۳۹۸

فصل ۱: تابع

۱ گزینهٔ «۲»

با توجه به اینکه f تابع ثابت و g تابع همانی است داریم:

$$f(x)=k\ ,\ g(x)=x$$

پس داریم:

$$\frac{2f(3)}{5g(-1)}=\frac{2k}{-5}=1\Rightarrow k=-\frac{5}{2}\Rightarrow f(x)=-\frac{5}{2}$$

حال داریم:

$$f(2)\times g(2)=-\frac{5}{2}\times 2=-5$$

٪۵۰ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که تنها اطلاعات لازم، دانستن مفهوم تابع ثابت و همانی می‌باشد و با محاسبات ساده قابل حل می‌باشد.

نکته

تابع همانی را باید همیشه به صورت $y=x$ و تابع ثابت را به صورت $y=k$ در نظر گرفت و براساس اطلاعات مسأله مقدار k را یافت.

۲ گزینهٔ «۳»

ابتدا به یافتن معادلهٔ خط گذرنده از دو نقطهٔ داده شده می‌پردازیم:

$$A\Big|_{2}^{0}\ ,\ B\Big|_{-1}^{-1}\Rightarrow m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-1-2}{-1-0}=3$$ و عرض از مبدأ $=2$

$$\Rightarrow f(x)=3x+2$$

حال داریم:

$$f(1)=5\ ,\ f(2)=8\Rightarrow (f(1))^2-4f(2)=25-32=-7$$

٪۲۸ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که تنها اطلاعات لازم برای حل سؤال، نوشتن معادله خط و جایگذاری است.

نکته

برای یافتن معادله خط از روی مختصات ۲ نقطه، ابتدا شیب را با رابطهٔ $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ یافته و سپس با داشتن یکی از نقاط دلخواه معادله را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$y-y_0=m(x-x_0)$$

۳ گزینهٔ «۲»

با توجه به اطلاعات سؤال تابع همانی f را به صورت $f(x)=x$ و تابع ثابت g را به صورت $g(x)=k$ در نظر می‌گیریم پس داریم:

$$h(x)=g^2(x)-2f(x)g(x)\Rightarrow h(x)=k^2-2kx$$
$$\Rightarrow h(3)=k^2-6k=-8\Rightarrow k^2-6k+8=0$$
$$\Rightarrow (k-2)(k-4)=0\Rightarrow k=2,4$$

پس تابع ثابت g به دو صورت $g(x)=2$ یا $g(x)=4$ می‌تواند باشد،

حال داریم:

$$k=2\Rightarrow h(x)=4-4x\Rightarrow h(2)=4-8=-4$$
$$k=4\Rightarrow h(x)=16-8x\Rightarrow h(2)=16-16=0$$

٪۵۴ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که تنها کار لازم جایگذاری $f(x)=x$ و $g(x)=k$ و یافتن مقدار k با اطلاعات داده شده است.

۴ گزینهٔ «۳»

با جایگذاری اطلاعات داده شده در ضابطهٔ تابع $f(x)$ داریم:

$$f(1)=f(-1)+2\Rightarrow a-1+\cancel{c}=-a+1+\cancel{c}+2\rightarrow 2a=4\rightarrow a=2$$

$$f(2)=13\Rightarrow 8a-2+c=14+c=13\Rightarrow c=-1$$

پس داریم:

$$f(x)=2x^3-x-1$$
$$f(a\times c)=f(-2)=-16+2-1=-15$$

٪۵۹ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که فقط کافیست دانش‌آموز اطلاعات داده شده را در ضابطه جایگذاری کرده و مقادیر a و c را بدست آورد.

۵ گزینهٔ «۱»

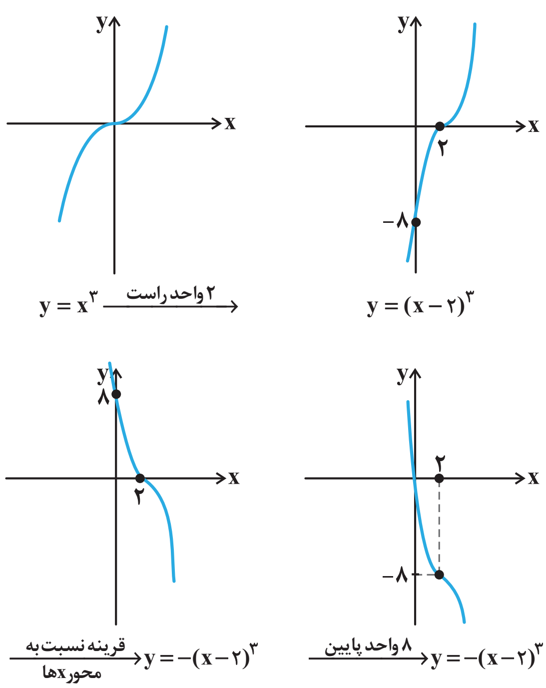
با ساده‌سازی ضابطهٔ داده شده داریم:

$$f(x)=6x^2-x^3-12x=-(x^3-6x^2+12x)$$

با اضافه و کم کردن عدد ۸ به داخل پرانتز داریم:

$$f(x)=-(\underbrace{x^3-6x^2+12x-8}_{(x-2)^3}+8)=-(x-2)^3-8$$

حال با رسم شکل $y=x^3$ واعمال تغییرات روی آن داریم:



۳۸٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که دانش‌آموز صرفاً با تشخیص اتحاد و انجام مراحل انتقال به ترتیب می‌تواند به جواب درست برسد.

نکته

رسم نمودار تابع درجه ۳ به فرم $y=\alpha x^{۳}+bx^{۲}+ax+d$ قطعاً جزء اهداف کتاب ریاضی و کنکور رشته تجربی نیست و چنین عباراتی قطعاً با اتحادها قابل ساده‌سازی می‌باشند.

تسلط به اتحاد مکعب دو جمله‌ای ضروری است:

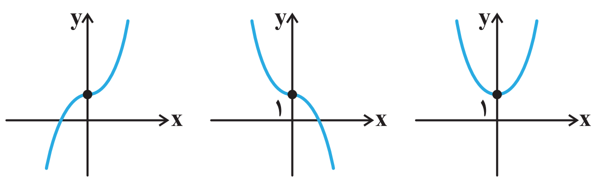
$$(a\pm b)^{۳}=a^{۳}\pm ۳a^{۲}b+۳ab^{۲}\pm b^{۳}$$

۶ گزینهٔ «۳»

با بازه‌بندی ضابطهٔ داده شده به صورت زیر داریم:

$$y=x^{۲}|x|+۱=\begin{cases}x^{۳}+۱ & x\geq ۰\\ -x^{۳}+۱ & x<۰\end{cases}$$

نمودارهای دو تابع $y=x^{۳}+۱$، $y=-x^{۳}+۱$ را در نظر گرفته و از هر کدام بازهٔ موردنظر را انتخاب می‌کنیم:



$$y=x^{۳}+۱ \qquad y=-x^{۳}+۱ \qquad \Rightarrow y=\begin{cases}x^{۳}+۱ & x\geq ۰\\ -x^{۳}+۱ & x<۰\end{cases}$$

۴۶٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که دانش‌آموز با دانستن نمودار تابع $y=x^{۳}$ و با یک بازه‌بندی ساده می‌تواند به جواب مسأله برسد.

نکته

برای رسم ضابطه‌هایی که بخشی از آنها به صورت قدرمطلق است بازه‌بندی یکی از روش‌های پرکاربرد می‌باشد.

۷ گزینهٔ «۱»

کاملاً واضح است که نمودار داده شده همان نمودار تابع $y=x^{۳}$ است که ۱ واحد به راست و ۲ واحد بالا رفته است پس داریم:

$$y=x^{۳}\xrightarrow{\text{۱واحدراست}}y=(x-۱)^{۳}\xrightarrow{\text{۲واحدبالا}}y=(x-۱)^{۳}+۲$$

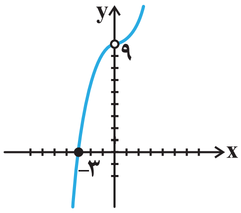
$$\Rightarrow a=۱\ ,\ b=۲\Rightarrow a.b=۲$$

۳۵٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که تنها با دانستن نمودار $y=x^{۳}$ و قوانین ابتدایی انتقال‌ها قابل حل است.

۸ گزینهٔ «۴»

با بازه‌بندی و رسم شکل عبارت زیر رادیکال داریم:

$$\frac{۹|x|+x^{۳}}{|x|}=\begin{cases}\dfrac{۹x+x^{۳}}{x}=x^{۲}+۹ & x>۰\\[2mm] \dfrac{-۹x+x^{۳}}{-x}=-x^{۲}+۹ & x<۰\end{cases}$$



که مشاهده می‌شود عبارت موردنظر در بازهٔ $[-۳,۰)\cup(۰,+\infty)$ تعریف شده و نامنفی است.

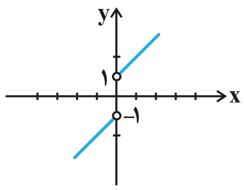
۶۱٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که دانش‌آموز به جای تلاش برای تعیین علامت زیر رادیکال و حل نامعادله با بازه‌بندی عبارت و رسم آن به سادگی می‌تواند دامنه را تعیین کند.

نکته

در صورتیکه دانش‌آموز به تعریف نشده بودن تابع در $x=۰$ توجه نمی‌کرد گزینه ۳ به عنوان جواب انتخاب می‌شد.

۹ گزینهٔ «۱»

با بازه‌بندی تابع داده شده داریم:



$$y=۲x+\frac{|x|}{x}=\begin{cases}۲x+۱ & x>۰\\ ۲x-۱ & x<۰\end{cases}$$

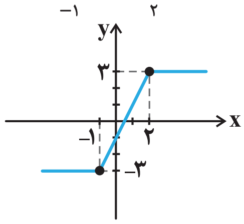
که مشاهده می‌شود در دامنهٔ خود اکیداً صعودی است.

۲۹٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که تنها کار لازم بازه‌بندی و رسم دو ضابطهٔ خطی بسیار ساده است.

۱۰ گزینهٔ «۳»

ضابطهٔ داده شده مربوط به نمودار آبشاری است که برای رسم آن داریم:

$$y=|\underbrace{x+۱}_{-۱}|-|\underbrace{x-۲}_{۲}|\to f(-۱)=-۳,f(۲)=۳$$

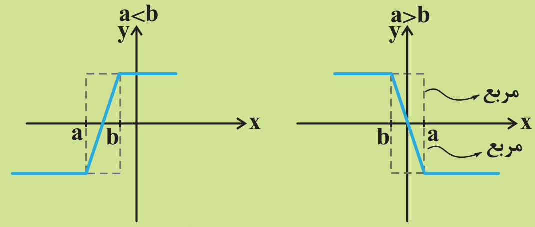


که مشاهده می‌شود این نمودار در بازهٔ $(-۱,۲)$ اکیداً صعودی است.

۴۸٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که تنها با رسم نمودار آبشاری و دانستن مفهوم یکنوایی قابل حل است.

نکته

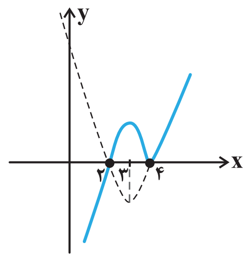
ضابطهٔ نمودار آبشاری در حالت کلی به صورت: $y=|x-a|-|x-b|$ است که نمودار آن به صورت زیر قابل رسم است.



توجه: در صورتیکه خواسته سؤال به جای اکیداً صعودی، صعودی باشد جواب کل $\mathbb{R}$ می‌شود.

۱۱ گزینهٔ «۳»

با بازه‌بندی و رسم نمودار $f(x)$ داریم:



$$f(x)=\begin{cases}(x-۲)(x-۴) & x\ge ۴\\ -(x-۲)(x-۴) & x<۴\end{cases}$$

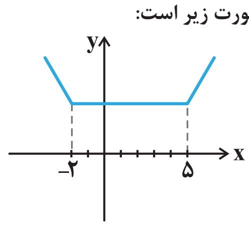
که مشاهده می‌شود تابع در بازهٔ $[۳,۴]$ نزولی است یعنی داریم:

$$a=۳, b=۴ \Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{۴}{۳}$$

۵۲٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که تنها کار لازم بازه‌بندی قدرمطلق و رسم تابع دو ضابطه‌ای است.

۱۲ گزینهٔ «۴»

نمودار تابع f داده شده، نمودار گلدانی به صورت زیر است:



که مشاهده می‌شود در $x\ge ۵$ اکیداً صعودی است پس داریم:

$$x\ge ۵: f(x)=|\underbrace{x+۲}_{+}|+|\underbrace{x-۵}_{+}|=۲x-۳$$

حال برای یافتن محل تلاقی f و g داریم:

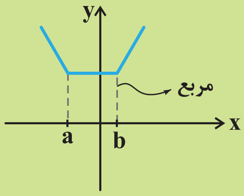
$$f(x)=g(x)\Rightarrow ۶x^۲+۵x+۱=۲x-۳\Rightarrow ۶x^۲+۳x+۴=۰$$

$$\Rightarrow \Delta=۹-۴(۶)(۴)=-۸۷<۰\rightarrow \text{ریشه ندارد}$$

۳۴٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که تنها با رسم نمودار گلدانی و شناسایی بازه‌ای که در آن نمودار اکیداً صعودی است، قابل حل است.

نکته

نمودار تابع گلدانی به فرم کلی $y=|x-a|+|x-b|$ به صورت زیر می‌باشد:



۱۳ گزینهٔ «۴»

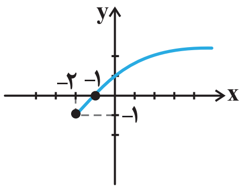
برای تعریف شده بودن عبارت داده شده کافیست $xf(x)>۰$ باشد. ابتدا نمودار f را رسم می‌کنیم که همان نمودار $\sqrt{x}$ است که ۲ واحد به چپ و ۱ واحد به پایین رفته است:

$$f(x)=\sqrt{x+۲}-۱$$

$\sqrt{x+۲}-۱=۰$: محل تلاقی با محور xها

$$\Rightarrow \sqrt{x+۲}=۱$$

$$\Rightarrow x+۲=۱\Rightarrow x=-۱$$



حال برای آنکه $xf(x)>۰$ باشد، لازم است که f و x یا هر دو مثبت یا هر دو منفی باشند که با توجه به شکل داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\text{هر دو مثبت } x \text{ و } f\rightarrow (۰,+\infty)\\ \text{هر دو منفی } x \text{ و } f\rightarrow [-۲,-۱)\end{array}\right\}\Rightarrow D_y=[-۲,-۱)\cup(۰,+\infty)$$

۴۶٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که تنها کار لازم رسم نمودار f و یافتن قسمت‌هایی است که زیر رادیکال مثبت است.

۱۴ گزینهٔ «۳»

به یافتن مرحله به مرحله مقادیر می‌پردازیم:

$$g(۱-\sqrt{۲})=|۱-\sqrt{۲}|=\sqrt{۲}-۱\Rightarrow f(g(۱-\sqrt{۲}))=f(\sqrt{۲}-۱)$$

$$=\left[\frac{۱}{\underbrace{\sqrt{۲}-۱}_{\simeq ۰/۴}}\right]=[۲.۵]=۲$$

$$f(۱-\sqrt{۲})=\left[\frac{۱}{\underbrace{۱-\sqrt{۲}}_{\simeq -۰/۴}}\right]=[-۲.۵]=-۳$$

$$\Rightarrow g(f(۱-\sqrt{۲}))=g(-۳)=|-۳|=۳$$

$$\Rightarrow ۲-۳=-۱$$

۴۸٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که تنها کار لازم برای به جواب رسیدن این سؤال چهار بار جایگذاری نسبتاً ساده می‌باشد.

۱۵ گزینهٔ «۴»

با داشتن ضابطه $f(x)$ و جایگذاری نام تابع $g(x)$ در آن ضابطهٔ $f(g(x))$ را تشکیل می‌دهیم.

$$f(x)=۳x+۴\Rightarrow f(g(x))=۳g(x)+۴=۳x^۲-۶x-۵$$
$$\Rightarrow ۳g(x)=۳x^۲-۶x-۹$$
$$\xrightarrow{\div ۳} g(x)=x^۲-۲x-۳\Rightarrow g(۲)=۴-۴-۳=-۳$$

۶۹٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که سؤال صرفاً با مفهوم تابع مرکب و نیز با عددگذاری ساده قابل حل است هم‌چنین مشابه این سؤال بسیار زیاد در تمرینات کتاب درسی وجود دارد.

نکته

در چنین سؤالاتی که حاصل $f(g(x))$ و $f(x)$ را داریم و می‌خواهیم $g(x)$ را بدست آوریم: ابتدا نام $g(x)$ را در f داده شده جایگذاری می‌کنیم و سپس آن را با $f(g(x))$ داده شده مساوی قرار داده و $g(x)$ را می‌یابیم.

می‌توان با عددگذاری نیز به صورت زیر عمل کرد:

$$f(g(۲))=۱۲-۱۲-۵=-۵$$
$$f(x)=۳x+۴=-۵\Rightarrow x=-۳\rightarrow g(۲)=-۳$$

۱۶ گزینهٔ «۴»

با ساده‌سازی اطلاعات خواسته شده داریم:

$$gof(a)=۱۵\Rightarrow g(\underbrace{f(a)}_{*})=۱۵$$
$$g(*)=۱۵\Rightarrow g(*)=۲f(*+۲)-۳=۱۵$$
$$\Rightarrow ۲f(*+۲)=۱۸\Rightarrow f(*+۲)=۹$$
$$\xrightarrow{f(۶)=۹} *+۲=۶\Rightarrow *=۴$$
$$\Rightarrow f(a)=۴\xrightarrow{f(۳)=۴} a=۳$$

۳۷٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که اگرچه محاسبات پیچیده است اما صرفاً با مفهوم تابع مرکب حل می‌شود.

نکته

اگر در این سؤال در ضابطهٔ $g(x)$ عبارت $f(a)$ را جایگذاری کنیم ظاهر عبارت بسیار پیچیده خواهد بود پس چنین تغییر متغیرهایی $(f(\alpha)=*)$ بسیار کارساز است.

۱۷ گزینهٔ «۱»

با توجه به اینکه در ماشین داده شده x ابتدا در f و سپس حاصل آن در g قرار می‌گیرد، ماشین داده شده مربوط به تابع gof است یعنی داریم:

$$gof(x)=x\sqrt{x}+\sqrt{x}\xrightarrow{f(x)=\sqrt{x}} g(\sqrt{x})=x\sqrt{x}+\sqrt{x}$$
$$\xrightarrow{x\sqrt{x}=(\sqrt{x})^۳} g(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^۳+\sqrt{x}$$
$$\xrightarrow{\sqrt{x}=t} g(t)=t^۳+t$$
$$\Rightarrow g(x)=x^۳+x=x(x^۲+۱)$$

۳۴٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که دانش‌آموز با دانستن مفهوم دستگاه فوق و جایگذاری ساده می‌تواند به جواب برسد.

نکته

دستگاه به فرم $*\Rightarrow \boxed{g}\Rightarrow \boxed{f}\Rightarrow x$ نمایانگر تابع $g(f(x))=*$ است.

۱۸ گزینهٔ «۳»

ابتدا برای یافتن تابع $۲g$، x های تابع g را ثابت نگه داشته و y ها را ۲ برابر می‌کنیم.

$$۲g=\{(۳,۴),(۲,۲),(۴,۱۰),(۱,۶)\}$$

حال برای یافتن تابع $fo(۲g)$، چون x ابتدا در تابع $۲g$ قرار می‌گیرد، دامنهٔ $۲g$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

$$x=۳\Rightarrow fo(۲g)(۳)=f(۴)=۷\Rightarrow (۳,۷)$$
$$x=۲\Rightarrow fo(۲g)(۲)=f(۲)=۵\Rightarrow (۲,۵)$$
$$x=۴\Rightarrow fo(۲g)(۴)=f(۱۰)\quad \text{(تعریف‌نشده)}$$
$$x=۱\Rightarrow fo(۲g)(۱)=f(۶)=۳\Rightarrow (۱,۳)$$

پس داریم:

$$fo(۲g)=\{(۳,۷),(۲,۵),(۱,۳)\}\Rightarrow R_{fo(۲g)}=\{۷,۵,۳\}$$

۴۸٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که کافیست دانش‌آموز نحوه تشکیل fog از روی زوج مرتب‌ها را بلد باشد.

نکته

برای بدست آوردن اعضای تابع $۲g$ کافیست x های تابع g را ثابت نگه داشته و فقط y ها را دو برابر کرد.

برای تشکیل تابع مرکب fog اگر f و g به شکل زوج مرتب باشند کافیست x های دامنهٔ g را در تابع جایگذاری کرده و در صورت تعریف شده بودن y های f را به عنوان جواب بنویسیم.

۱۹ گزینهٔ «۴»

برای تشکیل ضابطهٔ $g(f(x))$، ضابطهٔ $f(x)$ را در $g(x)$ جایگذاری می‌کنیم:

$$g(f(x))=\frac{۲(\frac{۲x-۱}{x+۱})+۲}{۲-\frac{۲x-۱}{x+۱}}=\frac{\frac{۴x-۲+۲x+۲}{\cancel{x+۱}}}{\frac{۲x+۲-۲x+۱}{\cancel{x+۱}}}=\frac{۶x}{۳}=۲x$$

۴۵٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که روش تشریحی با وجود کمی زمان‌بر بودن، بسیار مسیر واضح و مشخصی دارد و در صورت عدد گذاری نیز بسیار سریع و کوتاه‌تر قابل حل است.

نکته

می‌توان با عددگذاری نیز این سؤال را به صورت زیر حل کرد:

$$x=۲\Rightarrow g(f(۲))=g(۱)=۴\rightarrow \text{گزینه } ۴$$

۲۰ گزینهٔ «۲»

برای یافتن دامنهٔ تابع fog از روی تعریف ابتدا دامنهٔ f و g را می‌یابیم:

$$D_f : x+1 \geq 0 \Rightarrow x \geq -1 \qquad D_g : x \geq 0$$

حال داریم:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\}$$

$$= \{x \geq 0 \mid \underbrace{-|\sqrt{x}+1|+2 \geq -1}_{|\sqrt{x}+1| \leq 3 \Rightarrow -3 \leq \sqrt{x}+1 \leq 3 \xrightarrow{-1} \underbrace{-4 \leq \sqrt{x}}_{\text{همواره برقرار}} \leq 2 \xrightarrow{\text{توان ۲}} x \leq 4}\} = [0,4]$$

٪۴۱ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که کافیست فقط تعریف دامنه fog را بلد باشیم.

نکته

هنگام یافتن دامنه fog بهتر است دامنهٔ f و g را در صورتی که به شکل $[a,b]$ باشند به حالت $a \leq x \leq b$ و اگر به صورت $R-\{a\}$ باشند، به شکل $x \neq a$ بنویسیم.

در قسمت دوم تعریف دامنه fog یعنی $g(x) \in D_f$ باید ضابطهٔ g را در شرایط دامنه f قرار دهیم و نامعادلهٔ ایجاد شده را حل کنیم.

۲۱ گزینهٔ «۱»

با تشکیل ضابطهٔ gof داریم:

$$g(f(x)) = (\sqrt{2+x})^2 = x+2 = 5 \rightarrow x = 3$$

٪۴۳ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که ضابطه $g(f(x))$ بسیار ساده تشکیل می‌شود و معادله درجه ۱ بسیار ساده بدست می‌آید.

۲۲ گزینهٔ «۱»

با تشکیل ضابطهٔ fog داریم:

$$f(x) = 3x-2 \Rightarrow fog = 3g(x)-2 = \frac{x^2+1}{x+1}$$

$$\xrightarrow{x=1} 3g(1)-2 = 1 \Rightarrow 3g(1) = 3 \Rightarrow g(1) = 1$$

٪۳۹ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که روش تشریحی بسیار ساده و کم محاسباتی دارد که با عددگذاری به مراتب ساده‌تر هم حل می‌شود.

نکته

می‌توان بدون تشکیل fog به صورت زیر با عددگذاری حل کرد:

$$fog(1) = 1 \rightarrow f(x) = 3x-2 = 1 \rightarrow x = 1$$

۲۳ گزینهٔ «۲»

با تشکیل اعضای تابع gof داریم:

$$gof = \left\{(-2,\sin(-\frac{\pi}{2})),(-1,\sin(\pi)),(2,\sin(\frac{\pi}{2})),(3,\sin(\frac{5\pi}{2}))\right\}$$

$$= \{(-2,-1),(-1,0),(2,1),(3,1)\}$$

مشاهده می‌شود که با افزایش مقادیر x، مقادیر y افزایش می‌یابد یا ثابت می‌ماند پس تابع gof تابعی صعودی است (نه صعودی اکید)

٪۵۱ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که تنها کار لازم تشکیل زوج مرتب‌های gof و بررسی روند تغییرات y با افزایش x است.

۲۴ گزینهٔ «۲»

ابتدا در نظر می‌گیریم که دامنهٔ $f(x)$ همان $x \neq 1$ است.حال با استفاده از تعریف دامنهٔ تابع مرکب داریم:

$$D_{fof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_f\}$$

$$= \left\{x \neq 1 \mid \underbrace{\frac{1}{x-1} \neq 1}_{x-1 \neq 1 \Rightarrow x \neq 2}\right\} = R-\{1,2\}$$

٪۳۲ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که تنها کار لازم یافتن دامنه f و اجرای تعریف دامنهٔ تابع مرکب است.

۲۵ گزینهٔ «۲»

با اعمال تغییرات گفته شده به صورت مرحله به مرحله و ساده‌سازی ضابطه داریم:

$$y = x^2 \xrightarrow{\text{۲واحد راست}} y = (x-2)^2 \xrightarrow{\text{۳واحد پایین}} y = (x-2)^2 - 3$$

$$\xrightarrow{\text{ساده‌سازی}} y = x^2 - 4x + 1$$

٪۴۲ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که دانش‌آموز با دانستن قوانین ساده انتقال، اعمال آنها و ساده‌سازی ضابطه می‌تواند به راحتی به جواب برسد.

نکته

طبق قوانین انتقال می‌دانیم که جمع و تفریق شدن عددی با x به صورت معکوس عمل می‌کند یعنی اگر x با عددی جمع شود نمودار تابع به سمت چپ و اگر با عددی تفریق شود نمودار تابع به سمت راست می‌رود اما جمع و تفریق شدن عدد با کل ضابطه یا همان $f(x)$ به صورت مستقیم تأثیر می‌گذارد یعنی اگر جمع شود نمودار تابع به سمت بالا و اگر تفریق شود نمودار تابع به سمت پایین منتقل می‌شود.

۲۶ گزینهٔ «۴»

مشاهده می‌شود که نمودار تابع g همان نمودار تابع f است که ۱ واحد به چپ رفته، نسبت به محور x ها قرینه شده و عرض‌هایش دو برابر شده است یعنی داریم:

$$f(x) \xrightarrow{\text{۱واحد چپ}} f(x+1) \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به محورxها}} -f(x+1)$$

$$\xrightarrow[\text{عرض‌ها}]{\text{۲برابرشدن}} -2f(x+1) = g(x)$$

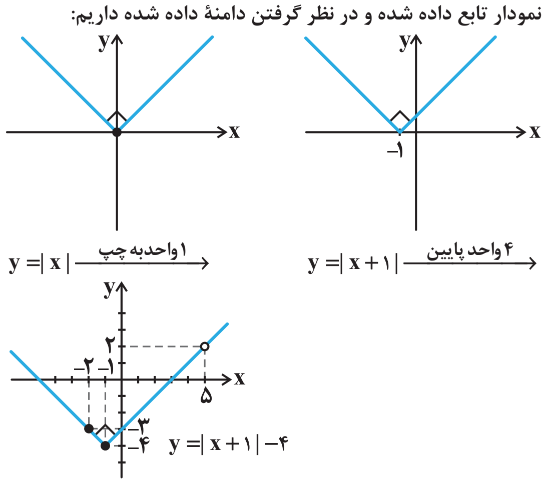
٪۴۹ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که تنها اطلاعات لازم آشنایی با قوانین سادهٔ انتقال‌ها می‌باشد.

نکته

در سؤالات مربوط به انتقال نمودارها بهتر است ابتدا موارد مربوط به x را اعمال کرده سپس موارد مربوط به $f(x)$ را اجرا کنیم.

۲۷ گزینهٔ «۳»

با رسم نمودار تابع داده شده و در نظر گرفتن دامنهٔ داده شده داریم:



$f(-۲) = -۳$

مشاهده می‌شود که برد تابع داده شده در بازهٔ موردنظر برابر $[-۴,۲)$ است.

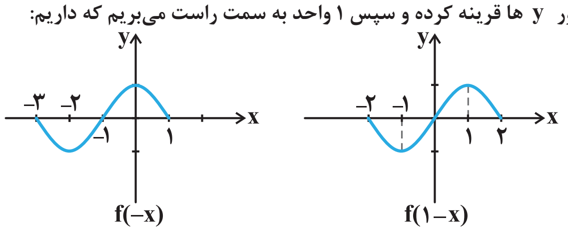
۴۲٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که با دانستن نمودار $y=|x|$ و اعمال دو مرحله انتقال ساده می‌توان نمودار تابع موردنظر را رسم کرد و برد را بدست آورد.

نکته

اگر تابعی در یک بازه غیریکنوا باشد نمی‌توان با جایگذاری ابتدا و انتهای دامنه، ابتدا و انتهای برد را بدست آورد.

۲۸ گزینهٔ «۴»

برای رسم نمودار $f(۱-x)$ یا همان $f(-(x-۱))$ ابتدا نمودار را نسبت به محور y ها قرینه کرده و سپس ۱ واحد به سمت راست می‌بریم که داریم:



که مشاهده می‌شود نمودار فوق در بازهٔ $[-۲,-۱]$ و $[۱,۲]$ اکیداً نزولی است.

۴۷٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که انجام تنها دو مرحله انتقال و مشاهده بازه‌ای که اکیداً نزولی است. برای حل سؤال لازم است.

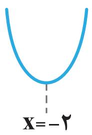
نکته

در انتقال نمودارها اگر x ضریبی داشته باشد هنگام اجرای جابجایی افقی لازم است اول از ضریب x فاکتور بگیریم تا بدانیم خود x با چه عددی جمع یا تفریق شده است.

۲۹ گزینهٔ «۲»

با یافتن رأس سهمی و رسم شکل تقریبی آن داریم:

$$y = x^{۲}+۴x+۳ \Rightarrow x_{\text{رأس}} = -\frac{b}{۲a} = \frac{-۴}{۲} = -۲$$



مشاهده می‌شود که سهمی فوق در هر بازه‌ای که شامل x رأس نباشد یک به یک است که بازهٔ $(-۲,۰)$ چنین شرایطی را دارد.

۲۸٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که تنها کار لازم یافتن رأس و رسم نمودار تقریبی سهمی می‌باشد.

نکته

سهمی در حالت کلی یک به یک نیست اما در بازه‌ای که بعد رأس یا قبل رأس باشد، یک به یک است.

۳۰ گزینهٔ «۱»

می‌دانیم تابعی وارون پذیر است که یک به یک باشد و در تابع یک به یک برای هر x، یک y منحصر به فرد و برای هر y نیز یک x منحصر به فرد باید موجود باشد پس داریم:

$$(b,۴b),(۲,۴b) \Rightarrow b=۲$$

$$(a,b),(a,۲a+۴) \Rightarrow ۲a+۴=b \Rightarrow ۲a+۴=۲ \Rightarrow a=-۱$$

۴۸٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که دانش‌آموز صرفاً با دانستن مفهوم تابع یک به یک می‌تواند به جواب برسد.

نکته

تابعی وارون پذیر است که یک به یک باشد.
در نمودار وِن تابع یک به یک از هر عضو بیضی اول باید دقیقاً یک پیکان خارج شود و به هر عضو بیضی دوم حداکثر یک پیکان وارد شود.

۳۱ گزینهٔ «۱»

برای یافتن ضابطه وارون، x را برحسب y بدست می‌آوریم:

$$y=-\sqrt{x+۴}-۳ \Rightarrow -\sqrt{x+۴}=y+۳ \xrightarrow{\text{توان ۲}} x+۴=y^{۲}+۶y+۹$$

$$\Rightarrow x=y^{۲}+۶y+۵ \xrightarrow{\text{جای } x,y \text{ را عوض می‌کنیم}} y^{-۱}=x^{۲}+۶x+۵$$

حال دامنه تابع $f^{-۱}$ را به‌دست می‌آوریم: $D_{f^{-۱}} = R_f$

$$R_f : \sqrt{x+۴} \geq ۰ \Rightarrow -\sqrt{x+۴} \leq ۰$$

$$\Rightarrow -\sqrt{x+۴}-۳ \leq -۳$$

$$\Rightarrow D_{f^{-۱}} : x \leq -۳$$

٪۳۸ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که با عددگذاری بسیار ساده و سریع قابل حل است.

۳۲ گزینهٔ «۴»

برای یافتن $g^{-1}(3)$ در تابع $g(x)$ به جای y، ۳ جایگذاری می‌کنیم که داریم:

$$g(1)=3 \Rightarrow g^{-1}(3)=1 \Rightarrow f^{-1}(2g^{-1}(3))=f^{-1}(2)=\sqrt{9}=3$$

٪۳۶ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که با ۲ مرحله جایگذاری ساده سؤال قابل حل است.

نکته

برای یافتن $g^{-1}(3)$ نیازی به یافتن ضابطهٔ g^{-1} نیست می‌توان در خود g به جای y، ۳ جایگذاری کرد و x را یافت.

۳۳ گزینهٔ «۱»

با توجه به نمودار f^{-1} داریم:

$$\begin{cases} f^{-1}(a)=\frac{1}{4} \Rightarrow f(\frac{1}{4})=a \Rightarrow f(\frac{1}{4})=\frac{1}{2}-4=-\frac{7}{2}=a \\ f^{-1}(0)=b \Rightarrow f(b)=0 \Rightarrow \sqrt{b}-\frac{1}{b}=0 \Rightarrow \sqrt{b}=\frac{1}{b} \Rightarrow b\sqrt{b}=1 \\ \qquad \Rightarrow b=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow a+b=-\frac{7}{2}+1=-\frac{5}{2}$$

٪۶۹ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که تنها با شناسایی ۲ نقطه داده شده روی نمودار و معکوس کردن آنها و جایگذاری قابل حل است.

نکته

در چنین سؤالاتی لزومی به رسم نمودار f نیست می‌توان نقاط مشخص روی f^{-1} را شناسایی کرد و با عوض کردن جای y و x مختصات نقاط متناظر را روی f بدست آورد.

۳۴ گزینهٔ «۲»

با ساده سازی اطلاعات داده شده داریم:

$$(gof^{-1})(a)=1 \Rightarrow g(f^{-1}(a))=1$$

با توجه به اینکه $(0,1)$ عضو g است یعنی $g(0)=1$، داریم:

$$f^{-1}(a)=0 \Rightarrow f(0)=a \xrightarrow{f(0)=2} a=2$$

حال داریم:

$$fog(-a)=fog(-2)=f(\underbrace{g(-2)}_{0})=f(0)=2$$

٪۴۱ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که دانش‌آموز، تنها با در نظر گرفتن نکات سادهٔ فوق و مقایسه نتایج با زوج مرتب‌های داده شده می‌تواند به جواب درست برسد.

نکته

نوشتن عبارت $fog(x)$ به صورت $f(g(x))$ در قابل فهم بودن سؤال بسیار مهم است.

دانش‌آموز باید همواره به تبدیل عبارت $f(a)=b$ به عبارت $f^{-1}(b)=a$ و بالعکس مسلط باشد.

۳۵ گزینهٔ «۱»

ابتدا ضابطه‌های f^{-1} و g^{-1} را می‌یابیم:

$$f(x)=\sqrt{x} \Rightarrow y=\sqrt{x} \Rightarrow x=y^2$$

$$\Rightarrow f^{-1}(x)=x^2,\ D_{f^{-1}}=R_f=[0,+\infty)$$

$$g^{-1}=\{(4,-1),(-2,4),(-3,3),(-1,-2)\}$$

$$\Rightarrow D_{g^{-1}}=\{4,-2,-3,-1\}$$

حال داریم:

$$D_{f^{-1}+g^{-1}}=D_{f^{-1}} \cap D_{g^{-1}}=\{4\}$$

پس این تابع فقط از یک زوج مرتب تشکیل شده است.

٪۵۱ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که کافیست دانش‌آموز f^{-1} و g^{-1} را یافته و اشتراک دامنه آنها را یافته و $f^{-1}+g^{-1}$ را در اعضای مشترک تشکیل دهد.

نکته

تابع $f+g$ در x هایی تعریف شده است که در دامنهٔ هر دو تابع، موجود باشند یعنی:

$$D_{f+g}=D_f \cap D_g$$

۳۶ گزینهٔ «۲»

می‌دانیم که $f^{-1}og^{-1}$ همان معادل $(gof)^{-1}$ است. حال توجه می‌کنیم این تابع در هر مقداری که محور طول‌ها را قطع کند وارون آن در همان مقدار محور عرض‌ها را قطع می‌کند. پس به یافتن محل تلاقی gof با محور عرض‌ها یعنی $gof(0)$ می‌پردازیم:

$$gof(0)=g(4)=2(4)-5=3$$

٪۴۹ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که تنها با ۲ بار جایگذاری ساده قابل حل است.

نکته

وارون تابع مرکب به صورت مقابل می‌باشد:

$(fog)^{-1}(x)=g^{-1}of^{-1}(x)$ طول از مبدأ f همان عرض از مبدأ f^{-1} است.

فصل ۲: مثلثات

۳۷ گزینهٔ «۳»

ابتدا ضابطه تابع را ساده‌سازی می‌کنیم:

$$y=a\sin\pi(\frac{۱}{۲}+bx)\Rightarrow y=a\sin(\frac{\pi}{۲}+b\pi x)\Rightarrow y=a\cos b\pi x$$

حال باتوجه به نمودار داریم:

$$|a|=۲\Rightarrow a=\pm۲\ ,\ T=\frac{۲\pi}{|b\pi|}=\frac{۸}{۴}=۲$$

$$\Rightarrow\frac{۲}{|b|}=۲\Rightarrow b=\pm۱$$

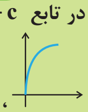
در نتیجه:

$$ab=(\pm۲)\times(\pm۱)=\pm۲$$

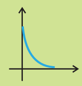
۳۸٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که مشابه با تمرینات کتاب درسی می‌باشد.

نکته

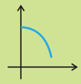
در تابع $y=a\sin bx+c$ اگر نمودار در $x=۰$ به سمت بالا برود



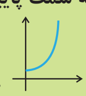
، $ab>۰$ و اگر نمودار در $x=۰$ به سمت پایین برود



$ab<۰$ خواهد بود. در تابع $y=a\cos bx+c$ اگر نمودار در



$x=۰$ به سمت پایین بیاید $a>۰$ و اگر نمودار در این نقطه



بالا بیاید $a<۰$ خواهد بود. در این تابع b همواره هم مثبت و هم منفی می‌تواند باشد.

۳۸ گزینهٔ «۳»

با توجه به گزینه‌ها فرم کلی تابع یا $y=a\sin bx+c$ یا $y=a\cos bx+c$ خواهد بود. پس با توجه به مفروضات داریم:

$$\max=\min+۵\Rightarrow|a|+c=-|a|+c+۵\Rightarrow ۲|a|=۵\Rightarrow|a|=\frac{۵}{۲}$$

پس گزینه‌های ۱ و ۴ نمی‌توانند صحیح باشند.

$$T=\frac{۱}{۳}\Rightarrow\frac{۲\pi}{|b|}=\frac{۱}{۳}\Rightarrow|b|=۶\pi$$

پس گزینهٔ ۲ نیز غیرقابل قبول است.

۲۸٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که مشابه با تمرینات کتاب درسی می‌باشد.

نکته

در فرم کلی توابع $y=a\sin bx+c$ و $y=a\cos bx+c$ ، برای $\max$ ، $\min$ و دورهٔ تناوب تابع داریم:

$$\max=|a|+c$$

$$\min=-|a|+c\qquad T=\frac{۲\pi}{|b|}\qquad c=\frac{\max+\min}{۲}$$

۳۹ گزینهٔ «۱»

به کمک نمودار تابع، مقادیر a و b را به‌دست می‌آوریم:

چون نمودار تابع f شکل $y=\sin x$ را حفظ کرده است. بنابراین نتیجه می‌گیریم که $ab>۰$، حال داریم:

$$|a|=۲\Rightarrow a=\pm۲$$

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=۴\pi\Rightarrow|b|=\frac{۱}{۲}\Rightarrow b=\pm\frac{۱}{۲}$$

$$ab=|(\pm۲)\times(\pm\frac{۱}{۲})|=۱$$

۲۱٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که مفاهیم اولیه توابع مثلثاتی است.

۴۰ گزینهٔ «۲»

با توجه به نمودار داده شده از ۰ تا ۶π یک دورهٔ تناوب کامل مشاهده می‌کنیم، پس $T=۶\pi$ است.

$$\frac{۲\pi}{|a|}=۶\pi\rightarrow|a|=\frac{۱}{۳}$$

$$\max=۱۸=|b|+۰\Rightarrow|b|=۱۸$$

چون تابع سینوسی است و نمودار در $x=۰$ به سمت پایین حرکت کرده است، $ab<۰$ است. پس دو حالت پیش می‌آید.

$$۱)a>۰,b<۰\Rightarrow a+b=\frac{۱}{۳}-۱۸=-\frac{۵۳}{۳}$$

$$۲)a<۰\ ,\ b>۰\Rightarrow a+b=-\frac{۱}{۳}+۱۸=\frac{۵۳}{۳}$$

پس کمترین مقدار عبارت $-\frac{۵۳}{۳}$ خواهد بود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱: اگر به کلمهٔ حداقل دقت نمی‌کردیم، ممکن بود این گزینه انتخاب شود.

۴۷٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که مشابه با مثال‌های کتاب درسی می‌باشد.

۴۱ گزینهٔ «۴»

در شکل داده شده از ۰ تا ۲π نصف یک دورهٔ تناوب کامل را مشاهده می‌کنیم، پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{T}{۲}=۲\pi\Rightarrow T=۴\pi\\ \text{طبق نکات}: T=\frac{۲\pi}{|b|}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{۲\pi}{|b|}=۴\pi\Rightarrow|b|=\frac{۱}{۲}$$

$$\max_{\text{طبق شکل}}=۲=|a|+۰\Rightarrow|a|=۲$$

چون نمودار سینوسی است و نمودار در $x=۰$ به سمت بالا رفته است، $ab>۰$ خواهد بود.

$$\Rightarrow ab=۲\times\frac{۱}{۲}=۱$$

۳۸٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که حجم محاسبات کم است.

۴۲ گزینهٔ «۳»

طبق رابطهٔ اصلی مثلثات $(\sin^2 x+\cos^2 x=1)$ داریم:

$$f(x)=\sqrt{1-\cos^2 x}=\sqrt{\sin^2 x}=|\sin x|$$

بنابر نکته زیر $T=\frac{\pi}{1}=\pi$ خواهد بود.

٪۴۴ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که حجم محاسبات کم می‌باشد.

نکته

دورهٔ تناوب توابع $y=a\sin^2 bx$ ، $y=a\cos^2 bx$ ، $y=a|\sin bx|$ و $y=a|\cos bx|$ برابر است با:

$$T=\frac{\pi}{|b|}$$

۴۳ گزینهٔ «۴»

از $x=0$ تا $x=5$ دو دورهٔ تناوب کامل مشاهده می‌کنیم، پس داریم:

$$\left.\begin{array}{l} 2T=5\Rightarrow T=\frac{5}{2} \\ \text{طبق نکته}: T=\frac{\pi}{|b\pi|} \end{array}\right\}\Rightarrow \frac{\pi}{|b\pi|}=\frac{5}{2}\Rightarrow |b|=\frac{2}{5}$$

چون در $x=0$ نمودار به سمت پایین رفته است، $ab<0$ است. پس دو حالت پیش می‌آید.

$1)\ a>0\ ,\ b=-\frac{2}{5}$

$2)\ a<0\ ,\ b=+\frac{2}{5}$

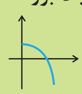
پس فقط گزینهٔ ۴ می‌تواند صحیح باشد.

٪۵۳ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که محاسبات آن کم می‌باشد.

نکته

دوره تناوب تابع $y=a\tan bx+c$ برابر $T=\frac{\pi}{|b|}$ است. اگر نمودار در $x=0$ به سمت بالا برود

$ab>0$ و اگر در $x=0$ ، نمودار به سمت پایین برود



$ab<0$ است.

۴۴ گزینهٔ «۴»

$$\sin(\underbrace{\tfrac{\pi}{2}}_{\text{ضریب فرد}}+\alpha)=\underbrace{+}_{\text{sin در ناحیه دوم مثبت است}}\cos\alpha=-\frac{1}{3}\Rightarrow \cos\alpha=-\frac{1}{3}$$

طبق نکتهٔ زیر از رابطهٔ دوم استفاده می‌کنیم:

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1=2\times(-\frac{1}{3})^2-1=\frac{2}{9}-1=-\frac{7}{9}$$

٪۴۹ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که حجم محاسبات کم و مشابه با تمرینات کتاب درسی است.

نکته

تسلط به روابط زیر لازم است:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

۴۵ گزینهٔ «۱»

$$\cos(\underbrace{\tfrac{3\pi}{2}}_{\text{ضریب فرد}\ \frac{\pi}{2}}-2\alpha)=\underbrace{-}_{\text{cos در ناحیه سوم منفی است}}\sin 2\alpha$$

رابطهٔ داده شده را با توجه به نکته موردنظر، به توان ۲ می‌رسانیم:

$$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=(\frac{1}{2})^2\Rightarrow \underbrace{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}_{1}-\underbrace{2\sin\alpha\cos\alpha}_{\sin 2\alpha}=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

$$\Rightarrow \cos(\frac{3\pi}{2}-2\alpha)=-\sin 2\alpha=-\frac{3}{4}$$

٪۴۶ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که مشابه با کنکورهای سال‌های گذشته است.

نکته

هرگاه مجموع یا تفاضل $\sin\alpha$ و $\cos\alpha$ دو زاویه را داشته باشیم و بخواهیم نسبت‌های مثلثاتی 2α را بدست آوریم، باید رابطه اولیه را به توان ۲ برسانیم.

۴۶ گزینهٔ «۲»

ابتدا تابع f و g را در هم ضرب می‌کنیم تا تابع $f.g$ بدست آید. با توجه به اتحاد مزدوج داریم:

$$(f.g)(x)=f(x)\times g(x)=(\sin x-\cos x)(\sin x+\cos x)$$

$$=\sin^2 x-\cos^2 x\Rightarrow (f.g)(x)=-(\underbrace{\cos^2 x-\sin^2 x}_{\cos 2x})=-\cos 2x$$

پس طبق نکات گفته شده برای دورهٔ تناوب تابع موردنظر داریم:

$$T=\frac{2\pi}{|2|}=\pi$$

٪۴۹ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که حجم محاسبات کم است.

۴۷ گزینهٔ «۳»

$$\tan(\frac{\pi}{2}+x)=\frac{2}{5}\Rightarrow -\cot x=\frac{2}{5}\Rightarrow \tan x=-\frac{5}{2}$$

حال به کمک نکته زیر داریم:

$$\sin 2x=\frac{2(-\frac{5}{2})}{1+\frac{25}{4}}=\frac{-5}{\frac{29}{4}}=-\frac{20}{29}$$

نکته

$$\sin ۲\alpha = \frac{۲\tan\alpha}{۱+\tan^{۲}\alpha} \ , \ \cos ۲\alpha = \frac{۱-\tan^{۲}\alpha}{۱+\tan^{۲}\alpha}$$

۴۸ گزینهٔ «۱»

طول نقاط ماکزیمم و مینیمم تابع $y = ۱-۲\sin x$ همان طول نقاط مینیمم و ماکزیمم تابع $y=\sin x$ است که به دلیل وجود ضریب منفی جابه‌جا شده‌اند. پس نقطه‌ی A همان اولین مینیمم تابع $y=\sin x$ قبل از صفر یعنی در $x=-\frac{\pi}{۲}$ است، پس مختصات نقطه‌ی A برابر است با:

$$y = ۱-۲\sin(-\frac{\pi}{۲}) = ۱+۲ = ۳ \to A(-\frac{\pi}{۲}, ۳)$$

نقطه‌ی B دومین محل برخورد تابع با محور x ها بعد از صفر است، پس:

$$y=۰ \Rightarrow ۱-۲\sin x = ۰ \Rightarrow \sin x = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \begin{cases} x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۶} \\ x = ۲k\pi + \frac{۵\pi}{۶} \end{cases}$$

k	-۱	۰	۱
x	$-\frac{۱۱\pi}{۶}, -\frac{۷\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶}$	$\frac{۱۳\pi}{۶}, \frac{۱۷\pi}{۶}$

↑ نقطه‌ی B

$$\Rightarrow B(\frac{۵\pi}{۶}, ۰)$$

$$\Rightarrow m_{AB} = \frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{۳-۰}{-\frac{\pi}{۲}-\frac{۵\pi}{۶}} = \frac{۳}{-\frac{۸\pi}{۶}} = -\frac{۹}{۴\pi}$$

٪۴۱ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که حجم محاسبات کم است.

نکته

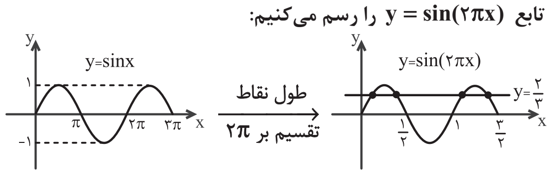
برای مقایسه $\tan\alpha$ و $\sin\alpha$ بدانید هر جا $\tan\alpha$ مثبت باشد از $\sin\alpha$ بیشتر و هر جا $\tan\alpha$ منفی باشد از $\sin\alpha$ کمتر است.

۴۹ گزینهٔ «۱»

$$-۳\sin(۲\pi x)+۱ = -۱ \ : \text{معادله‌ی تلاقی}$$

$$\Rightarrow -۳\sin(۲\pi x) = -۲ \Rightarrow \sin(۲\pi x) = \frac{۲}{۳}$$

نمودار تابع $y = \sin(۲\pi x)$ را رسم می‌کنیم:



با توجه به نمودار، خط $y=\frac{۲}{۳}$ نمودار تابع $y=\sin(۲\pi x)$ را در چهار نقطه قطع می‌کند.

۵۰ گزینهٔ «۱»

می‌دانیم اگر $\alpha+\beta=\pi$ باشد، آن‌گاه $\sin\alpha = \sin\beta$، در این سؤال:

$$\frac{\pi}{۳}+x+(\frac{۲\pi}{۳}-x) = \pi \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{۳}+x) = \sin(\frac{۲\pi}{۳}-x)$$

بنابراین:

$$۳\sin(\frac{\pi}{۳}+x) = \frac{۳}{۲} \Rightarrow \sin(\frac{\pi}{۳}+x) = \frac{۱}{۲} = \sin\frac{\pi}{۶}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\pi}{۳}+x = ۲k\pi+\frac{\pi}{۶} \Rightarrow x = ۲k\pi - \frac{\pi}{۶} & (۱) \\ \frac{\pi}{۳}+x = ۲k\pi+\frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow x = ۲k\pi + \frac{\pi}{۲} & (۲) \end{cases}$$

در نتیجه در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$، ریشه‌های متمایز معادله $۲\pi-\frac{\pi}{۶}$ و $\frac{\pi}{۲}$ هستند.

٪۵۳ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که مفاهیم اولیه نسبت‌های مثلثاتی می‌باشد و حجم محاسبات کم است.

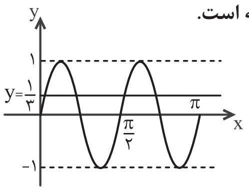
۵۱ گزینهٔ «۴»

$$\sin x\cos^{۳}x - \cos x\sin^{۳}x = \sin x\cos x(\cos^{۲}x - \sin^{۲}x)$$

$$= \frac{۱}{۲}\sin ۲x\cos ۲x = \frac{۱}{۴}\sin ۴x$$

پس معادله به فرم $\sin ۴x = \frac{۱}{۳}$ در می‌آید. نمودار $y=\sin ۴x$ از انقباض افقی نمودار $y=\sin x$ با ضریب ۴ به‌دست می‌آید.

در این‌صورت مطابق شکل مقابل، نمودارهای $y=\sin ۴x$ و $y=\frac{۱}{۳}$ در ۴ نقطه تلاقی دارند، پس معادله دارای ۴ ریشه است.



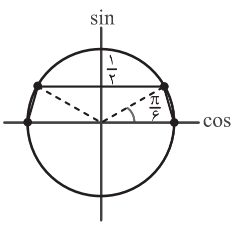
٪۱۸ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که با مفاهیم اولیه علامت عبارت‌ها (مثلثاتی) سؤال حل می‌شود.

۵۲ گزینهٔ «۳»

$$۲\sin^{۲}x = \sin x \Rightarrow ۲\sin^{۲}x - \sin x = ۰$$

$$\Rightarrow \sin x(۲\sin x - ۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \sin x = ۰ \\ \sin x = \frac{۱}{۲} \end{cases}$$

جواب معادلات بالا روی دایره‌ی مثلثاتی به صورت روبه‌روست که تشکیل ذوزنقه می‌دهند.



٪۲۷ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که مشابه با کنکورهای سال‌های گذشته است.

۵۳ گزینهٔ «۲»

برای یافتن محل برخورد دو تابع داده شده آن‌ها را برابر هم قرار می‌دهیم:

$$\tan x = \sqrt{۳}$$

اولین نقطه با طول مثبت که $\tan$ آن $\sqrt{۳}$ است، $\frac{\pi}{۳}$ می‌باشد. نقطهٔ M دومین نقطه با طول مثبت است که $\tan$ آن $\sqrt{۳}$ شده است. پس به اندازهٔ یک دورهٔ تناوب (π) از $\frac{\pi}{۳}$ باید جلوتر برویم.

$$x_M = \frac{\pi}{۳} + \pi = \frac{۴\pi}{۳}$$

۳۹٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که حجم محاسبات کم و مفاهیم اولیهٔ $\tan$ است.

فصل ۳: حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت

۵۴ گزینهٔ «۲»

عبارت $x^۲ - ۱$ به صورت $(x-۱)(x+۱)$ است. چون عبارت داده شده بر ضرب $(x+۱)$ و $(x-۱)$ بخش‌پذیر است، پس داریم:

$$۲x^۴ + ax^۳ + b = (x^۲ - ۱)q(x) + ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=۱ \Rightarrow ۲\times(۱)^۴ + a\times ۱^۳ + b = ۰ \Rightarrow a+b=-۲ \\ x=-۱ \Rightarrow ۲\times(-۱)^۴ + a\times(-۱)^۳ + b = ۰ \Rightarrow b-a=-۲ \end{cases} \overset{+}{\Rightarrow} ۲b=-۴$$

$$\Rightarrow b = -۲ \Rightarrow a = ۰ \Rightarrow (a,b) = (۰,-۲)$$

۳۸٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که با حل یک دستگاه دو معادله دو مجهول ساده، پاسخ بدست می‌آید.

نکته

برای یافتن باقی ماندهٔ چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x-a$، کافی است $f(a)$ را محاسبه کنیم.

$$f(x) = (x-a)q(x) + r \rightarrow r = f(a)$$

۵۵ گزینهٔ «۳»

چون $f(x)$ بر $x+۲$ بخش‌پذیر است، پس $f(-۲)=۰$ خواهد بود.

$$f(-۲) = ۰ \Rightarrow (-۲)^۲ - (-۲) + ۲ - ۲a = ۰$$

$$\Rightarrow ۴ + ۲ + ۲ - ۲a = ۰ \Rightarrow a = ۴$$

پس برای یافتن باقی ماندهٔ تقسیم $f(x)$ بر $x-۴$، باید $f(۴)$ را بیابیم.

$$f(x) = x^۲ - x + ۲ - ۸ = x^۲ - x - ۶$$

$$\Rightarrow f(۴) = ۴^۲ - ۴ - ۶ = ۱۶ - ۴ - ۶ = ۶$$

۳۷٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که با تسلط بر قضیهٔ تقسیم و مفاهیم آن به راحتی به پاسخ سوال می‌توان رسید.

۵۶ گزینهٔ «۴»

با توجه به اینکه $f(x)$ بر $x-۱$ بخش پذیر است، پس $f(۱)=۰$ و چون باقیماندهٔ $f(x)$ بر $x+۲$ برابر -۱۲ است، $f(-۲)=-۱۲$ است. پس داریم:

$$\begin{cases} f(۱) = ۰ \Rightarrow ۱ + a + b - ۴ = ۰ \Rightarrow a + b = ۳ \\ f(-۲) = -۱۲ \Rightarrow -۸ + ۴a - ۲b - ۴ = -۱۲ \Rightarrow ۲a - b = ۰ \Rightarrow ۲a = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow ۳a = ۳ \Rightarrow a = ۱ \Rightarrow b = ۲$$

$$\Rightarrow f(x) = x^۳ + x^۲ + ۲x - ۴ \Rightarrow f(-۱) = -۱ + ۱ - ۲ - ۴ = -۶$$

۳۱٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که با تسلط بر مفاهیم قضیه تقسیم و دستگاه دو معادله دو مجهول به سادگی حل می‌شود.

۵۷ گزینهٔ «۳»

چون باقیماندهٔ $f(x)$ بر $x-۲$، برابر ۸ باشد، پس $f(۲)=۸$ خواهد بود.

$$f(۲) = ۸ \Rightarrow ۲^۳ + ۲^۲ + ۲a = ۸ \Rightarrow ۲a = -۴ \Rightarrow a = -۲$$

با جایگذاری $a=-۲$ به سراغ محاسبه حد نهایی می‌رویم:

$$\lim_{x\to ۱^+} \frac{x^۳ + x^۲ - ۲x}{x^۲ - [x]} = \lim_{x\to ۱^+} \frac{x(x^۲ + x - ۲)}{x^۲ - ۱}$$

$$= \lim_{x\to ۱^+} \frac{x(x+۲)(x-۱)}{(x+۱)(x-۱)} = \frac{۱(۱+۲)}{۱+۱} = \frac{۳}{۲} = ۱/۵$$

۵۲٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که تلفیقی از قضیه تقسیم و حد $\frac{۰}{۰}$، اما سوالی با مفاهیم اولیه و ساده از این دو مبحث است.

۵۸ گزینهٔ «۴»

ابتدا عدد ۲ را به جای x جایگذاری می‌کنیم:

$$\lim_{x\to ۲} \frac{x^۳ - ۸}{x^۳ - ۳x - ۲} = \frac{۲^۳ - ۸}{۲^۳ - ۳\times۲ - ۲} = \frac{۰}{۰}$$

پس هر دو عبارت را بر $x-۲$ تقسیم می‌کنیم:

$$x^۳ - ۸ = (x-۲)(x^۲ + ۲x + ۴)$$ (استفاده از اتحاد چاق و لاغر)

$$\begin{array}{l|l} x^۳ - ۳x - ۲ & x-۲ \\ \hline -(x^۳ - ۲x^۲) & x^۲ + ۲x + ۱ \\ \quad ۲x^۲ - ۳x - ۲ & \\ -(۲x^۲ - ۴x) & \\ \quad x - ۲ & \\ -(x-۲) & \\ \quad ۰ & \end{array}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to ۲} \frac{x^۳ - ۸}{x^۳ - ۳x - ۲} = \lim_{x\to ۲} \frac{\cancel{(x-۲)}(x^۲ + ۲x + ۴)}{\cancel{(x-۲)}(x^۲ + ۲x + ۱)} = \frac{۴+۴+۴}{۴+۴+۱} = \frac{۱۲}{۹}$$

$$= \frac{۴}{۳} = ۴\times\frac{۱}{۳}$$

پس حاصل کسر مورد نظر ۴ برابر $\frac{۱}{۳}$ است.

۴۴٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که مشابه این سوال در مثال‌های کتاب درسی است و با تسلط به تقسیم کردن به راحتی حل می‌شود.

نکته

در حد توابع کسری اگر به ازای $x=a$ صورت و مخرج صفر شوند، عامل $x-a$ هم در صورت و هم در مخرج خواهیم داشت. سپس عبارت صورت و مخرج را هر کدام جداگانه بر $x-a$ تقسیم می‌کنیم تا عبارت تجزیه شود.

۵۹ گزینهٔ «۴»

باید دقت کنیم که عبارت زیر رادیکال، مربع دو جمله‌ای است. پس داریم:

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{[x]\sqrt{(x-3)^2}}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 3^-}\frac{[x]|x-3|}{x^2-5x+6}=\frac{0}{0}$$

چون به عبارت $\frac{0}{0}$ رسیدیم، باید مخرج را تجزیه کنیم و عبارت را رفع ابهام کنیم. همچنین در $x\to 3^-$ درون قدرمطلق منفی است.

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{[3^-](-(\cancel{x-3}))}{(x-2)(\cancel{x-3})}=\lim_{x\to 3^-}\frac{-2}{x-2}=\frac{-2}{3-2}=-2$$

۳۱٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که با تسلط بر اتحاد مربع دو جمله‌ای و جمله مشترک به راحتی می‌توان سوال را حل کرد.

۶۰ گزینهٔ «۲»

ابتدا باید قدرمطلق را از بین ببریم. در $x\to 2^-$ درون قدرمطلق منفی است. پس داریم:

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+(x-2)-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+x-6}{x-2}=\frac{0}{0}$$

$$\to \lim_{x\to 2^-}\frac{(\cancel{x-2})(x+3)}{\cancel{x-2}}=5$$

۴۰٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که سوال در سطح مثال‌های کتاب درسی و دارای محاسبات بسیار کوتاه است.

۶۱ گزینهٔ «۳»

اگر عدد ۱ را در عبارت قرار دهیم، $\frac{0}{0}$ رخ می‌دهد، پس عبارت را در مزدوج صورت ضرب و تقسیم می‌کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}\Rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x^2-1}\times\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1}$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{x-1}}{(\cancel{x-1})(x+1)(\sqrt{x}+1)}=\frac{1}{2\times 2}=\frac{1}{4}$$

۴۴٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که با رفع ابهام و ضرب مزدوج عبارت در آن، بسیار ساده می‌توان صورت و مخرج را با هم ساده نمود.

نکته

اگر عامل صفر کننده‌ای در حدهای $\frac{0}{0}$ رادیکال با فرجهٔ دوم داشته باشد، باید به کمک اتحاد مزدوج آن را رفع ابهام کرد.

۶۲ گزینهٔ «۴»

اگر از صورت عبارت یک $\sqrt{x}$ را فاکتور بگیریم، به راحتی می‌توانیم با ساده کردن صورت و مخرج آن را رفع ابهام کنیم:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}\times\sqrt{x}-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}(\cancel{\sqrt{x}-1})}{\cancel{\sqrt{x}-1}}=\lim_{x\to 1}\sqrt{x}=1$$

۳۵٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که با یک فاکتورگیری ساده صورت و مخرج با هم ساده می‌شوند و سوال حل می‌شود.

۶۳ گزینهٔ «۳»

اگر عدد ۸ را در صورت و مخرج جایگذاری کنیم، به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌رسیم:

با توجه به فرجهٔ ۳، عبارت را در چاق مخرج ضرب و تقسیم می‌کنیم.

$$\lim_{x\to 8}\frac{x^2-8x}{\sqrt[3]{x}-2}=\frac{8^2-8\times 8}{\sqrt[3]{8}-2}=\frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 8}\frac{x^2-8x}{\sqrt[3]{x}-2}\times\frac{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}{\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4}=$$

$$\lim_{x\to 8}\frac{x(\cancel{x-8})(\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}+4)}{\cancel{x-8}}=8\times(\sqrt[3]{64}+2\sqrt[3]{8}+4)$$

$$=8\times(4+4+4)=8\times 12=96$$

۴۰٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که با رفع ابهام و ضرب اتحاد چاق و لاغر عبارت در آنها می‌توان صورت و مخرج را با هم ساده نمود.

نکته

اگر حاصل صفر کننده‌ای در حدهای $\frac{0}{0}$ رادیکال با فرجه سوم داشته باشد، باید به کمک اتحاد چاق و لاغر آن را رفع ابهام کرد.

۶۴ گزینهٔ «۱»

اگر $x=-1$ را در عبارت قرار دهیم، به حالت مبهم $\frac{0}{0}$ می‌رسیم با توجه به داشتن رادیکال با فرجه دو، صورت و مخرج را در مزدوج صورت ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x+\sqrt{3-x}}{x^2+x}=\frac{2\times(-1)+\sqrt{3-(-1)}}{(-1)^2+(-1)}=\frac{-2+2}{1-1}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to -1}\frac{2x+\sqrt{3-x}}{x^2+x}\times\frac{2x-\sqrt{3-x}}{2x-\sqrt{3-x}}=\lim_{x\to -1}\frac{4x^2-3+x}{(x^2+x)(2x-\sqrt{3-x})}$$

$$= \lim_{x\to -1} \frac{\cancel{(x+1)}(4x-3)}{x\cancel{(x+1)}(2x-\sqrt{3-x})}$$

$$= \frac{4\times(-1)-3}{(-1)\times(-2-\sqrt{3+1})} = \frac{-7}{-1\times(-4)} = -\frac{7}{4}$$

۳۶٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که با تسلط بر رفع ابهام به کمک مزدوج می‌توانیم سوال را حل کنیم.

۶۵ گزینهٔ «۲»

عدد ۱ را در عبارت جایگذاری می‌کنیم، چون به $\frac{0}{0}$ می‌رسیم، نیاز به رفع ابهام دارد و با توجه به فرجهٔ ۳ باید آن را در عبارت چاق صورت ضرب و تقسیم کنیم:

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2+3x-4} = \frac{\sqrt[3]{1}-1}{1+3-4} = \frac{0}{0} \to$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{x^2+3x-4} \times \frac{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{x-1}}{\cancel{(x-1)}(x+4)(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}$$

$$= \frac{1}{(1+4)(1+1+1)} = \frac{1}{15}$$

۴۴٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که اگر چاق عبارت صورت را در آن ضرب و تقسیم کنیم بعد از آن با محاسبات کوتاه به جواب می‌رسیم.

۶۶ گزینهٔ «۴»

مقدار حد $f(x)$ در اطراف $x=3$، -2 می‌شود، اما با دقت به نمودار مشخص است، حاصل مقادیر حد، کمی از -2 بیشتر است، بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to 3} \frac{1-x}{f(x)+2} = \frac{1-3}{(-2)^+ +2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

۵۳٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که حجم محاسبهٔ خاصی ندارد و در سریع‌ترین زمان قابل حل است.

۶۷ گزینهٔ «۳»

با توجه به عبارت داده شده ابتدا عبارت درون قدرمطلق را تعیین علامت می‌کنیم.

$$x^2-2x-3=(x-3)(x+1) \Rightarrow \begin{cases} x=-1 \\ x=3 \end{cases}$$

x		-1		3	
x^2-2x-3	+	0	−	0	+

با توجه به جدول تعیین علامت، سمت چپ ۳ علامت عبارت منفی است.

پس در حد عبارت داریم:

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{([x]+3)(-(x^2-2x-3))}{x-3}$$

$$= \lim_{x\to 3^-} \frac{([3^-]+3)(-\cancel{(x-3)}(x+1))}{\cancel{x-3}}$$

$$= -(2+3)(3+1) = -5\times 4 = -20$$

۳۳٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که با خروج عبارت از قدرمطلق و تجزیه آن پاسخ سوال با محاسبات ساده به نتیجه می‌رسد.

نکته

اگر عبارت درجه دوم درون قدرمطلق درون یک حد قرار بگیرد، باید این عبارت را تعیین علامت نمود.

۶۸ گزینهٔ «۴»

مرحله به مرحله از داخل شروع به محاسبه حد موردنظر می‌کنیم:

$$\lim_{x\to (\frac{1}{2})^-} \frac{3}{x} = \lim_{x\to (\frac{1}{2})^-} \frac{3}{(\frac{1}{2})^-} = 3\times 2^+ = 6^+$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 6^+} f(x) = 3^- \Rightarrow \lim_{x\to 3^-} f(x) = -4$$

$$\lim_{x\to (\frac{1}{2})^-} f(f(\frac{3}{x})) = \lim f(f(\frac{3}{(\frac{1}{2})^-})) = f(f(6^+)) = f(3^-) = -4$$

۴۵٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که حجم محاسبات سوال پایین است اما تسلط به مفاهیم حدهای راست و چپ و ترکیب توابع نیاز است.

۶۹ گزینهٔ «۱»

طبق نکته عدد ۳ را بین دو سر بازه قرار می‌دهیم:

$$2a-1<3<a+2$$

دو سمت نامعادله را جداگانه حل می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} 2a-1<3 \Rightarrow 2a<4 \Rightarrow a<2 \\ 3<a+2 \Rightarrow a>1 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cap} 1<a<2$$

۳۷٪ دانش‌آموزان به این سؤال پاسخ صحیح داده‌اند، چرا که هم سطح سوالات کتاب درسی است و حجم محاسبات بسیار کوتاه است.

نکته

اگر بازهٔ (a,b) یک همسایگی برای نقطهٔ $x=x_0$ باشد، آن گاه $a<x_0<b$ خواهد بود.

۷۰ گزینهٔ «۳»

باید عدد $2x$ بین دو عدد ۵ و $-x+2$ قرار گیرد.

$$-x+2<2x<5$$

دو سمت نامعادله را جداگانه حل می‌کنیم:

$$\begin{array}{l} -x+2<2x \to x>\frac{2}{3} \\ 2x<5 \to x<\frac{5}{2} \end{array} \xrightarrow{\cap} \frac{2}{3}<x<\frac{5}{2}$$