بِسمِ اللهِ الرَّحمٰنِ الرَّحیم

اَللّهُمَّ صَلِّ عَلیٰ مُحَمَّدٍ وَ آلِ مُحَمَّدٍ وَ عَجِّلْ فَرَجَهُمْ

آمار و احتمال

رشته ریاضی و فیزیک

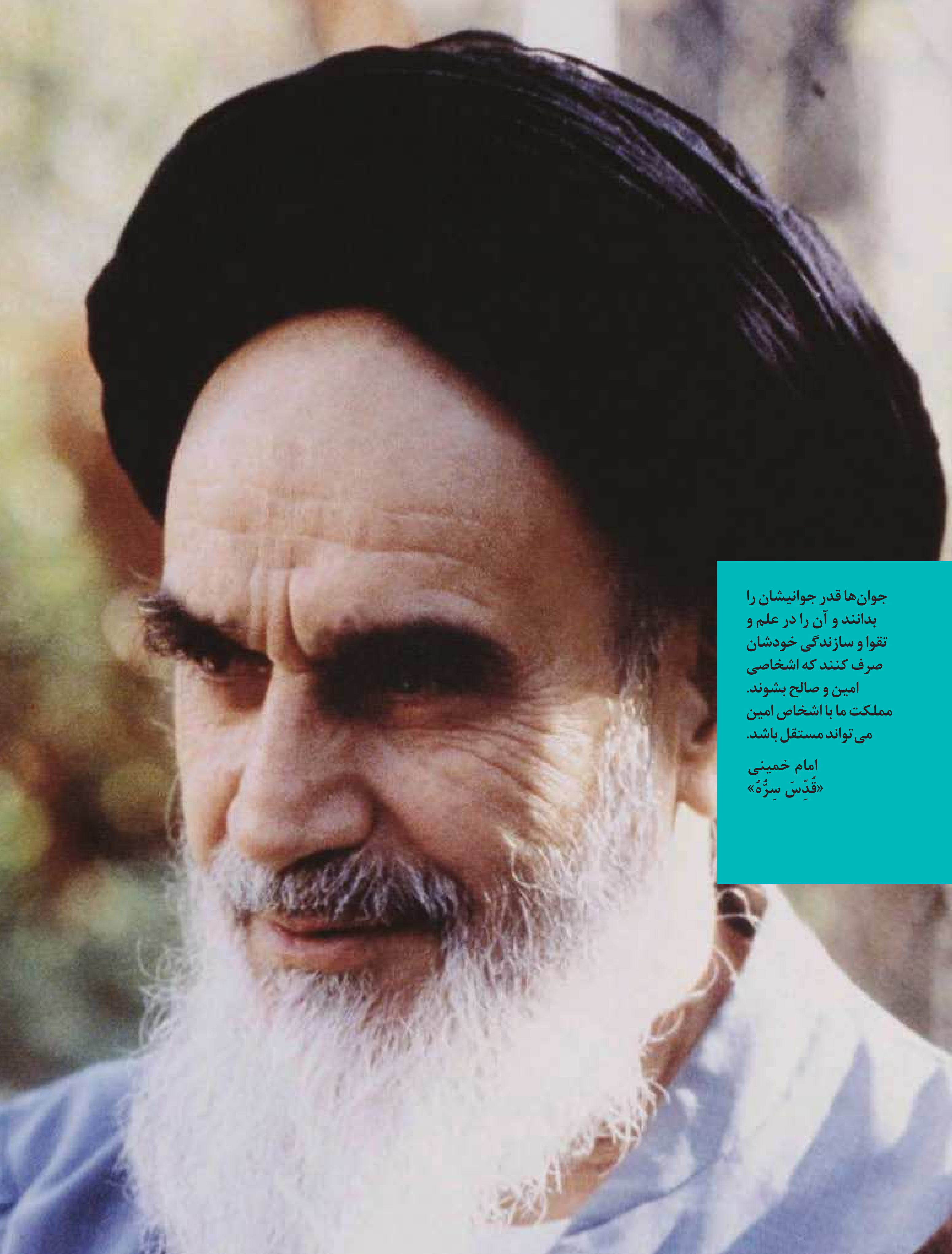
پایهٔ یازدهم

دورهٔ دوم متوسطه

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب: آمار و احتمال ـ پایهٔ یازدهم دورهٔ دوم متوسطه ـ ۱۱۱۲۱۵
پدیدآورنده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف: حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، ناصر بروجردیان، محمدحسن بیژن‌زاده، خسرو داودی، زهرا رحیمی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیّدصالحی، میرشهرام صدر، اکرم قابل‌رحمت، طاهر قاسمی‌هنری و عادل محمدپور (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
حمیدرضا امیری، میرشهرام صدر، امید نقشینه‌ارجمند، محمود داورزنی، احسان بهرامی‌سامانی و عادل محمدپور (اعضای گروه تألیف) ـ مهدی ایزدی، احسان بهرامی سامانی، محمدرضا سید صالحی، هوشنگ شرقی، آناهیتا کمیجانی، عادل محمد پور و امید نقشینه ارجمند (اعضای کمیتهٔ آمار و احتمال)
محمّدکاظم بهنیا (ویراستار)
مدیریت آماده‌سازی هنری: ادارهٔ کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
شناسه افزوده آماده‌سازی: احمدرضا امینی (مدیر امور فنی و چاپ) ـ جواد صفری (مدیر هنری) ـ زهره بهشتی‌شیرازی (صفحه‌آرا) ـ صبا کاظمی (طراح جلد) ـ بهناز بهبود، شاداب ارشادی، علیرضا ملکان، کبری اجابتی، فاطمه رئیسیان‌فیروزآباد و مریم دهقان‌زاده (امور آماده‌سازی)
نشانی سازمان: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)
تلفن: ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
وبگاه: www.chap.sch.ir و www.irtextbook.ir
ناشر: شرکت چاپ ونشر کتاب‌های درسی ایران تهران: کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۵ـ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۱۳۹ـ۳۷۵۱۵
چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»
سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ هشتم ۱۴۰۳

شابک ۳ـ۲۷۷۳ـ۰۵ـ۹۶۴ـ۹۷۸
ISBN: 978-964-05-2773-3



جوان‌ها قدر جوانیشان را
بدانند و آن را در علم و
تقوا و سازندگی خودشان
صرف کنند که اشخاصی
امین و صالح بشوند.
مملکت ما با اشخاص امین
می‌تواند مستقل باشد.

امام خمینی
«قُدِّسَ سِرُّهُ»

کلیهٔ حقوق مادّی و معنوی این کتاب متعلق به سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش است و هرگونه استفاده از این کتاب و اجزای آن به‌صورت چاپی و الکترونیکی و ارائه در پایگاه‌های مجازی، نمایش، اقتباس، تلخیص، تبدیل، ترجمه، عکس‌برداری، نقاشی، تهیهٔ فیلم و تکثیر به هر شکل و نوع، بدون کسب مجوز از این سازمان ممنوع است و متخلفان تحت پیگرد قانونی قرار می‌گیرند.

این کتاب در سال تحصیلی ۱۴۰۳ ـ ۱۴۰۲ توسط اعضای کمیتهٔ آمار و احتمال گروه ریاضی دفتر تألیف مورد تصحیح و بازنگری کلی قرار گرفت.

فهرست

مقدمه

کتاب درسی آمار و احتمال در راستای اهداف برنامه درسی حوزهٔ تربیت و یادگیری ریاضی و با رویکرد آموزش از طریق حل مسئله و تأکید بر فعالیت در کلاس درس به جهت شکل‌گیری و ساختن مفاهیم توسط دانش‌آموزان تألیف شده است. مطالب این کتاب حدود و دامنهٔ کار دبیران محترم را مشخص کرده و توقع مؤلفان و دفتر تألیف نیز همین است که مطالب کتاب بی‌کم و کاست و بدون هیچ‌گونه اضافاتی (به لحاظ موضوع و مفهوم جدید)، تدریس شود.

به‌عنوان مثال در فصل اول اثبات هم‌ارزی‌ها بدون استفاده از جدول ارزش‌ها مطرح نشده و لذا طرح چنین سؤال‌هایی چه در کلاس و چه در سؤال‌های ارزشیابی جایز نمی‌باشد.

در فصل اول با منطق ریاضی آشنا خواهید شد، منطق ریاضی دستور زبان ریاضی است موضوع منطق ریاضی به معنای عام، تفکر است. آنچه که تفکّر را به‌عنوان موضوع منطق ریاضی از دیگر موضوعاتِ علوم دیگر متمایز می‌کند، تعیُّن خاصی برای تفکر است که به آن تفکر استدلالی یا تفکر استنتاجی می‌گوییم، یعنی منطق ریاضی به بررسی قواعد استدلال در ریاضیات می‌پردازد.

از طرفی توجه دارید که تئوری احتمالات مبتنی بر تئوری مجموعه‌ها و تئوری مجموعه‌ها نیز مبتنی بر منطق ریاضی است و به‌همین دلیل در فصل اول به این دو موضوع (منطق ریاضی و مجموعه‌ها) پرداخته شده است.

فصل دوم در مورد علم احتمال است. دانش‌آموزان در سال‌های گذشته با احتمال و حل برخی مسائل مقدماتی آن آشنا شده‌اند ولی مبتنی بر آنچه آموخته‌اند ممکن است به‌اشتباه تصور کنند مسائل علم احتمال، چیزی غیر از دو مسئله شمارشی و تقسیم «تعداد حالات مطلوب» به «تعداد حالات ممکن» نیست. هر چند این تصور از مسائل احتمال، در ابتدای آشنایی با احتمال مفید است ولی لازم است دید دانش‌آموز وسیع‌تر شود. در این درس مفاهیمی چون استقلال و احتمال غیرهم‌شانس می‌توانند به این گسترش دید کمک کنند و البته بهتر است معلم نیز در حین تدریس بر این موضوع تأکید کند که «علم احتمال شاخه‌ای از علم ترکیبیات نیست.»

موضوع بسیاری از مثال‌هایی که در فصل احتمال مطرح می‌شود پرتاب تاس و پرتاب سکه و انتخاب کارت‌های رنگی و... است و ممکن است در ذهن دانش‌آموز این شبهه به وجود بیاید که «علم احتمال به حل مسائلی بی‌فایده می‌پردازد!» وجود این نوع مسائل در تمامی کتاب‌های احتمال از این جهت است که یادگیری قضایا و فرمول‌های احتمال با کمک آنها ساده‌تر است. تذکر این نکته در کلاس و به‌علاوه توجه به مثال‌هایی که در آنها تا حدی به مباحث واقعی‌تر پرداخته شده است می‌تواند دانش‌آموز را تا حدی متوجه اهمیت و کاربردهای علم احتمال کند.

در ریاضیات به‌طور کلی و در علم احتمال به‌طور خاص، هم درک شهودی اهمیت دارد و هم توانایی محاسبه. از این رو خوب است که دانش‌آموز گاهی قبل از محاسبه یک احتمال بتواند تقریبی کلی از پاسخ را ارائه کند و دست‌کم به‌طور حسی مشخص کند که آیا جواب به یک نزدیک است، یا به صفر نزدیک است و یا هیچ‌کدام؟ و گاهی نیز پس از پایان محاسبات از خود بپرسد که آیا پاسخ با شهودش سازگار است؟ اگر نیست آیا در محاسبه اشتباه کرده است و یا اینکه شهود، او را درست هدایت نمی‌کند؟

در فصل‌های سوم و چهارم به موضوع آمار پرداخته‌ایم، در این فصول و در ادامهٔ مطالبی که دانش‌آموزان در سال‌های قبل یاد گرفته‌اند و نیز با هدف بالا بردن سطح سواد آماری سعی در کاربردی ارائه کردنِ این علم داشته‌ایم.

اغلب آمار را به‌عنوان معنای قدیمی آن یعنی گردآوری داده‌ها می‌شناسند، ولی علم آمار کاربردهای گوناگونی دارد. در آمارتوصیفی راه‌های تلخیص داده‌ها را با معیارهای مختلف و نمودارهای گوناگون بیان و اطلاعات آنها را ساده و قابل استفاده می‌کند. اوج علم آمار استفاده از علم احتمال برای ابداع آمار استنباطی بوده است. آمار استنباطی استخراج نتایجی براساس بخش کوچکی از داده‌ها در یک مسئله است که می‌توان آن را به همه داده‌های آن مسئله تعمیم داد. با وجود آنکه پایه‌های احتمال بر نظریه‌های ریاضی استوار شده است، ولی آمار را نمی‌توان به عنوان شاخه‌ای از ریاضی در نظر گرفت. به دلیل ارتباط آمار با علوم تجربی، آموزش آمار نیز شباهت بیشتری به آموزش فیزیک و شیمی دارد تا به ریاضیات.

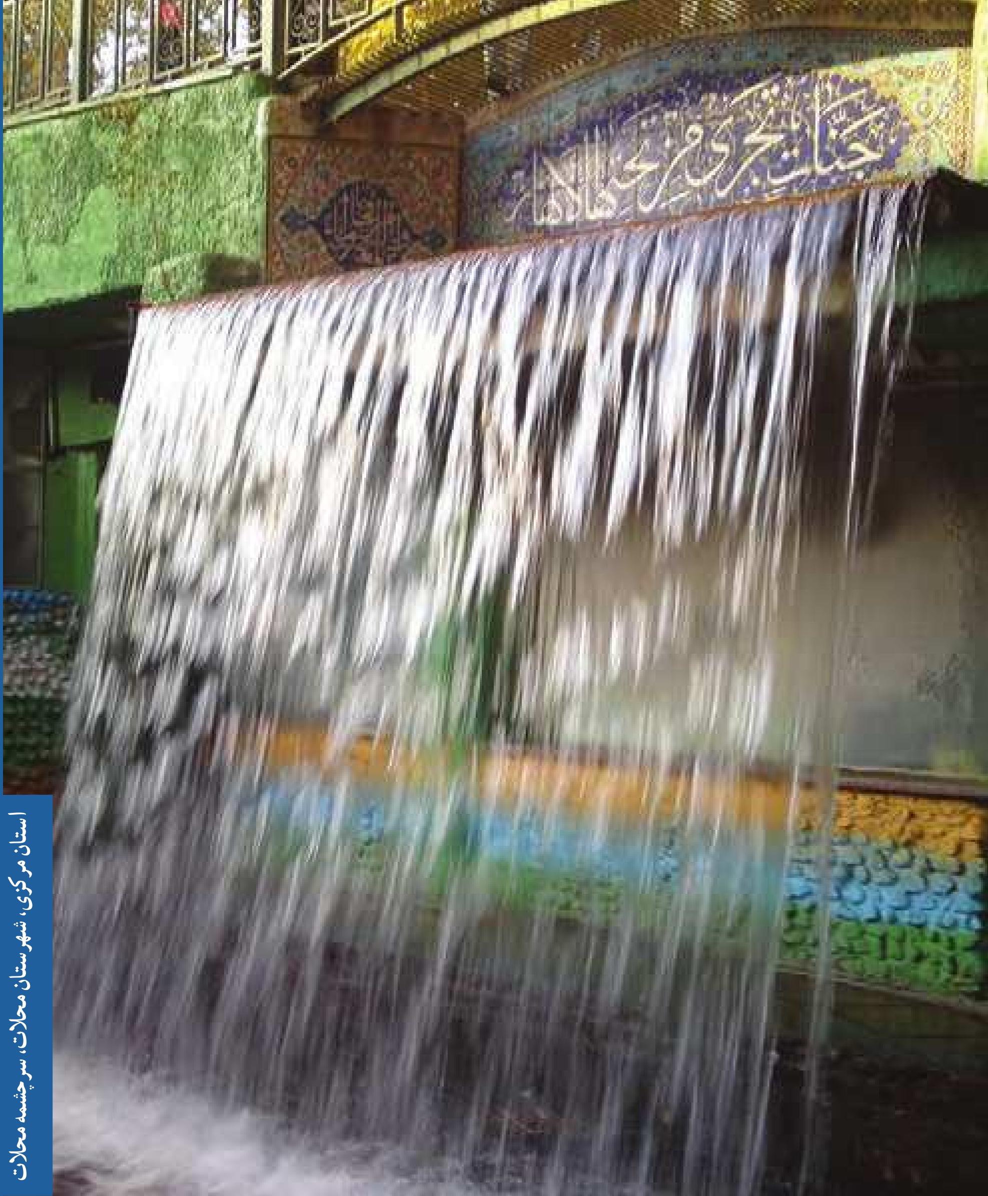
در پایان، از همهٔ همکاران، کارشناسان و دبیران محترم تقاضا داریم ما را از نظرات و پیشنهادات سازندهٔ خویش، بهره‌مند نموده و از طریق سایت[1] و ایمیل[2] واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی دفتر تألیف کتاب‌های درسی با ما در ارتباط باشند.

مؤلفان

نظرسنجی کتاب درسی

1_ www.mathrde.ir

2_ Mathrde@gmail.com



استان مرکزی، شهرستان محلات، سرچشمه محلات

«قُل هٰاتو بُرهٰانَکُم اِنْ کُنتُم صٰادِقین»
آیه ۶۴ سوره نمل
«بگو اگر راست می‌گویید
دلیل خود را بیاورید»

۱ آشنایی با مبانی ریاضیات

۱ آشنایی با منطق ریاضی
۲ جبر مجموعه‌ها

درس ۱ آشنایی با منطق ریاضی

منطق ریاضی که عده‌ای به آن منطق نمادین[1] نیز می‌گویند، دستور زبان ریاضی، یا مطالعهٔ ساختار جمله‌هایی است که در ریاضی به‌کار برده می‌شود. این شاخه از ریاضیات به بررسی دقیق استدلال‌ها می‌پردازد و اعتبار یک استدلال را مشخص می‌کند. امروزه منطق ریاضی در علوم مربوط به رایانه نیز به‌کار گرفته می‌شود. در این درس، کار ما بسیار شبیه بیان قواعد دستور زبان برای یک زبان معیّن است.

گزاره، ارزش گزاره و نقیض آن

گزاره جمله‌ای خبری است که یا راست است یا دروغ. بنابراین جملاتی که خبری نباشند مانند جملات استفهامی، تعجبی و ... گزاره نیستند.[2] معمولاً گزاره‌ها را با حروف p، q، r و ... نمایش می‌دهند.

درست یا نادرست بودن یک گزاره را **ارزش گزاره** می‌گوییم.

هر گزاره دارای ارزش درست یا نادرست است که ارزش گزاره درست را با حرف «د» یا «T» و ارزش گزاره نادرست را با حرف «ن» یا «F» نمایش می‌دهیم. بنابراین، هر گزاره مانند p فقط یکی از دو حالت ارزش گزاره را طبق جدول روبه‌رو دارد.

p
د
ن

ارزش‌های دو گزارهٔ p و q ، طبق جدول روبه‌رو چهار حالت دارد.

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

۱ــ Symbolic Logic

۲ــ تشخیص گزاره بودن یا نبودن یک جمله از اهداف این کتاب نیست و طرح آن در ارزشیابی مجاز نیست.

نقیض گزارهٔ p به‌صورت $\sim p$ نوشته می‌شود و آن را «چنین نیست که p» می‌خوانیم. اگر ارزش گزارهٔ p درست باشد، در این‌صورت، ارزش گزارهٔ $\sim p$ نادرست است و وقتی که p نادرست باشد، ارزش نقیض آن درست است. به علامت «$\sim$» **ناقض** گفته می‌شود و «چنین نیست که» خوانده می‌شود.

مثال : نقیض گزارهٔ «۲ عددی گنگ است» را می‌توان به‌صورت‌های زیر نوشت.

«چنین نیست که ۲ عددی گنگ باشد»، یا «۲ عددی گنگ نیست.»

جدول ارزش برای نقیض یک گزاره که تمام حالت‌های ممکن را برای درستی یا نادرستی گزاره در نظر می‌گیرد، به‌صورت روبه‌روست :

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

مثال : جدول ارزش گزاره $\sim(\sim p)$ را تشکیل دهید و ارزش آن را در هر حالت، با ارزش گزاره p مقایسه کنید.

حل :

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
د	ن	د
ن	د	ن

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، در هر حالت از جدول، ارزش p با ارزش $\sim(\sim p)$ یکسان است. در این حالت می‌گوییم : دو گزاره p و $\sim(\sim p)$ **هم ارز** هستند و می‌نویسیم : $\sim(\sim p) \equiv p$.

در حالت کلّی اگر دو گزاره p و q همواره هم‌ارزش باشند می‌نویسیم : $p \equiv q$ و می‌خوانیم : p هم ارز است با q.

گزاره‌نما

فعالیت

جملات خبری زیر را در نظر بگیرید :

الف) a عددی فرد است.

ب) در پرتاب یک تاس، احتمال آنکه پیشامد A رخ دهد برابر با $\frac{۱}{۲}$ است.

پ) حاصل جمع سه برابر عددی با دو برابر عدد دیگر برابر با ۶ است. $(۳x+۲y=۶)$

۱ ارزش کدام‌یک از جملات بالا را می‌توانید تعیین کنید؟

۲ اگر به جای متغیر در جملهٔ «a عددی فرد است» قرار دهیم $a=۳$ در این صورت، ارزش آن را تعیین کنید. اگر در آن $a=۴$ قرار دهیم، در این صورت ارزش آن چیست؟

هر جملهٔ خبری که شامل یک یا چند متغیر است و با جای‌گذاری مقادیری به جای متغیر به یک گزاره تبدیل شود، **گزاره‌نما** نامیده می‌شود. گزاره‌نماها را برحسب تعداد متغیر به کار رفته در آنها، یک متغیره، دو متغیره و ... می‌نامیم.

کار در کلاس

جاهای خالی را پر کنید :

اگر در جملهٔ «ب» قرار دهیم $A=\{\quad,\quad,\quad\}$ در این صورت، ارزش گزاره حاصل درست می‌شود. به نظر شما چه مجموعه‌هایی را به‌جای A قرار دهیم، تا اینکه ارزش گزاره حاصل درست شود.

اگر در جملهٔ «ب» قرار دهیم $A=\{\quad\}$ در این صورت ارزش گزاره حاصل، نادرست است.

اگر در جملهٔ «پ» قرار دهیم $x=\cdots\cdots$ و $y=\cdots\cdots$ در این صورت، ارزش گزاره حاصل درست و در حالتی که $x=\cdots\cdots$ و $y=\cdots\cdots$ در این صورت، ارزش گزاره حاصل نادرست است.

دامنهٔ متغیّر گزاره‌نما

در هر گزاره‌نما به مجموعهٔ مقادیری که می‌توان آنها را به جای متغیرهای آن قرار داد، تا اینکه گزاره‌نما به گزاره تبدیل شود، **دامنهٔ متغیر**[۱] گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف D نمایش می‌دهند.[۲]

برای مثال، دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای «p عددی اوّل است» مجموعهٔ اعداد طبیعی، دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای «x عددی زوج است» مجموعهٔ اعداد صحیح و دامنهٔ متغیر گزاره‌نمای «$4x^2+x-5=0$» مجموعهٔ اعداد حقیقی می‌توان درنظر گرفت.

در هر گزاره‌نما، به مجموعهٔ عضوهایی از دامنهٔ متغیر که به‌ازای آنها، گزاره‌نما تبدیل به گزاره‌ای با ارزش درست شود، **مجموعهٔ جواب**[۳] گزاره‌نما می‌گویند و آن را با حرف S نمایش می‌دهند و همواره داریم : $S\subseteq D$.

ترکیب گزاره‌ها

از ترکیب دو یا چند گزاره به وسیلهٔ رابط‌های گزاره‌ای مانند «و»، «یا»، «اگر ــ آن‌گاه» و ...، گزاره‌های مرکب به‌دست می‌آیند. نمونه‌های زیر گزاره‌های مرکب هستند؛

- عدد ۲ زوج است و عدد ۵ مضرب ۳ است.
- عدد ۲ زوج است، یا عدد ۵ مضرب ۳ است.
- اگر عدد ۲ زوج باشد، آن‌گاه عدد ۵ مضرب ۳ است.
- چنین نیست که عدد ۲ زوج باشد.
- اگر عدد ۲ زوج باشد، آن‌گاه عدد ۵ مضرب ۳ است و برعکس.

ترکیب عطفی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب «$p\wedge q$» که خوانده می‌شود «p و q» را **ترکیب عطفی** دو گزاره می‌گوییم. در

۱ـ Domain of Variable

۲ــ تعیین دامنهٔ متغیر گزاره نماها از اهداف آموزشی این کتاب نیست و طرح سؤال از آن در ارزشیابی مجاز نیست.

۳ـ Answer Set

اینجا به رابط منطقی «$\wedge$» **عاطف** گفته می‌شود. ارزش ترکیب عطفی دو گزارهٔ $(p\wedge q)$ فقط وقتی درست است که ارزش هر دو گزارهٔ p و q درست باشد و در بقیه حالات ارزش $p\wedge q$ نادرست است.

مثال

گزارهٔ مرکب زیر را در نظر بگیرید.

«سوگند فارغ‌التحصیل شد و پارسا عضو تیم فوتبال مدرسه است».

فرض کنیم :

p : سوگند فارغ‌التحصیل شد.

q : پارسا عضو تیم فوتبال مدرسه است.

- اگر ارزش p درست و ارزش q نادرست باشد، ارزش $p\wedge q$ نادرست است.
- اگر ارزش p نادرست و ارزش q درست باشد، ارزش $p\wedge q$ نادرست است.
- هرگاه ارزش دو گزارهٔ p و q نادرست باشد، ارزش $p\wedge q$ نادرست است.
- هرگاه ارزش دو گزارهٔ p و q درست باشد، ارزش $p\wedge q$ درست است.

بنابراین جدول ارزش $p\wedge q$ را به‌صورت روبه‌رو می‌توان نوشت :

p	q	$p\wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

مثال : مقادیر x و y را چنان بیابید که داشته باشیم :

$$(2x-y)^2+(x-1)^2=0$$

حل : چون $(x-1)^2\geq 0$ و $(2x-y)^2\geq 0$ بنابراین، تساوی بالا وقتی برقرار است که :

$$\left[(2x-y)^2=0\right]\wedge\left[(x-1)^2=0\right]\Rightarrow\begin{cases}2x-y=0\\ x-1=0\Rightarrow x=1\end{cases}\Rightarrow y=2$$

ترکیب فصلی دو گزاره

گزاره‌های زیر را در نظر بگیرید.

p : $\sqrt{3}$ عددی حقیقی است.

q : ۲ عددی اول نیست.

گزارهٔ مرکب « $\sqrt{3}$ عددی حقیقی است، یا ۲ عددی اوّل نیست» را که از ترکیب دو گزارهٔ p و q با رابط منطقی «یا» تشکیل شده است، ترکیب فصلی دو گزاره می‌گوییم. هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب «p یا q» را که به‌صورت «$p\vee q$» می‌نویسند، **ترکیب فصلی** دو گزاره می‌گوییم. در اینجا به رابط منطقی «$\vee$» **فاصل** گفته می‌شود. ارزش ترکیب فصلی دو گزارهٔ $(p\vee q)$ فقط وقتی نادرست است که ارزش هر دو گزارهٔ p و q نادرست باشد و در بقیه حالات ارزش $p\vee q$ درست است.

مثال : گزارهٔ مرکب زیر را در نظر بگیرید :

«پدر علی امروز برای گرفتن کارنامه به مدرسه می‌آید، **یا** مادر علی امروز برای گرفتن کارنامه به مدرسه می‌آید».

اگر پدر علی برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیاید، در این صورت ارزش گزارهٔ مرکب بالا درست است. اگر مادر علی برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیاید، نیز ارزش گزارهٔ مرکب درست است. در حالتی که هم پدر علی و هم مادر علی برای گرفتن کارنامه به مدرسه بیایند، ارزش گزارهٔ مرکب درست است.

گزارهٔ مرکب بالا وقتی نادرست است که نه پدر و نه مادر علی برای گرفتن کارنامه مراجعه نکنند.

بنابراین جدول ارزش گزارهٔ $p \vee q$ به صورت روبه‌رو است.

$p \vee q$	q	p
د	د	د
د	ن	د
د	د	ن
ن	ن	ن

کار در کلاس

۱ جدول زیر را کامل کنید.

گزارهٔ p	گزارهٔ q	ارزش p	ارزش q	ارزش $p \vee q$	ارزش $p \wedge q$
هر دنباله یا حسابی است یا هندسی.	$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$				
....	$x=1$ تابع نیست	ن			
$\sqrt[5]{-32} = -2$	....		ن		
....	....	ن	ن		
$\sqrt{x} - 1$ یک عبارت چند جمله‌ای است.	....			د	

۲ با کامل کردن جدول ارزش‌ها، نشان دهید که گزاره‌های $\sim(p\vee q)$ و $(\sim p\wedge\sim q)$ هم‌ارز هستند.

p	q	$p\vee q$	$\sim(p\vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\wedge\sim q$
د	د	د	ن		ن	
د	ن	د	ن		د	
ن	د	د		د		ن
ن	ن	ن		د		د

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، همهٔ حالت‌های ارزش دو گزارهٔ $\sim(p\vee q)$ و $(\sim p\wedge\sim q)$ یکسان‌اند پس $\sim(p\vee q)\equiv\sim p\wedge\sim q$ در منطق ریاضی به این هم‌ارزی **قانون دمورگان**[1] گفته می‌شود.

۳ با توجه به جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید که $\sim(p\wedge q)\equiv\sim p\vee\sim q$.

p	q	$p\wedge q$	$\sim(p\wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p\vee\sim q$

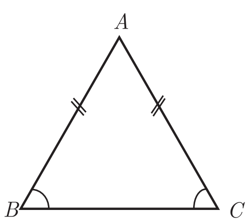
ترکیب شرطی دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب «$p\Rightarrow q$» که خوانده می‌شود «اگر p آن‌گاه q» را **ترکیب شرطی** دو گزاره می‌گوییم. در این ترکیب شرطی p را مقدم (فرض) و q را تالی (حکم) می‌نامیم.

گزارهٔ مرکب «$p\Rightarrow q$» را به‌صورت‌های «p شرط کافی برای q است» و «q شرط لازم برای p است» نیز می‌خوانیم.

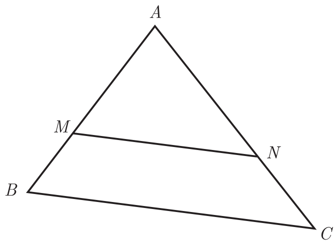
مثال :

الف) اگر مثلثی متساوی‌الساقین باشد. آن‌گاه دو زاویهٔ مجاور به قاعده برابرند.



$$\overset{\Delta}{ABC}: AB=AC \Rightarrow \hat{B}=\hat{C}$$

۱ــ آگوستون دمورگان (۱۸۷۱ــ۱۸۰۶) ریاضی‌دان و منطق‌دان بریتانیایی بود که قوانین دمورگان را ارائه نمود.



ب) اگر در مثلث ABC ، داشته باشیم : $MN \| BC$ آن‌گاه $\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}$.

جدول ارزش گزارهٔ شرطی $p \Rightarrow q$ به‌صورت زیر است :

۱ هرگاه ارزش p (مقدم) نادرست باشد، آن‌گاه ارزش گزارهٔ مرکب «$p\Rightarrow q$» همواره درست است و ارزش آن به ارزش گزارهٔ q بستگی ندارد. در این حالت می‌گویند : ارزش «$p\Rightarrow q$» به انتفای مقدم درست است.

۲ ارزش گزارهٔ $p \Rightarrow q$ وقتی نادرست است که p درست و q نادرست باشد.

مثال : ارزش گزارهٔ «اگر ۲ فرد است، آن‌گاه ۲>۵» به انتفای مقدّم درست است.

p	q	$p\Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	ن	د
ن	د	د

کار در کلاس

۱ با پر کردن جاهای خالی در جدول زیر؛ نشان دهید که گزاره‌های $p\Rightarrow q$ و $\sim p\vee q$ هم ارز منطقی‌اند.

p	q	$p\Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p\vee q$
د	د	د		
د	ن	ن		
ن	ن	د		
ن	د	د		

۲ گزارهٔ «$q\Rightarrow p$» **عکس ترکیب شرطی** «$p\Rightarrow q$» و گزارهٔ $\sim q\Rightarrow\sim p$ **عکس نقیض ترکیب شرطی** $p\Rightarrow q$ است.
با توجه به جدول ارزش گزاره‌های زیر نشان دهید که $(p\Rightarrow q)\equiv(\sim q \Rightarrow \sim p)$ یعنی، هر گزارهٔ شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است.

p	q	$p\Rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q\Rightarrow\sim p$

مثال : ارزش گزاره‌های شرطی زیر را تعیین کنید :

الف) $(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$ ‌‌‌‌‌‌ ‌‌‌‌‌‌ ب) $(p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow p \vee q$
د	د		
د	ن		
ن	د		
ن	ن		

(الف)

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$
د	د		
د	ن		
ن	د		
ن	ن		

(ب)

همان‌گونه که می‌بینید در جدول همهٔ حالت‌ها بررسی شده است، گاهی اوقات به کمک استدلال می‌توان با مسیری کوتاه‌تر، ارزش گزاره را مشخص کرد. برای مثال می‌توان ارزش گزارهٔ الف را به‌صورت زیر تعیین کرد.

گزارهٔ p دو ارزش دارد :

$p \rightarrow$ نادرست ‌‌ گزاره به انتفای مقدم درست است.

$p \rightarrow$ درست ‌‌ $p \vee q$ درست است بنابراین مقدم و تالی هر دو درست‌اند پس گزاره درست است.

به‌طور مشابه ارزش گزارهٔ ب را تعیین نمایید.

گزاره‌هایی نظیر $(p \Rightarrow p)$ یا $(p \vee \sim p)$ را گزاره‌هایی همیشه درست و گزاره‌هایی نظیر $(p \wedge \sim p)$ را همیشه نادرست می‌نامیم.

مثال : ثابت کنید اگر $a \in \mathbb{Z}$ و $a^۲$ عددی فرد باشد، آن‌گاه a عددی فرد است.

حل : به‌جای اثبات این حکم، عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم (اثبات عکس نقیض آن ساده‌تر است).

($a^۲$ عددی فرد است $\Leftarrow$ a عددی فرد است) $\equiv$ (a عددی زوج است $\Leftarrow$ $a^۲$ عددی زوج است)

اگر a عددی زوج باشد، یعنی $a=۲k$، خواهیم داشت :

$$a^۲ = (۲k)^۲ = ۴k^۲ = ۲\underbrace{(۲k^۲)}_{k' \in \mathbb{Z}} = ۲k'$$

در نتیجه $a^۲$ عددی زوج است.

ترکیب دو شرطیِ دو گزاره

هرگاه p و q دو گزاره باشند، گزارهٔ مرکب $(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$ را به‌صورت «$p\Leftrightarrow q$» می‌نویسیم و آن را ترکیب دو شرطی p و q می‌نامیم. گزارهٔ «$p\Leftrightarrow q$» را به‌صورت زیر می‌خوانیم :

«اگر p، آن‌گاه q و برعکس»، «p شرط لازم و کافی برای q است» و «p اگر و تنها اگر q»

مثال : گزاره های زیر، نمونه ای از ترکیب دو شرطی گزاره‌هاست.

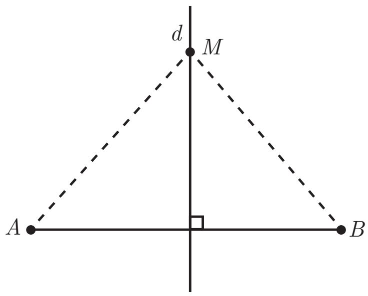
الف) ۶ عدد اوّل است $\Leftrightarrow$ ۵ < ۲

ب) ۹۹ عدد اوّل نیست $\Leftrightarrow$ $\sqrt{۲}$ عددی گویاست.

پ) در پرتاب یک تاس، شرط لازم و کافی برای آنکه احتمال پیشامدی برابر با صفر باشد، آن است که پیشامد تهی باشد.

ت) شرط لازم و کافی برای آنکه نقطه‌ای واقع بر عمود منصف یک پاره‌خط باشد، آن است که فاصلهٔ آن نقطه تا دو سر پاره‌خط برابر باشد.

[$M\in d$ (عمود منصف پاره‌خط AB)] $\Leftrightarrow MA=MB$



کار در کلاس

۱ با پر کردن جاهای خالی، جدول ارزش گزارهٔ مرکب «$p\Leftrightarrow q$» را از جدول ارزش گزارهٔ مرکب $(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$ نتیجه بگیرید.

p	q	$p\Rightarrow q$	$q\Rightarrow p$	$(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$
د	د			
د	ن			
ن	د			
ن	ن			

با توجه به اینکه $(p\Leftrightarrow q)\equiv(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$، جدول ارزش گزارهٔ $p\Leftrightarrow q$ به‌صورت زیر است :

p	q	$p\Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

۲ با استفاده از جدول ارزش درستی گزاره‌ها، هم‌ارزی‌های منطقی زیر را مانند نمونه اثبات کنید.

الف) قوانین جابه‌جایی $p\vee q\equiv q\vee p$

$p\wedge q\equiv q\wedge p$

ب) قوانین شرکت‌پذیری $(p\vee q)\vee r\equiv p\vee(q\vee r)$

$(p\wedge q)\wedge r\equiv p\wedge(q\wedge r)$

پ) قوانین توزیع‌پذیری $p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

$p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$

در زیر یکی از قانون‌های توزیع‌پذیری اثبات شده است.

p	q	r	$q\vee r$	$p\wedge q$	$p\wedge r$	$p\wedge(q\vee r)$	$(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	د	د	ن	د	د
د	ن	د	د	ن	د	د	د
د	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	د	ن	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	د	د	ن	ن	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

چون دو ستون آخر جدول یکسان شده است، پس $p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$

سورها

به جملات زیر دقت کنید:

«همهٔ دانش‌آموزان کلاس در سال گذشته قبول شده‌اند». «هر گردویی گرد است». «هر مستطیلی یک مربع است». «هر مثلث متساوی‌الاضلاعی یک مثلث متساوی‌الساقین است». «بعضی از تیم‌های دستهٔ یک به دستهٔ برتر صعود می‌کنند». «بعضی از اعداد اوّل، زوج‌اند». «بعضی از ذوزنقه‌ها، مستطیل‌اند». «به ازای هر $x\in\mathbb{N}$ ، $x^2-1=0$».

عبارت‌هایی مانند «هر»، «به ازای هر» و «به ازای بعضی مقادیر» به **سور** معروف‌اند. گزاره‌ها یا گزاره نماهایی که شامل عبارت‌های سوری باشند به گزاره‌های سوری معروفند. در هر گزاره سوری که شامل متغیر باشد، دامنهٔ متغیر باید مشخص باشد.

برای بیان عبارت‌ها با استفاده از نمادهای ریاضی به‌جای «به ازای هر»، یا «به ازای جمیع مقادیر» از نماد $\forall$[1] و به جای «وجود دارد»، یا «به ازای بعضی مقادیر» از نماد $\exists$[2] استفاده می‌کنیم. نماد $\forall$ سور عمومی و نماد $\exists$ سور وجودی نامیده می‌شود.

۱ــ نماد $\forall$ از حرف اول کلمه All گرفته شده است.

۲ــ نماد $\exists$ از حرف اول کلمه Exist گرفته شده است.

کار در کلاس

جدول زیر را کامل کنید.

عبارت با زبان طبیعی	عبارت با زبان ریاضی
برای هر عدد حقیقی x داریم: $x^2 \geq 0$	$\forall x \in \mathrm{R}\ ;\ x^2 \geq 0$
	$\forall a \in \mathrm{E}\ ;\ a=2k\ (k \in \mathbb{Z})$
	$\exists\ p \in \mathrm{P}\ ;\ p=2k\ (k \in \mathbb{Z})$
بعضی از اعداد فرد، عدد اول هستند.	

در جدول فوق، مجموعهٔ اعداد زوج را با E، مجموعهٔ اعداد فرد را با O و مجموعهٔ اعداد اوّل را با P نمایش داده‌ایم.

مثال : ارزش گزارهٔ $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ x^2 \geq x$ نادرست است؛ زیرا $x=\frac{1}{2}$ برای آن مثال نقض محسوب می‌شود.

مثال : کدام یک از عبارت‌های زیر، گزاره‌هایی درست‌اند؟

الف) به ازای هر $x \in \mathbb{Z}\ ;\ \frac{x(x+1)}{2} \in \mathbb{Z}$

ب) $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ tanx \times cotx = 1$

حل الف) چون حاصل ضرب هر دو عدد متوالی صحیح، عددی زوج است. بنابراین، برای هر عضو از دامنهٔ متغیر $(\mathbb{Z})$ گزاره‌نما به گزاره‌ای درست تبدیل می‌شود، پس این عبارت درست است.

ب) نادرست است؛ زیرا $x = 90°$، گزاره‌نما را به گزاره‌ای نادرست تبدیل می‌کند.

مثال : گزارهٔ $\exists x \in \mathbb{Z}\ ;\ |x| - 1 < 0$

درست است؛ زیرا حداقل یک عضو $x=0$ وجود دارد که به ازای آن، گزاره‌نما به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل می‌شود.

مثال : کدام یک از عبارت‌های زیر درست‌اند :

الف) $\exists x \in Q'\ ;\ x^2 \in Q$

ب) $\exists x \in \mathbb{R}\ ;\ x^2 + 1 = 0$

حل. الف) درست است؛ زیرا $\sqrt{2}$ عددی گنگ و $(\sqrt{2})^2$ عددی گویاست.

ب) نادرست است؛ زیرا عدد حقیقی‌ای وجود ندارد که در این تساوی صدق کند.

کار در کلاس

درستی یا نادرستی گزاره‌های سوری زیر را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) هر عدد اوّل، فرد است.

ب) $\exists x \in \mathbb{N}\ ;\ 2x^2 + 3x + 1 = 0$

پ) $\exists x \in \mathbb{Z}\ ;\ 2x^2 + 3x + 1 = 0$

ت) برای هر عدد طبیعی n ، $n!$ عددی گویاست.

ث) در آمار، هر متغیّر ترتیبی یک متغیّر کیفی است.

ج) در احتمال، هر مجموعه پیشامد زیر مجموعه فضای نمونه است.

چ) در فضای نمونهٔ S، پیشامدی مانند A وجود دارد به طوری که $P(A)>1$.

ح) هر معادله درجهٔ دوم، حداقل یک ریشهٔ حقیقی دارد.

نقیض گزاره‌های سوری

گزارهٔ «**علی به مدرسه رفت**» را در نظر بگیرید و نقیض آن را در زیر بنویسید.

....

معمولاً برای نقیض کردن یک گزاره، فعل آن را منفی می‌کنند. اکنون گزاره زیر را در نظر بگیرید و نقیض آن را بنویسید.

هر آسیایی، ایرانی است.

....

در محاوره معمولاً این اشتباه رخ می‌دهد که برای نوشتن نقیض این گزاره، فقط فعل آن را منفی می‌کنند و می‌نویسند :

هر آسیایی، ایرانی نیست.

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید، ارزش دو گزارهٔ قبل(«هر آسیایی، ایرانی است» و «هر آسیایی، ایرانی نیست») نادرست است و این غیر ممکن است (چرا؟) بنابراین، جملهٔ دوم نمی‌تواند نقیض جملهٔ اوّل باشد.

برای رفع این مشکل؛ فرض کنیم A مجموعه مردمان آسیا و ایرانی بودن x را با $P(x)$ نمایش دهیم؛ بنابراین، گزارهٔ «هر آسیایی، ایرانی است» به صورت $\forall x \in A; P(x)$ بیان می‌شود.

چون ارزش این گزاره : « $\forall x \in A; P(x)$ » نادرست است، پس ارزش گزارهٔ نقیض آن، یعنی : $\sim(\forall x \in A; P(x))$ باید درست باشد. از آنجا که ارزش گزارهٔ $(\forall x \in A; P(x))$ نادرست است، پس وجود دارد $x \in A$ به‌طوری که $P(x)$ نادرست است؛ بنابراین ارزش $\sim P(x)$ درست می‌باشد، در نتیجه ارزش گزارهٔ $\exists x \in A; \sim P(x)$ درست است و ارزش این گزاره با ارزش گزارهٔ $\sim(\forall x \in A; P(x))$ یکسان است، بنابراین داریم :

$$\sim(\forall x; P(x)) \equiv \exists x; \sim P(x)$$

در این صورت، نقیض گزارهٔ «هر آسیایی، ایرانی است» به‌صورت زیر است :

«بعضی از آسیایی‌ها، ایرانی نیستند»

به همین ترتیب می‌توان نقیض گزاره‌ای را که سور وجودی دارد، به صورت زیر نوشت :

$$\sim(\exists x; P(x)) \equiv \forall x; \sim P(x)$$

مثال : ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید و سپس نقیض هریک را بنویسید.

الف) $\forall x \in \mathbb{R}; x^{۲} > ۰$ ب) $\exists y \in \mathbb{R}; y < ۰ \wedge y^{۲} \leq ۱$

حل) الف) ارزش این گزاره نادرست است؛ چون $x=0$، مثالی نقض برای آن است.

$$\sim(\forall x\in\mathbb{R};x^2>0)\equiv\exists x\in\mathbb{R};x^2\not>0\equiv\exists x\in\mathbb{R};x^2\leq 0$$

ب) درست است؛ زیرا $y=-1$ در آن صدق می‌کند، پس مجموعهٔ جواب آن ناتهی است.

$$\sim(\exists y\in\mathbb{R};y<0\wedge y^2\leq 1)\equiv\forall y\in\mathbb{R};\sim(y<0\wedge y^2\leq 1)$$
$$\equiv\forall y\in\mathbb{R};y\geq 0\vee y^2>1$$

تمرین

۱ در جاهای خالی عدد یا علامت مناسب قرار دهید، به‌طوری که گزاره‌های حاصل دارای ارزش درست باشند.

الف) $(0/1)^3\ \square\ (0/1)^5$

ب) اگر $0^\circ<\alpha<45^\circ$، $\text{Sin}\alpha\ \square\ \text{Cos}\alpha$.

پ) نمودار تابع $y=x^2$ از نقطه $\square$ می‌گذرد.

ت) $-(x-4)^2\ \square\ 0$

ث) $y^2=x^2$ تابع $\square$

ج) اگر $x^2=a$ آن‌گاه $x=\square$.

۲ نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) اگر $0<x<1$، آن‌گاه $x^2<x$

ب) ابوالوفا محمد بوزجانی، ریاضی‌دان است.

پ) $a\in\{b,c,d\}$

ت) ۲ عددی زوج است یا عدد π گویاست.

ابوالوفا محمد بوزجانی
(۳۸۸ــ۳۲۸ قمری)

۳ ارزش گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید.

الف) $(2<3)\wedge(4+3=10)$

ب) $(5>3)\vee((-1)^2+1=0)$

پ) $(\frac{1}{2}\neq\frac{3}{6})\vee(1\in\{2,3,4\})$

ت) اگر عدد ۴ فرد باشد، آن‌گاه ۴ مربع کامل نیست.

ث) ۲ عدد اوّل نیست، اگر و تنها اگر ۲ مربع کامل است.

ج) $2>3\Leftrightarrow -2<-3$

ج) اگر $a\in\{b\}$ آن‌گاه $a=b$ و برعکس.

۴ جدول زیر را کامل کنید.

گزارهٔ p	گزارهٔ q	ارزش p	ارزش q	ارزش (p⇒q)	ارزش (p∧q)
عدد ۲ زوج است.					د
	$1\not<2$			ن	
$2\in\{1,2\}$					ن
	عدد ۷ اوّل است.			د	

۵ جدول ارزش‌های هر یک از گزاره‌های زیر را رسم کنید.

الف) $p\wedge\sim q$

ب) $\sim p\wedge p$

پ) $\sim p\vee p$

ت) $(p\vee q)\wedge\sim p$

ث) $(p\vee q)\Leftrightarrow q$

ج) $\sim p\Leftrightarrow\sim q$

۶ با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید که :

الف) $p\Rightarrow p\equiv T$

ب) $p\vee F\equiv p$

پ) $p\wedge T\equiv p$

ت) $\sim(p\Rightarrow q)\equiv p\wedge\sim q$

ث) $p\wedge(q\vee p)\equiv p$

ج) $p\vee(q\wedge p)\equiv p$

چ) $p\Rightarrow(q\Rightarrow r)\equiv(p\wedge q)\Rightarrow r$

ح) $\sim(p\Leftrightarrow q)\equiv\sim p\Leftrightarrow q$

۷ ثابت کنید هرگاه n عددی صحیح و $n^۲$ مضرب ۳ باشد، آن‌گاه n نیز مضرب ۳ است.

۸ گزاره‌های زیر را با استفاده از نمادهای $\forall, \exists$ بنویسید و ارزش هر یک را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) هر عدد طبیعی زوج یا فرد است.

ب) برای بعضی از مقادیر a در مجموعه اعداد حسابی داریم : $a^۲<۰$.

پ) همهٔ اعداد اوّل فرداند.

ت) عدد صحیح مثبتی وجود دارد مانند x به‌طوری که $۲x-۱>۵$

ث) حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوسش، بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است.

ج) به‌ازای بعضی از مقادیر حقیقی داریم $x^۳=x$.

۹ هرگاه $A=\{x\in\mathbb{Z}\,|\,۰<x\leq ۵\}$ دامنهٔ متغیر باشد، ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

الف) $\exists x\in A;x+۴=۱۰$

ب) $\forall x\in A;x+۲\leq ۹$

پ) $\exists x\in A;x+۳\leq ۴$

ت) $\forall x\in A;x+۱\geq ۶$

۱۰ ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید، سپس نقیض هر یک را بنویسید.

الف) $\forall x\in\mathbb{R};\dfrac{x^۲-۱}{x-۱}=x+۱$

ب) $\forall n\in\mathbb{N};(۲^n+۱)\in P$

پ) $\forall x\in(-\infty,۰);x-\dfrac{۱}{x}\leq -۲$

ت) $\exists y\in\mathbb{R};\dfrac{y-۳}{۵}=۰$

درس ۲ جبر مجموعه‌ها

یادآوری : در سال‌های قبل با مفهوم مجموعه آشنا شده‌اید؛ برای مثال، مجموعهٔ اعداد اوّل یک‌رقمی به صورت زیر است :

$A=\{۲, ۳, ۵, ۷\}$

می‌توان این مجموعه را با نمادهای ریاضی به صورت $A=\{x \in P \mid x<۱۰\}$ نوشت که در آن P مجموعهٔ اعداد اوّل است. چون عدد ۲ متعلق به مجموعهٔ A است، می‌نویسیم : $۲\in A$، از طرفی واضح است که $۶\notin A$ یعنی عدد ۶ به مجموعهٔ A تعلق ندارد.

تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه

فعالیت

مجموعه $A=\{a , b , c\}$ را در نظر بگیرید.

۱ همهٔ زیرمجموعه‌های A را بنویسید.

۲ با دو رقم ۰ و ۱ می‌توانیم زیرمجموعه $B=\{b,c\}$ از مجموعهٔ A را با کد سه‌رقمی ۰۱۱ مشخص کنیم؛ چون $a\notin B$ متناظر با آن کد ۰ و $c\in B$ و b متناظر با آنها کد ۱ را در نظر گرفته‌ایم. همچنین زیرمجموعهٔ $\{a\}\subseteq A$ را با کد ۱۰۰ متناظر می‌کنیم. اکنون شما بقیهٔ زیرمجموعه‌های A را با کدهایی سه‌رقمی نظیر کنید.

۳ با این روش کدگذاری و به کمک اصل ضرب (سال گذشته در فصل شمارش، بدون شمردن خوانده‌اید) تعداد زیرمجموعه‌های A را تعیین کنید.

رقم سوم　　رقم دوم　　رقم اوّل

۴ فرض کنید $A=\{a_۱ , a_۲ , a_۳ , a_۴\}$، با روش کدگذاری با رقم‌های ۰ و ۱ و به کمک اصل ضرب تعیین کنید که A چند زیرمجموعه دارد.

رقم چهارم　　رقم سوم　　رقم دوم　　رقم اوّل

۵ اگر $A=\{a_1 , a_2 , a_3 , \ldots , a_n\}$ در این صورت، با این روش کدگذاری مشخص کنید که A چند زیرمجموعه دارد.

رقم nام … رقم سوم رقم دوم رقم اول

فرض کنید A یک مجموعه n عضوی باشد، تعداد زیرمجموعه‌های A برابر با 2^n است.

مثال : مجموعه $A=\{a , \{a\} , \varnothing\}$ را در نظر بگیرید و همهٔ زیرمجموعه‌های A را در یک مجموعه بنویسید.

مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های A، مجموعهٔ توانی A نامیده می‌شود و آن را با $P(A)$ نمایش می‌دهیم.
اگر A، n عضو داشته باشد، در این صورت $P(A)$، 2^n عضو دارد.
اگر $A \subseteq B$ به‌طوری که $A \neq B$، آن‌گاه A زیرمجموعهٔ محض یا سرهٔ B نامیده می‌شود.

مثال : مجموعهٔ متناهی A را در نظر بگیرید، اگر ۲ عضو به اعضای A اضافه کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۴۸ واحد افزایش می‌یابد، مشخص کنید A چند عضوی است.

حل : فرض کنیم A، n عضو داشته باشد، پس دارای 2^n زیرمجموعه است؛ اگر ۲ عضو به اعضای A اضافه شود، در این صورت تعداد زیرمجموعه‌های A، ۴۸ واحد افزایش می‌یابد؛ یعنی در این حالت، تعداد زیرمجموعه‌های این مجموعه برابر با 2^n+48 است.

از طرفی وقتی ۲ عضو به اعضای A اضافه می‌شود، تعداد زیرمجموعه‌های مجموعه جدید، برابر است با 2^{n+2} است.

بنابراین داریم :

$$2^n+48 = 2^{n+2} = 2^n \times 2^2$$

$$\Rightarrow 2^n+48=4\times 2^n \Rightarrow 4\times 2^n-2^n=48$$

$$\Rightarrow 3\times 2^n=48 \Rightarrow 2^n=16=2^4 \Rightarrow n=4$$

در نتیجه مجموعهٔ A، چهار عضوی است.

تعریف زیر مجموعه به کمک نمادهای ریاضی

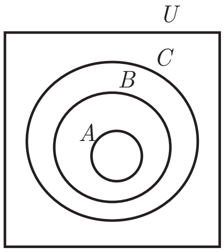
فرض کنید A و B دو مجموعه باشند به طوری که هر عضو A، عضوی از B باشد، در این صورت A را زیرمجموعهٔ B نامیده و می‌نویسند $A\subseteq B$. اگر عضوی در A وجود داشته باشد، به طوری که آن عضو در مجموعهٔ B نباشد، در این صورت A زیرمجموعه B نیست و می‌نویسند $A \not\subseteq B$. با استفاده از نمادهای ریاضی می‌توان تعریف‌های $A\subseteq B$ و $A \not\subseteq B$ را به صورت زیر نوشت :

$$A\subseteq B \Leftrightarrow \forall x \,;\, (x\in A \Rightarrow x\in B)$$

$$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x \,;\, (x\in A \wedge x\notin B)$$

روش عضوگیری دلخواه

هرگاه بخواهیم ثابت کنیم $A\subseteq B$ و اعضای مجموعه‌های A و B در دسترس نباشند، کافی است عضوی دلخواه مانند x از A فرض کنیم، سپس با استفاده از فرض‌های داده شده نشان دهیم که x در B وجود دارد. از آنجا که x دلخواه بوده است در واقع هر عضو A در B است. بنابراین، با توجه به تعریف زیرمجموعه، ثابت کرده‌ایم $A\subseteq B$. در زیر چند ویژگی مهم در مجموعه‌ها با روش عضوگیری دلخواه ثابت شده است.



ویژگی ۱ــ فرض کنید A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، به طوری که $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$ ثابت کنید $A\subseteq C$.

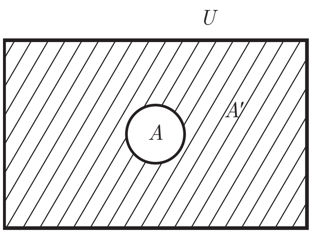
اثبات : برای اثبات $A\subseteq C$، باید ثابت کنیم که : $\forall x\ ;\ (x\in A \Rightarrow x\in C)$

برای این منظور از فرض‌ها یعنی $A\subseteq B$ و $B\subseteq C$ استفاده می‌کنیم.

$$\forall x\ ;\ x\in A \overset{A\subseteq B}{\Rightarrow} x\in B \overset{B\subseteq C}{\Rightarrow} x\in C$$

در نتیجه داریم :

$$\forall x\ ;\ (x\in A \Rightarrow x\in C) \Rightarrow A\subseteq C$$



ویژگی ۲ــ فرض کنید A و B دو مجموعه با مرجع U باشند و $A\subseteq B$. ثابت کنید $B'\subseteq A'$. (A' و B' به ترتیب متمم‌های مجموعه‌های A و B هستند).

قبل از اثبات این ویژگی، تعریف متمم یک مجموعه را یادآوری می‌کنیم. فرض کنیم A مجموعه‌ای با مرجع U باشد، متمم مجموعهٔ A برابر با مجموعهٔ اعضایی از U است که متعلق به مجموعهٔ A نباشند و آن را با A' نمایش می‌دهند.

$$A'=\{x\in U \mid x\notin A\}$$

از این تعریف نتیجه می‌گیریم که اگر $x\in A$ آن‌گاه $x\notin A'$ یا اگر $x\in A'$ آن‌گاه $x\notin A$.

اثبات : برای اینکه ثابت کنیم $B'\subseteq A'$ باید نشان دهیم که : $\forall x\ ;\ (x\in B' \Rightarrow x\in A')$ بنابراین داریم :

$$\forall x\ ;\ (x\in B' \Rightarrow x\notin B \overset{A\subseteq B}{\Rightarrow} x\notin A \Rightarrow x\in A')$$

در نتیجه داریم :

$$\forall x\ ;\ (x\in B' \Rightarrow x\in A') \Rightarrow B'\subseteq A'$$

ویژگی ۳ــ برای هر مجموعه دلخواه مانند A با مجموعه مرجع U ثابت کنید : $\varnothing\subseteq A$.

اثبات : برای اثبات $\varnothing\subseteq A$ باید نشان دهیم که ارزش گزاره شرطی $\forall x\ ;\ (x\in\varnothing \Rightarrow x\in A)$ همواره درست است. چون در این گزارهٔ شرطی، ارزش مقدّم یعنی $x\in\varnothing$ نادرست است، پس به انتفای مقدّم ارزش گزارهٔ شرطی درست است و در نتیجه $\varnothing\subseteq A$.

کار در کلاس

۱ برای مجموعه‌های A و B با مرجع U ثابت کنید که $A\subseteq A\cup B$.

اثبات :

$$\forall x;\ (x\in A\Rightarrow x\in A \vee x\in B)\Rightarrow x\in A\cup B$$

بنابراین داریم :
$$\forall x;(x\in A\Rightarrow x\in A\cup B)\Rightarrow A\subseteq A\cup B$$

درستی استدلال بالا را توضیح دهید.

۲ فرض کنیم A و B و C و D چهار مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید : اگر $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$ آن‌گاه $A\cup C\subseteq B\cup D$.

اثبات : جاهای خالی را پر کنید :

$$\forall x;[x\in(A\cup C)]\Rightarrow\begin{cases}x\in A\Rightarrow\cdots & (\text{زیرا } A\subseteq B)\\ \vee & \qquad\vee\\ \cdots\ \Rightarrow\ x\in D & (\text{زیرا } C\subseteq D)\end{cases}\Rightarrow x\in B\ \vee\ x\in D\Rightarrow\ldots\ldots$$

بنابراین داریم :

$$\forall x;\ [x\in(A\cup C)\Rightarrow x\in(B\cup D)]\Rightarrow\ldots\ldots$$

۳ فرض کنیم A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید : اگر $A\subseteq C$ و $B\subseteq C$ آن‌گاه $(A\cup B)\subseteq C$.

راهنمایی : از ویژگی قسمت ۲ استفاده کنید.

دو مجموعه مساوی

فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند به طوری که هر عضو A، عضوی از B و هر عضو B عضوی از A باشد؛ یعنی $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$، در این صورت A با B مساوی است و می‌نویسیم : $A=B$. به عبارت دیگر می‌توان تساوی دو مجموعه را به صورت زیر نوشت :

$$A=B\Leftrightarrow[(A\subseteq B)\wedge(B\subseteq A)]$$

کار در کلاس

فرض کنید $A=\{۱ ,۲\}$، کدام یک از مجموعه‌های زیر با A مساوی است؟ (با ذکر دلیل).

الف) $\{x\in\mathbb{Q}\mid x^۲-۳x+۲=۰\}$ ب) $\{x\in\mathbb{R}\mid ۱\leq x\leq ۲\}$

پ) $\{x\in\mathbb{Q}\mid ۲x^۲+۳x+۱=۰\}$ ت) $\{x\in\mathbb{N}\mid ۱\leq x\leq ۲\}$

مثال : فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید : $A\cap B=B\cap A$. (خاصیت جابه‌جایی اشتراک).

اثبات : برای اثبات حکم باید درستی دو رابطهٔ زیر را نشان دهیم :

$$A\cap B\subseteq B\cap A\quad(۱)\ ;\quad B\cap A\subseteq A\cap B\qquad(۲)$$

اثبات (۱) :

$$\forall x;\ [x\in(A\cap B) \Rightarrow x\in A \wedge x\in B \Rightarrow x\in B \wedge x\in A$$ (طبق خاصیت جابه‌جایی $\wedge$)

$$\Rightarrow x \in B\cap A]$$

به روش مشابه می‌توان درستی رابطهٔ (۲) را نشان داد.

مثال : فرض کنیم A و B دو مجموعه با مرجع U باشند؛ ثابت کنید که اگر $A\subseteq B$ آن‌گاه $A-B=\varnothing$.

اثبات :

$$A-B=\{x\in U \mid x\in A \wedge x\notin B\} = \{x\in U \mid x\in B \wedge x\notin B\}=\varnothing$$ (زیرا $A\subseteq B$)

$$\Rightarrow A-B=\varnothing$$

قوانین و اعمال بین مجموعه‌ها

حال به بررسی قوانین و خواص مربوط به اعمال اجتماع و اشتراک می‌پردازیم، شما در اعداد حقیقی و برای دو عمل جمع (+) و ضرب (×) قوانینی چون جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیریِ ضرب نسبت به جمع را می‌شناسید؛ یعنی می‌دانیم :

خاصیت جابه‌جایی $\quad$ I) $\forall\ a,b\in\mathbb{R}\ ;\ a+b=b+a$

خاصیت شرکت‌پذیری $\quad$ II) $\forall\ a,b,c\in\mathbb{R}\ ;\begin{cases}a+(b+c)=(a+b)+c\\ a\times(b\times c)=(a\times b)\times c\end{cases}$

خاصیت توزیع‌پذیری «×» نسبت به «+» $\quad$ III) $\forall\ a,b,c\in\mathbb{R}\ ;\ a\times(b+c)=(a\times b)+(a\times c)$

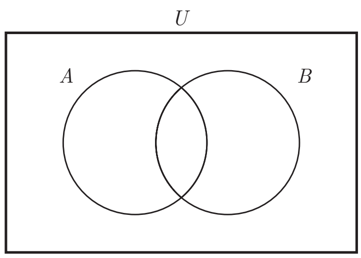
توجه دارید که عمل + نسبت به عمل × توزیع‌پذیر نیست، (با ذکر یک مثال نقض این مطلب را نشان دهید).

در مجموعه‌ها دو عمل $\cup$ و $\cap$ خواصی مشابه خواص فوق داشته و این خواص با توجه به خواصی که در گزاره‌ها برای دو ترکیب «$\vee$» و «$\wedge$» بیان شد قابل بررسی و اثبات می‌باشند. در فعالیت زیر، ابتدا توسط نمودار ون برقراری این خواص را مشاهده می‌کنید.

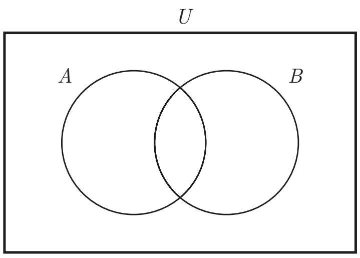
فعالیت

۱ در هر یک از حالت‌های زیر مجموعه‌های خواسته شده را هاشور بزنید. (برای هاشور زدن مانند حالت (ت) از دو رنگ استفاده کنید).

الف)

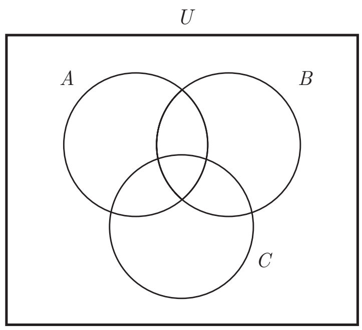


$B\cup A$

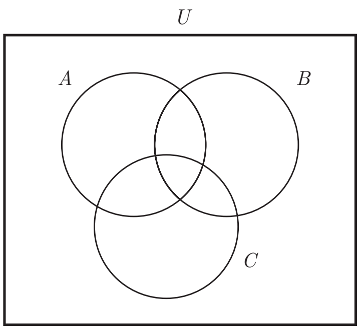


$A\cup B$

ب)

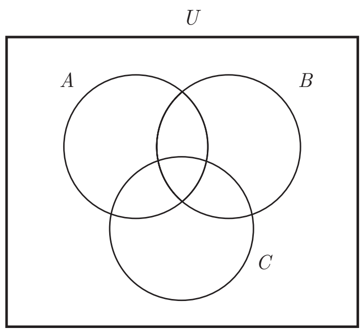


$A\cup(B\cup C)$

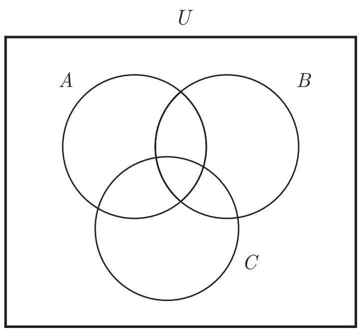


$(A\cup B)\cup C$

پ)

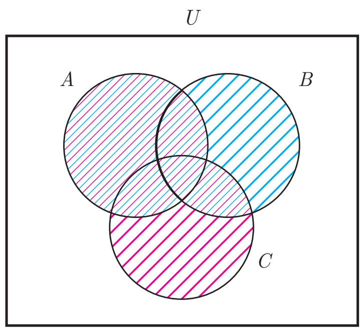


$(A\cap B)\cup(A\cap C)$

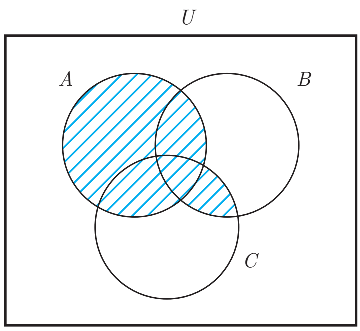


$A\cap(B\cup C)$

ت)



$(A\cup B)\cap(A\cup C)$



$A\cup(B\cap C)$

۲ با فرض اینکه $U=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ و $A=\{۱,۲,۳\}$ و $B=\{۳,۴,۵\}$ و $C=\{۱,۲,۵,۶\}$ در این صورت، درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $A\cap B=B\cap A$

ب) $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

پ) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

یادآوری : برای اثبات تساوی بین دو مجموعه A و B می‌بایست ثابت کنیم : $A\subseteq B$ و $B\subseteq A$.

کار در کلاس

با توجه به تعریف اعمال اجتماع و اشتراک و خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع‌پذیری دو ترکیب فصلی و عطفی می‌خواهیم این خواص یا قوانین را برای «$\cup$» و«$\cap$» اثبات کنیم، شما این اثبات‌ها را کامل کنید :

۱ ثابت کنید، برای هر دو مجموعهٔ دلخواه A و B از مجموعهٔ مرجع U، داریم : $A\cup B=B\cup A$

تعریف اجتماع	$A\cup B=\{x\in U \mid x\in A\vee \ldots\}$
جابه‌جایی «$\vee$»	$=\{x\in U \mid x\in B\vee \ldots\}$
تعریف اجتماع	$=B\cup A$

۲ ثابت کنید، برای سه مجموعهٔ دلخواه A، B، C از مجموعهٔ مرجع U، داریم :

$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$A\cup(B\cup C)=\{x\in U|\ \dots\ \vee x\in(B\cup C)\}$ تعریف اجتماع

$=\{x\in U|x\in A\vee(x\in B\vee\dots\dots)\}$ تعریف اجتماع

$=\{x\in U|(\dots\dots\vee x\in B)\vee x\in C\}$ شرکت‌پذیری «$\vee$»

$=\{x\in U|x\in(\dots\dots)\vee x\in C\}$ تعریف اجتماع

$=(A\cup B)\cup C$ تعریف اجتماع

۳ با استفاده از روش عضوگیری دلخواه، خاصیت توزیع‌پذیری «$\cup$» نسبت به «$\cap$» را ثابت کنید.

یعنی ثابت کنید : $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

$\forall x$ ؛ فرض کنیم $x\in[A\cup(B\cap C)]$

$\Rightarrow[x\in A\ \vee(x\in\dots\dots)]$ تعریف اجتماع

$\Rightarrow[x\in A\vee(x\in B\wedge x\in\dots\dots)]$ تعریف اشتراک

$\Rightarrow[(x\in A\ \vee\dots\dots)\wedge(\dots\dots\vee x\in C)]$ توزیع‌پذیری «$\vee$» نسبت به «$\wedge$»

$\Rightarrow[x\in\ \dots\dots\wedge x\in\dots\dots]$ تعریف «$\cup$»

$\Rightarrow x\in[(A\cup B)\cap\dots\dots]$ تعریف اشتراک

$\Rightarrow A\cup(B\cap C)\subseteq\dots\dots$

و به همین ترتیب ثابت می‌شود $\dots\dots\subseteq(A\cup B)\cap(B\cup C)$ بنابراین، دو مجموعه با هم برابرند. (توجه داریم که از طرف دیگر، خاصیت توزیع‌پذیری اصطلاحاً همان فاکتورگیری است؛ یعنی رسیدن از سمت راست تساوی به سمت چپ تساوی به معنای فاکتورگیری از «$A\cup$» است.)

تذکر : با توجه به تعریف متمم یک مجموعه و تعاریف اجتماع و اشتراک و مجموعه‌های مرجع و تهی تساوی‌های زیر برقرارند :

۱) $A\cup A'=U$ ۲) $A\cap A'=\varnothing$

۳) $A\cup U=U$ ۴) $A\cap U=A$

مثال ۱ : با استفاده از خواص فوق ثابت کنید : (U مجموعهٔ مرجع فرض شده است.)

الف) $(A\cup B)\cap(B'\cup A)=A$ ب) $(C\cap A)\cup(A'\cap C)=C$

پ) $A\cup(B\cup A')=U$ ت) $A-B=A\cap B'$

الف) $(A\cup B)\cap(B'\cup A)=(A\cup B)\cap(A\cup B')$ — جابه جایی

$=A\cup(B\cap B')$ — خاصیت توزیع پذیری(به اصطلاح فاکتورگیری)

$=A\cup\varnothing$

$=A$

ب) $(C\cap A)\cup(A'\cap C)=(C\cap A)\cup(C\cap A')$ — جابه‌جایی

$=C\cap(A\cup A')=C\cap U=C$ — توزیع پذیری

پ) $A\cup(B\cup A')=A\cup(A'\cup B)$ — جابه‌جایی

$=(A\cup A')\cup B=U\cup B=U$ — شرکت‌پذیری

ت) $A-B=\{x\in U|x\in A\wedge x\notin B\}=\{x\in U|x\in A\wedge x\in B'\}$ — تعریف متمم

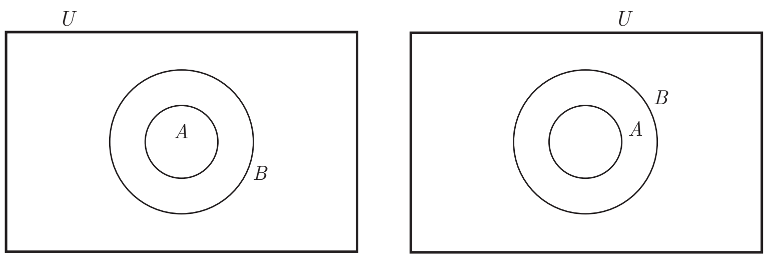
$=A\cap B'$ — تعریف اشتراک

قضیه : برای هر دو مجموعهٔ دلخواه از مجموعهٔ مرجع U ، داریم :

الف) $A\subseteq B \Leftrightarrow A\cup B=B$

ب) $A\subseteq B \Leftrightarrow A\cap B=A$

برهان : قبل از اثبات دقیق، ابتدا در نمودارهای زیر $(A\cup B)$ و $(A\cap B)$ را هاشور بزنید.
همان‌طور که ملاحظه می‌کنید هر یک از حالت‌های الف و ب،قضیه‌هایی دو شرطی بوده و برای اثبات هر یک از آنها باید دو قضیهٔ شرطی را ثابت کنیم.



$(A\cup B)$ $(A\cap B)$

الف) فرض کنیم : $A\subseteq B$ و ثابت می کنیم : $A\cup B=B$ برای این منظور باید ثابت کنیم : $(A\cup B)\subseteq B$ و $B\subseteq(A\cup B)$ ، رابطهٔ $B\subseteq(A\cup B)$ (۱) با توجه به تعریف اجتماع بدیهی است؛ بنابراین، به اثبات رابطه $(A\cup B)\subseteq B$ می‌پردازیم :

می‌دانیم: $B\subseteq B$
طبق فرض: $A\subseteq B$

$\Rightarrow (A\cup B)\subseteq(B\cup B)\Rightarrow(A\cup B)\subseteq B$ (۲)

(با توجه به (۱) و (۲) تساوی $A\cup B=B$ اثبات شده و حکم به دست می‌آید.)

(۱) و (۲) $\Rightarrow (A\cup B)=B$

حال فرض کنیم $A\cup B=B$، ثابت می‌کنیم $A\subseteq B$؛

با توجه به تعریف اجتماع می‌دانیم : $A\subseteq (A\cup B)\xrightarrow[\text{فرض}]{A\cup B=B} A\subseteq B$

ب) ابتدا فرض کنیم $A\subseteq B$، تساوی $A\cap B=A$ را اثبات می‌کنیم :

(۱) با توجه به تعریف اشتراک داریم : $(A\cap B)\subseteq A$

(۲) $\begin{cases} A\subseteq A : \text{می‌دانیم} \\ A\subseteq B : \text{طبق فرض} \end{cases} \Rightarrow (A\cap A)\subseteq (A\cap B)\Rightarrow A\subseteq (A\cap B)$

(با توجه به (۱) و (۲) تساوی $A\cap B=A$، به‌دست می‌آید.)

(۱) و (۲) $\Rightarrow (A\cap B)=A$

حال فرض می‌کنیم : $A\cap B=A$، ثابت می‌کنیم $A\subseteq B$؛

با توجه به تعریف اشتراک می‌دانیم : $(A\cap B)\subseteq B\xrightarrow[\text{فرض}]{A\cap B=A} A\subseteq B$

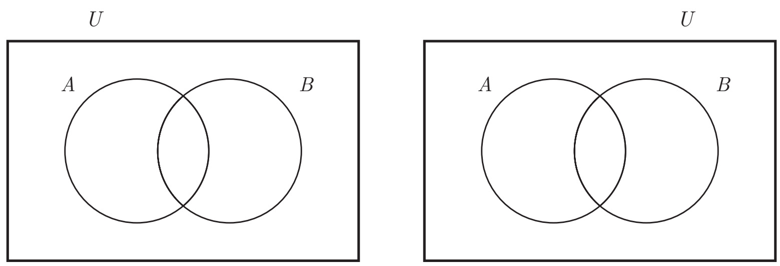
کار در کلاس

(قوانین جذب یا همپوشانی) اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه از مجموعهٔ مرجع U باشند، می‌خواهیم تساوی‌های زیر را که به قوانین جذب معروف‌اند، با استفاده از قضیهٔ قبل و تعاریف اجتماع و اشتراک اثبات کنیم :

الف) $A\cup (A\cap B)=A$

ب) $A\cap (A\cup B)=A$

ابتدا با استفاده از نمودار وِن و هاشور زدن، درستی قوانین جذب را نشان دهید :



$A\cup(A\cap B)$ $\quad$ $A\cap(A\cup B)$

در قضیهٔ قبل ملاحظه کردید که اگر $C\subseteq D$ در این صورت $(C\cup D)=D$ و $(C\cap D)=C$ است.

اثبات الف) طبق تعریف اشتراک می‌دانیم : $(A\cap B)\subseteq A\xrightarrow{\text{قضیه}} A\cup(\ldots\ldots)=\ldots\ldots\ldots$

اثبات ب) طبق تعریف اجتماع می‌دانیم : $A\subseteq (A\cup B)\xrightarrow{\text{قضیه}} A\cap(\ldots\ldots)=\ldots\ldots\ldots$

روش دیگری برای اثبات قوانین جذب نیز وجود دارد که شما با پرکردن جاهای خالی اثبات را کامل کنید.

الف) $A\cup(A\cap B)=(A\cap U)\cup(A\cap B)$

توزیع‌پذیری $=A\cap(\ldots\ldots)$

$=A\cap\ldots\ldots=A$

ب) $A\cap(A\cup B)=(A\cup\ldots.)\cap(A\cup B)$

توزیع‌پذیری $=A\cup(\ldots\ldots)$

$=A\cup\ldots\ldots.=A$

مثال : عبارت‌های زیر را ساده کنید :

الف) $(A\cap B)\cup((B\cup C)\cap[(B\cup A)\cap B])$

$$(A\cap B)\cup((B\cup C)\cap[\underbrace{(B\cup A)\cap B}_{\text{جذب}}])=(A\cap B)\cup[\underbrace{(B\cup C)\cap\ldots.}_{\text{جذب}}]$$

$$=\underbrace{(A\cap B)\cup\ldots.}_{\text{جذب}}=\ldots\ldots$$

ب) $(A\cup B')\cap[(B\cap C)\cup(B'\cup A)]$

جابه‌جایی $$(A\cup B')\cap[(B\cap C)\cup(B'\cup A)]=(\underbrace{A\cup B'}_{E})\cap[(\underbrace{B\cap C}_{D})\cup(\underbrace{A\cup B'}_{E})]$$

جذب $$=(\underbrace{A\cup B'}_{E})$$

مثال : درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $A-B=B'-A'$

ب) $(X\subseteq A)\wedge(X\subseteq A')\Rightarrow X=\varnothing$

پ) $(A-B)\cap(B-A)=\varnothing$

ت) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$

ث) $(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)=A\cup B$

حل :

الف) $A-B=A\cap B'=B'\cap A=B'-A'$

(۱) ب) $\begin{cases}X\subseteq A\\ X\subseteq A'\end{cases}\Rightarrow(X\cap X)\subseteq(A\cap A')\Rightarrow X\subseteq\ldots\ldots.$

از طرفی می‌دانیم $\varnothing\subseteq X$ و بنابراین : $X=\varnothing$

پ) $(A-B)\cap(B-A)=(A\cap B')\cap(B\cap A')$

شرکت‌پذیری $=[(A\cap B')\cap B]\cap A'$

شرکت‌پذیری $=[A\cap(B'\cap B)]\cap A'$

تعریف متمم $=(A\cap\varnothing)\cap A'$

$=\varnothing\cap A'=\varnothing$

ت) $(A\cup B)-C=(A\cup B)\cap C'$

توزیع‌پذیری «$\cap$» نسبت به «$\cup$» $=(A\cap C')\cup(B\cap C')$

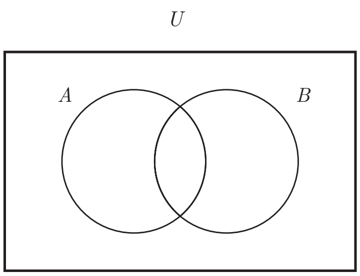
تبدیل اشتراک به تفاضل $=(A-C)\cup(B-C)$

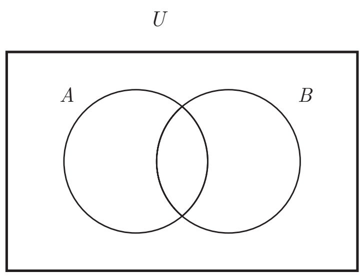
	ث) $(A-B)\cup(A\cap B)\cup(B-A)$
شرکت‌پذیری اجتماع	$=[(A-B)\cup(A\cap B)]\cup(B-A)$
تبدیل تفاضل به اشتراک	$=[(A\cap B')\cup(A\cap B)]\cup(B\cap A')$
توزیع‌پذیری	$=[A\cap(\ldots\ldots\cup\ldots\ldots)]\cup(B\cap A')$
تعریف متمم	$=(A\cap U)\cup(B\cap A')$
تعریف مرجع	$=A\cup(B\cap A')$
توزیع‌پذیری	$=(A\cup\ldots\ldots)\ \ldots\ldots\ (A\cup\ldots\ldots)$
تعریف متمم	$=(A\cup B)\cap U$
تعریف مرجع	$=A\cup B$

قوانین دمورگان

فعالیت

۱ فرض کنیم A و B دو مجموعه از مجموعهٔ مرجع U باشند،روی شکل سمت چپ، $(A\cup B)'$ و روی نمودار سمت راست، $(A'\cap B')$ را هاشور بزنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟





۲ اگر فرض کنیم : $U=\{$۱ و ۲ و .... و ۱۰$\}$ و $A=\{$۲و۳و۵ و ۸$\}$ و $B=\{$۳و۴و۶و۸$\}$ هر یک از مجموعه‌های $(A\cap B)'$ و $(A'\cup B')$ را تشکیل داده و با هم مقایسه کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

تساوی‌های زیر را که به **قوانین دمورگان** معروف‌اند برای هر دو مجموعهٔ دلخواه از مجموعهٔ مرجع U برقرارند :

الف) $(A\cup B)'=(A'\cap B')$

ب) $(A\cap B)'=(A'\cup B')$

با استفاده از روش عضوگیری دلخواه وتعریف تساوی بین دو مجموعه،تساوی $(A\cup B)'=(A'\cap B')$ را اثبات کنید.

(باید ثابت کنید،$(A\cup B)'\subseteq(A'\cap B')$ و $(A'\cap B')\subseteq(A\cup B)'$)

$\forall x\,;[x\in(A\cup B)'\Rightarrow x\notin(A\cup B)\Rightarrow\ldots\ldots\wedge\ x\notin B$

$\Rightarrow x\in A'\wedge\ \ldots\ldots\Rightarrow x\in(A'\cap B')]\Rightarrow(A\cup B)'\subseteq(A'\cap B')$

روابط صفحهٔ قبل برگشت‌پذیرند، شما به طریق مشابه نشان دهید که $(A\cup B)'\subseteq(A'\cap B')$ که در این صورت، تساوی الف اثبات می‌شود.

کار در کلاس

با استفاده از قوانین و خواص (جبر مجموعه‌ها) درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید:

ب) $(A-B)-C=(A-C)-B$ الف) $(A-B)'=(A'\cup B)$

پ) $A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C)$

مثال: با استفاده از جبر مجموعه‌ها درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

ب) $A\cap(B-C)=(A\cap B)-(A\cap C)$ الف) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$

ت) اگر $(A\cup B)=(A\cap B)$ آنگاه $A=B$ پ) $A-(B-C)=(A-B)-C$

حل:

الف)

تبدیل تفاضل به اشتراک	$(A-B)\cap(A-C)=(A\cap B')\cap(A\cap C')$
شرکت‌پذیری	$=[(A\cap B')\cap A]\cap C'$
جابه‌جایی	$=[A\cap(A\cap B')]\cap C'$
....	$=[(A\cap A)\cap B']\cap C'$
$A\cap A=A$	$=(A\cap B')\cap C'$
شرکت‌پذیری	$=A\cap(B'\cap C')$
تبدیل اشتراک به تفاضل	$=A-(B'\cap C')'$
قانون	$=A-(B\cup C)$

ب)

تبدیل تفاضل به اشتراک	$(A\cap B)-(A\cap C)=(A\cap B)\cap(A\cap C)'$
قانون دمورگان	$=(A\cap B)\cap(A'\cup C')$
توزیع‌پذیری	$=[(A\cap B)\cap A']\cup[(A\cap B)\cap C']$
قوانین جابه‌جایی و شرکت‌پذیری	$=[(A\cap A')\cap B]\cup[A\cap(B\cap C')]$
تبدیل اشتراک به تفاضل و تعریف متمم	$=(\varnothing\cap B)\cup[A\cap(B-C)]$
	$=\varnothing\cup[A\cap(B-C)]$
	$=A\cap(B-C)$

پ) با کمی تأمل پی می‌بریم که برای رسیدن از یک طرف تساوی به طرف دیگر، دچار مشکل می‌شویم و این کار انجام نمی‌شود، ولی برای اینکه ادعا کنیم این تساوی همواره برقرار نیست، کافی است مثال نقض بزنیم:

$A=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ و $B=\{۳,۴,۵\}$ و $C=\{۵,۶,۷\}$ و $U=\{۱,۲,........,۱۰\}$

$A-(B-C)=\{۱,۲,۳,۴,۵\}-\{۳,۴\}=\{۱,۲,۵\}$

$(A-B)-C=\{۱,۲\}-\{۵,۶,۷\}=..............$

ت) وقتی می‌نویسیم : $C=D$ ، یعنی C و D یک مجموعه‌اند، با دو نام و لذا وقتی بین مجموعه‌ها تساوی به کار می‌بریم، می‌توان نوشت طرفین تساوی را با هر مجموعه‌ای اجتماع، یا اشتراک بگیریم، یعنی از اینکه $C=D$ نتیجه می‌شود : $A\cup C=A\cup D$ و $A\cap C=A\cap D$

$$A\cup B=A\cap B \;\Rightarrow A\cap(A\cup B)=A\cap(A\cap B)$$

$$\xRightarrow{\text{قانون جذب و تعریف اشتراک}} A=(A\cap B) \xRightarrow{\text{قضیه}} A\subseteq B \qquad (۱)$$

$$(A\cup B)=(A\cap B) \Rightarrow A\cup(A\cup B)=\ldots\ldots\cup(A\cap B)$$

$$\xRightarrow{\text{قانون جذب و تعریف اجتماع}} (A\cup B)=A \xRightarrow{\text{قضیه}} \ldots\ldots\subseteq\ldots\ldots \qquad (۲)$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow A=B$$

روش دوم : دربارهٔ روش زیر که به اختصار نوشته شده است، با هم‌کلاسی خود گفت‌وگو کنید و توضیح دهید :

$$A\subseteq(A\cup B)=(A\cap B)\subseteq B \Rightarrow A\subseteq B$$

و به طریق مشابه ثابت می‌شود : $B\subseteq A$ و نتیجه می‌شود : $A=B$.

کار در کلاس

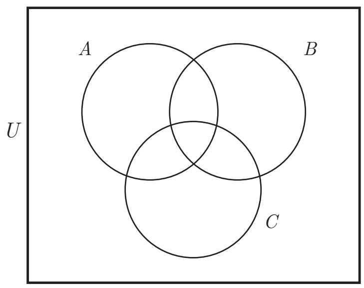
۱ اگر $A=\{۱, ۲, \ldots, ۱۰\}$ و $B=\{۵, ۶, \ldots, ۱۵\}$ و $U=\{۱, ۲, \ldots, ۲۰\}$ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $(A\cap B')\cup(A\cap B)$

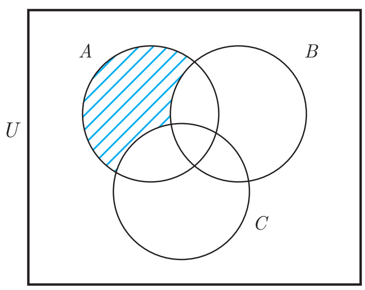
ب) $(A-B)\cup((A\cap B')\cap[(B-A)\cup A'])$

(راهنمایی : ابتدا با استفاده از جبر مجموعه‌ها عبارت‌ها را ساده کنید.)

۲ با توجه به نمودار ون که در روبه‌رو رسم شده است، مانند نمونه برای هر حالت و به صورت جداگانه بخشی را که به صورت توصیفی مشخص کرده‌ایم، هاشور بزنید.



الف) اعضایی که فقط در A باشند.



ب) اعضایی که فقط در یک مجموعه‌اند.

پ) اعضایی که در A و B باشند، ولی در C نباشند.

ت) اعضایی که در A یا B باشند، ولی در C نباشند.

ضرب دکارتی بین دو مجموعه

قبلاً با تعریف زوج مرتب آشنا شده‌اید و می‌دانید که «هر دو شیئی مانند x و y، تشکیل یک زوج می‌دهند که اگر برای آنها ترتیب قائل باشیم، به آن یک زوج مرتب گفته می‌شود و با نماد (x,y) نشان می‌دهیم» و البته می‌دانیم که $(x,y)=(z,t)$ اگر و تنها اگر $x=z$ و $y=t$.

عمل ضرب دکارتی بین دو مجموعهٔ A و B این امکان را برای ما فراهم می‌سازد تا مجموعهٔ جدیدی بسازیم که اعضای آن هر کدام یک زوج مرتب باشند و هر یک از این زوج‌های مرتب از اعضای A و B ساخته می‌شوند. بنابراین، مجموعهٔ حاصل دارای اعضایی از جنس زوج مرتب بوده و به‌اعضای A یا B شبیه نبوده و فقط اعضای A و B در ساختن آنها نقش دارند.

تعریف عمل ضرب دکارتی بین دو مجموعه : اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، $A\times B$ مجموعه‌ای است که به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$A\times B=\{(x,y)|x\in A\wedge y\in B\}$$

در تعریف قبل توجه دارید که در هر (x,y) متعلق به $A\times B$، همواره مؤلفه یا مختصِ اول، یعنی x باید از مجموعهٔ A و متناظراً مؤلفهٔ دوم، یعنی y باید از مجموعهٔ B باشد.

مثال : اگر $A=\{۲,۴,۶\}$ و $B=\{۴,۵\}$، در این صورت مجموعه‌های $A\times B$ و $B\times A$ را تشکیل دهید و با هم مقایسه کنید.

$A\times B=\{(۲,۴),(۲,۵),......,......,(۶,۴),......\}$

$B\times A=\{(۴,۲),(۴,۴),......,(۵,۲),......,......\}$

واضح است که $A\times B\neq B\times A$ (کافی است فقط در یک عضو با هم فرق داشته باشند؛ مثلاً $(۲,۴)\neq(۴,۲)$ و $(۲,۴)\in A\times B$ و $(۲,۴)\notin B\times A$).

کار در کلاس

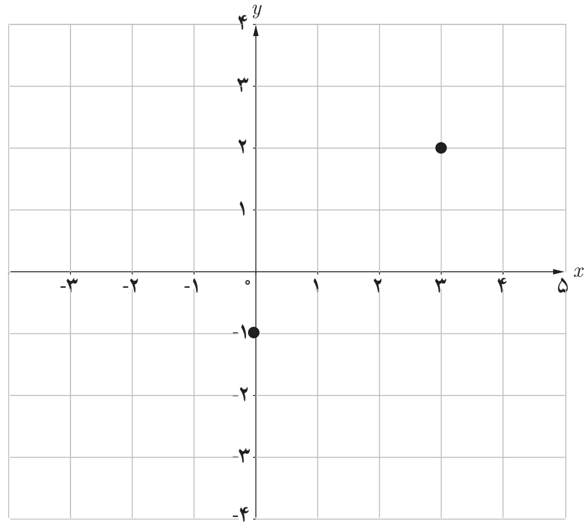
در مثال قبل دیدید که در مجموعهٔ $A\times B$ هر عضو A دو زوج مرتب تولید کرد و در کل شش زوج مرتب به‌وجود آمد، حال اگر $n(A)=m$ و $n(B)=k$ با استفاده از تعریف عمل ضرب دکارتی و حاصل ضرب، نشان دهید، $n(A\times B)=mk$

فعالیت

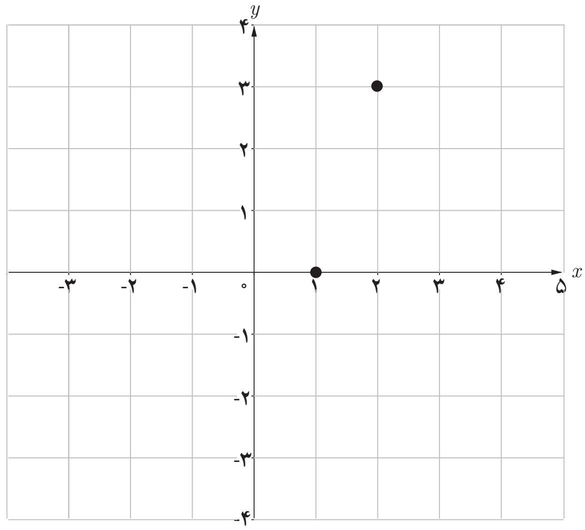
۱ اگر $A=\{1,-1,2,-2\}$ و $B=\{0,3,4\}$، ابتدا مجموعه‌های $(A\times B)$ و $(B\times A)$ را تشکیل دهید و سپس نمودار مختصاتی هر یک از این مجموعه‌ها را رسم کنید. (نمودارها را کامل کنید.)

$A\times B=$

$B\times A=$



نمودار مختصاتی $B\times A$

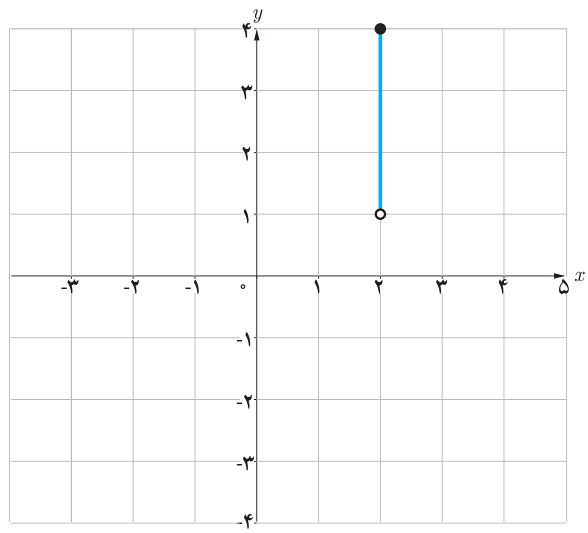


نمودار مختصاتی $A\times B$

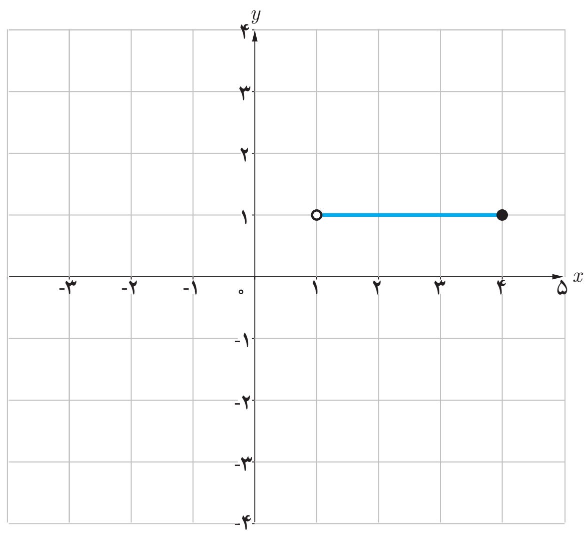
۲ اگر فرض کنیم : $A=(1,4]$ و $B=\{1,2\}$ در این صورت، نمودارهای مربوط به $A\times B$ و $B\times A$ که بخشی از آنها رسم شده است را تکمیل کنید.

$$A\times B=\{(x,y)|x\in(1,4]\wedge y\in B\}$$

$$B\times A=\{(x,y)|(x=1\vee x=2)\wedge 1<y\leq 4\}$$



نمودار $B\times A$

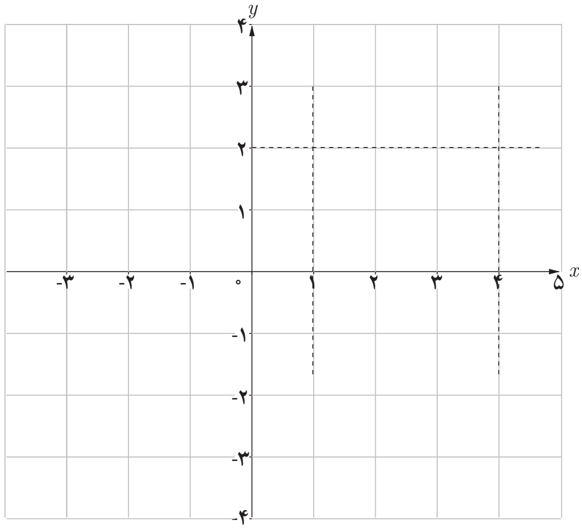


نمودار $A\times B$

۳ اگر فرض کنیم : $A=\mathbb{R}$ و $B=\{۰,۱,۲\}$ نمودار $A\times B$ را رسم کنید.

۴ در صورتی که $A=[۱,۴]$ و $B=[۰,۲]$ در این صورت، نمودار $(A\times B)$ را که بخشی از صفحهٔ مختصات دکارتی است، هاشور بزنید.

$A\times B=\left\{(x,y)\middle|\, ۱\le x\le ۴\wedge ۰\le y\le ۲\right\}$



۵ در صورتی که فرض کنیم : $A=\mathbb{R}$ و $B=\mathbb{R}$ در این صورت، حاصل ضرب $A\times B=\mathbb{R}\times\mathbb{R}=\mathbb{R}^{۲}$ را چگونه تعبیر می‌کنید؟

کار در کلاس

اگر A و B دو مجموعهٔ دلخواه باشند، در این صورت :

الف) $A\times\varnothing=\varnothing\times A=\varnothing$

ب) $A\times B=B\times A\Rightarrow A=\varnothing\vee B=\varnothing\vee A=B$

اثبات الف) از برهان خلف استفاده می‌کنیم :

فرض کنیم : $A\times\varnothing\neq\varnothing$ (فرض خلف) در این صورت، حداقل یک عضو مانند (x,y) در .... باید وجود داشته باشد که در این صورت :

$$(x,y)\in A\times\varnothing \xRightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} \cdots\cdots\cdots \wedge \underbrace{y\in\varnothing}_{\text{تناقض}}$$

و چون $y\in\varnothing$ یک تناقض است (مجموعهٔ $\varnothing$ فاقد عضو است) پس فرض خلف، باطل شده است و حکم برقرار می‌باشد، به طریق مشابه ثابت کنید که $\varnothing\times A=\varnothing$.

اثبات ب) اگر $A=\varnothing$ یا $B=\varnothing$ که حکم اثبات می‌شود.

حال فرض کنیم : $A\neq\varnothing$ و $B\neq\varnothing$ که در این صورت، به روش عضوگیری و با توجه به تعریف ضرب دکارتی و فرضِ $A\times B=B\times A$، ثابت می کنیم $A=B$.

$$\forall x\in A\,,\ \forall y\in B \xRightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} (x,y)\in A\times B$$

$$\xRightarrow{A\times B=B\times A} (x,y)\in\cdots\cdots \xRightarrow{\text{تعریف ضرب دکارتی}} x\in B\wedge\cdots\cdots\Rightarrow\cdots\cdots\wedge B\subseteq A$$

$$\Rightarrow A=B$$

(xای که از A فرض کردیم ثابت شد در B است و yای که از B فرض کردیم ثابت شد در A است.)

تمرین

۱ کدام یک از مجموعه‌های زیر باهم مساوی‌اند؟

$A=\{m\in\mathbb{Z}\mid |m|<۲\}$

$B=\{x\in\mathbb{Z}\mid x^{۳}=x\}$

$C=\{y\in\mathbb{Z}\mid y^{۲}\leq ۲y\}$

$D=\{m\in\mathbb{Z}\mid m^{۲}\leq ۱\}$

$E=\{m\in\mathbb{Z}\mid m^{۳}+۲m=۳m^{۲}\}$

۲ اگر دو عضو از مجموعه A حذف کنیم، تعداد زیرمجموعه‌های آن ۳۸۴ واحد کم می‌شود، مجموعهٔ A چند زیرمجموعه دارد؟

۳ اگر $A=\{۲\,,\,x+۲y\,,۴\}$ و $B=\{۴\,,۵\,,\,x-y\}$ و $A=B$ در این صورت، مقادیر x و y را بیابید.

۴ ثابت کنید برای مجموعه‌های A و B با مرجع U داریم : $A-B\subseteq A$.

۵ فرض کنیم A و B و C سه مجموعه با مرجع U باشند، ثابت کنید : اگر $A\subseteq B$ آن‌گاه :

الف) $A\cup C\subseteq B\cup C$ ب) $A\cap C\subseteq B\cap C$

۶ مجموعه‌های A و B و C و D با مرجع U را در نظر بگیرید، ثابت کنید : اگر $A\subseteq B$ و $C\subseteq D$ آن‌گاه :

الف) $A\cap C\subseteq B\cap D$ ب) $A\cap C\subseteq B\cup D$

۷ الف) فرض کنید : $A\subseteq\varnothing$ ثابت کنید : $A=\varnothing$. ب) فرض کنید $U\subseteq A$ ثابت کنید : $A=U$.

۸ هرگاه A و B دو مجموعه با مرجع U باشند و $A\cap B=\varnothing$ در این صورت ثابت کنید :

الف) $B-A=B$ ب) $B\subseteq A'$

۹ با استفاده از تعریف اشتراک، اجتماع و خواص جابه‌جایی، شرکت‌پذیری و توزیع پذیری برای ترکیب عطفی و فصلی در گزاره‌ها، هر یک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $A\cap B=B\cap A$

ب) $A\cap (B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

پ) $A\cap (B\cup C)=(A\cap B)\cup (A\cap C)$

۱۰ درستی هریک از تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $(A\cap B)\cup (B'\cap A)=A$

ب) $(A'\cap B')\cap A=\varnothing$

پ) $A\cap (B\cap C)=(A\cap B)\cap (A\cap C)$

ت) $A\cup (B\cup C)=(A\cup B)\cup (A\cup C)$

۱۱ هر یک از عبارت‌های زیر را ساده کنید :

الف) $(A'\cap B)\cup ([(B\cap A)-B']\cap (B\cup A))$

ب) $(A\cup B)-B$

پ) $[(A\cup B)-A]\cup (A\cap B)$

۱۲ درستی هر یک از تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $(A\subseteq X)\wedge (A'\subseteq X) \Rightarrow X=U$

ب) $(A-B)\cup (A\cap B)=A$

پ) $(A\cap B)-C=(A-C)\cap (B-C)$

ت) $(A-B)\cup (B-A)=(A\cup B)-(A\cap B)$

ث) $(A\cup B)\cap (A'\cap B')=\varnothing$

ج) $[(A\cup B)=(A\cup C)\wedge (A\cap B)=(A\cap C)]\Rightarrow B=C$

۱۳ اگر $A=\{y+۲,۵,z\}$ و $B=\{x+۱,۴,-۲\}$ در این صورت، با فرض $A\times B=B\times A$ بیشترین مقدار برای $(x+y+z)$ را بیابید.

۱۴ با توجه به مجموعه‌های داده شده، نمودار هر یک از حاصل‌ضرب‌های $A\times B$ و $B\times A$ را رسم کنید.

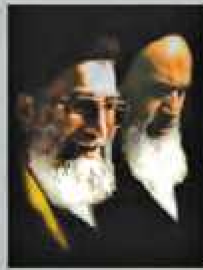
الف) $A=\{۲,۳\}$, $B=\{۲,۳,۴\}$

ب) $A=\{۳,۴\}$, $B=(۱,۵]$

پ) $A=[۲,۶]$, $B=[۳,۸]$

ت) $A=\mathbb{N}, B=[۱,۴]$

ث) $A=\mathbb{R}, B=\{۲,۳\}$



امروزه به‌خدمت گرفتن انرژی هسته‌ای بدون آگاهی از علم فیزیک و انجام محاسبات پیچیده با کمک ابررایانه‌ها ممکن نیست. بخشی از این محاسبات به واکنش‌های هسته‌ای مربوط است؛ هنگامی که یک نوترون به سمت جسمی رادیواکتیو شلیک می‌شود، پس از طی مسیری، یا از جسم خارج می‌شود، یا جذب یک اتم می‌شود و یا اتمی را متلاشی می‌کند و در نتیجه چند نوترون و مقداری انرژی به‌وجود می‌آید. نوترون‌های آزادشدهٔ این زنجیره با سرعتی بسیار بالا ادامه می‌دهند. بررسی چنین واکنشی با استفاده از شبیه‌سازی‌های رایانه‌ای انجام می‌شود و مدل‌های احتمالاتی در آن نقشی بنیادی دارند.

۲ احتمال

درس ۱ مبانی احتمال

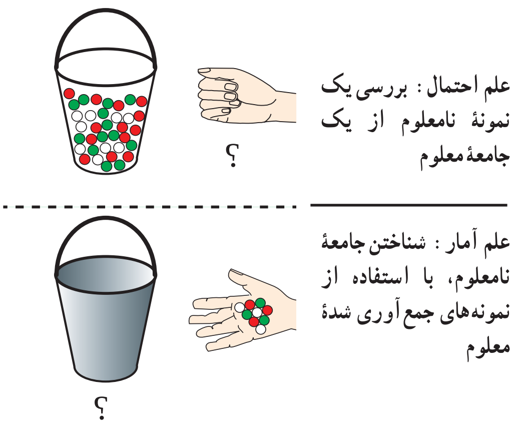
آمار و احتمال به چه کار می‌آیند؟

فرض کنید کارشناسان یک کارخانهٔ تولید لوازم خانگی می‌خواهند برای سال آینده، تغییراتی در میزان تولید کالاهای کارخانه به‌وجود آورند؛ آنها باید مشخص کنند که سرمایهٔ کارخانه به چه نسبت‌هایی صرف تولید یخچال، کولر، اجاق‌گاز و ... شود. با توجه به اینکه آنها در مورد آنچه در آینده رخ خواهد داد، اطمینان ندارند، چگونه می‌توانند در این مورد تصمیمی درست بگیرند؟ چگونه می‌توانند از بین دو پیشنهاد مختلف، یکی را بر دیگری ترجیح دهند؟

ابزارهای حلّ چنین مسائلی، که با ناآگاهی نسبی از شرایط و یا وقایع آینده همراه است، علم آمار و علم احتمال است.

به کمک علم آمار می‌توان اطلاعات سال‌های گذشته کارخانه را به‌درستی جمع‌آوری کرد و از آنها توصیفی مناسب از وضعیت تقاضای کالاهای مختلف به‌دست آورد و سپس به سؤال‌هایی مانند «در سال آینده تقاضای یخچال، کولر، اجاق‌گاز و ... چگونه خواهد بود؟» پرداخت. در قدم بعدی، علم احتمال کمک می‌کند که به بهترین تصمیم ممکن برسیم.

به‌طور خلاصه بخشی از این دو علم به‌نوعی در جهت عکس هم‌اند : آن‌گاه که با جامعه‌ای ناشناخته سر و کار داریم، شناختن جامعه با استفاده از نمونه‌ها و داده‌ها یک کار آماری است، ولی اگر جامعه را با جزئیات مورد نیاز بشناسیم و بخواهیم بدانیم نمونه‌هایی از آن جامعه چگونه خواهند بود، علم احتمال به کمک ما می‌آید. در شکل روبه‌رو، این موضوع نشان داده شده است؛ ظرفی که در آن مهره‌های رنگی وجود دارد، مانند جامعه است و مهره‌هایی که در مشت هستند، مانند نمونه‌اند.



کار در کلاس

کدام‌یک از سؤال‌های زیر مربوط به علم آمار و کدام‌یک مربوط به علم احتمال است؟ در هر مورد با دیگران گفت‌وگو کنید.

صورت مسئله	آمار	احتمال
۱ــ می‌دانیم ۹۰ تا از ۱۰۰ سیب یک جعبه سالم است. چند تا سیب از جعبه برداریم، تا تقریباً مطمئن باشیم که دست‌کم یک سیب خراب برداشته‌ایم؟	☐	☐
۲ــ درآمد کارمندان شهرداری چقدر است؟	☐	☐
۳ــ ۹۰ نفر از ۱۰۵ دانش‌آموز پایه یازدهم به ورزش شنا علاقه دارند. اگر ۲۰ نفر از این دانش‌آموزان را به تصادف انتخاب کنیم، چقدر ممکن است کمتر از ۱۵ نفر از آنها به شنا علاقه‌مند باشند؟	☐	☐
۴ــ در انتخابات هفتم اسفند ۱۳۹۴، شهرستان سواد کوه شمالی با مشارکت بیش از ۹۸/۲ درصد رکوردردار بوده است. اگر از ۱۰ نفر واجد شرایط بپرسیم که آیا در انتخابات شرکت کرده‌اند یا خیر، چقدر ممکن است پاسخ بیش از یک نفر منفی باشد؟	☐	☐
۵ــ چه تعداد از دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم مدرسه شما به ورزش شنا علاقه دارند؟	☐	☐

ریاضی‌دان‌ها چگونه به علم احتمال می‌پردازند؟

ریاضی‌دانان معمولاً برای حلّ مسائل سخت و پیچیده، ابتدا کار را از طراحی و حلّ مسائلی ساده شروع می‌کنند و سپس قدم به قدم با ساختن بنایی استوار از تعاریف، مفاهیم، قضیه‌ها و . . . به سراغ مسائلی می‌روند که شاید در نگاه اول دست‌نیافتنی به نظر می‌رسیدند. بیایید مانند ریاضی‌دان‌ها مسئلهٔ ساده‌ای را که در آن اطمینان وجود ندارد، بررسی کنیم :

فعالیت

برق‌کاری نیاز به یک لامپ سالم دارد. دو جعبه داریم که در اوّلی و دومی، به‌ترتیب، ۵ و ۲۰ لامپ وجود دارد، ولی فقط برخی از این لامپ‌ها سالم‌اند؛ در اوّلی سه لامپ و در دومی ۱۳ لامپ سالم است. او باید یکی از دو جعبه را انتخاب کند و از آن جعبه یک لامپ، به‌تصادف، بردارد. به نظر شما، او بهتر است کدام جعبه را انتخاب کند؟

جواب این سؤال ساده است : در جعبهٔ اوّل ۶۰ درصد و در جعبهٔ دوم ...... درصد لامپ‌ها سالم‌اند، پس بهتر است جعبهٔ ...... را انتخاب کند.

اکنون فرض کنید دو جعبه همان شرایط را دارند، ولی برق‌کار از آن جعبه، دو لامپ، بدون آزمایش، بردارد. به نظر شما، او بهتر است کدام جعبه را انتخاب کند؟

در این حالت، تصمیم‌گیری به سادگی حالت اوّل نیست.

کار در کلاس

به چند حالت مختلف می‌توان ۲ لامپ را یکی پس از دیگری از بین ۵ لامپ جعبهٔ اوّل مذکور انتخاب کرد؟ در چند حالت هر دو لامپ معیوب است؟ مشابه همین سؤال‌ها را در مورد جعبهٔ دوم بررسی کنید. با توجه به نتایج، انتخاب کدام جعبه را برای حالت دوم بهتر می‌دانید؟

چنین مسائلی هر چند ساختگی‌اند، ولی ماهیت آنها بسیار شبیه همان مسئله‌ای است که کارشناسان کارخانه با آن مواجه بودند : تصمیم‌گیری برای آینده‌ای که در مورد وقایع آن اطمینان نداریم.

خواندنی

از احتمال کیفی تا احتمال کمی

واژهٔ احتمال و مشابه‌های آن مانند شانس، بخت، تصادف در بین مردم عامی هم رایج است : «فردا به احتمال زیاد باران می‌بارد»، «تیم والیبال ایران برای راه‌یابی به المپیک شانس زیادی در آینده دارد» و . . .

مردم گاهی برای توصیف احساس خود در این موارد، از اعداد نیز استفاده می‌کنند، ولی منظور آنها صرفاً بیان یک حسّ کیفی است : «به احتمال ۹۹ درصد هفتهٔ بعد طلا گران می‌شود»، «تیم انتهای جدول یک درصد هم شانس قهرمان شدن ندارد» و . . .

شما نیز چند مثال بزنید که مردم یا رسانه‌ها از عباراتی که معنای احتمال و عدم اطمینان می‌دهند استفاده می‌کنند. آیا شما مثالی در زندگی روزمرهٔ خود سراغ دارید که احتمال را با عدد بیان کنید و منظورتان فراتر از صرفاً بیان یک حس کیفی باشد؟

علم احتمال این عدم اطمینان کیفی را کمّی می‌کند؛ یعنی آن را به عدد تبدیل می‌کند تا در چارچوب علم ریاضی قرار بگیرد و بتوان با کمک محاسبات ریاضی به نتایجی روشن‌تر، دقیق‌تر و قابل اثبات و اتکا رسید.

ترجمهٔ زبان گزاره‌ها به زبان مجموعه‌ها

معمولاً وقتی از احتمال رخ دادن رویدادی صحبت می‌کنیم، آن رویداد را به شکل یک گزاره بیان می‌کنیم؛ مثلاً می‌گوییم احتمال اینکه «فردا باران ببارد»، احتمال اینکه «نتیجهٔ مسابقهٔ فوتبال هفتهٔ آینده تساوی شود»، احتمال اینکه «متهم دستگیرشده، مجرم باشد» و . . .

ولی ریاضی‌دانان گاهی به‌شکل دیگری احتمال را به کار می‌برند. برای روشن شدن این موضوع، همان مثال قبلی را به یاد بیاورید : فرض کنید برق‌کار جعبهٔ اوّل را انتخاب کرده و می‌خواهد از بین ۵ لامپ یکی را بردارد. لامپ‌ها را شماره‌گذاری می‌کنیم به نحوی که شماره‌های ۱ تا ۳ سالم و شماره‌های ۴ و ۵ معیوب باشند.

شمارهٔ لامپی که بیرون کشیده می‌شود برای برق‌کار معلوم نیست، ولی به هر حال یکی از اعضای مجموعهٔ زیر است :

$S=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$

همان‌طور که می‌دانید در علم احتمال به این مجموعه «فضای نمونه» گفته می‌شود.

به هر عضو فضای نمونه یک «برآمد» می‌گویند.

برق‌کار در صورتی راضی می‌شود که لامپ انتخابی سالم باشد و این یعنی اینکه شمارهٔ لامپ ۱، ۲ یا ۳ باشد. در این صورت، این اتفاق را هم می‌توان با یک زیرمجموعهٔ فضای نمونه مشخص کرد:

$A=\{۱,۲,۳\}$

همان‌طور که در سال‌های گذشته خوانده‌اید در علم احتمال به این زیرمجموعه‌ها «پیشامد» گفته می‌شود.

در زبان علم احتمال به جای اینکه بگوییم «لامپ انتخاب شده سالم باشد»، می‌توانیم بگوییم «پیشامد A رخ دهد» و به جای اینکه بگوییم «احتمال سالم بودن لامپ انتخابی»، می‌توانیم بگوییم «احتمال رخ دادن A». عبارت اخیر خلاصه‌شدهٔ این عبارت است «احتمال اینکه شمارهٔ لامپ انتخابی عضو A باشد».

کار در کلاس

زهرا و شبنم در مورد سؤالی که دربارهٔ پرتاب یک تاس سالم در کلاس مطرح شده با هم صحبت می‌کنند. به نظر شما چه کسی درست می‌گوید؟

- زهرا: فضای نمونه در این مسئله مجموعهٔ $\{۱,۲,...,۶\}$ است.
- شبنم: بله، من هم موافق هستم. سؤالی که خانم معلم پرسیدند این است که اگر تاس را پرتاب کنیم و عدد ۲ بیاید، آیا پیشامد $\{۲,۴,۶\}$ رخ داده است؟
- زهرا: به نظرم نه، چون ۴ و ۶ هم علاوه بر ۲ عضو این پیشامدند.
- شبنم: ولی من فکر می‌کنم این پیشامد رخ داده است، چون این پیشامد، شامل عدد ۲ است.
- زهرا: پس ۴ و ۶ که نیامدند چه؟
- شبنم: یعنی باید آنها هم در پرتاب تاس آمده باشند تا بگوییم آن پیشامد رخ داده است؟ اصلاً این‌طور که شما فکر می‌کنید، چگونه ممکن است پیشامد $\{۲,۴,۶\}$ رخ دهد؟ مگر می‌شود تاسی را پرتاب کنیم و سه مقدار مختلف با هم ظاهر شود؟!

با توجه به مفهوم «رخ دادن یک پیشامد» می‌فهمیم که اگر $A_۱$ و $A_۲$ دو پیشامد باشند، آن‌گاه:

الف) اگر $A_۱$ زیرمجموعهٔ $A_۲$ باشد، رخ دادن $A_۱$ رخ دادن $A_۲$ را نتیجه می‌دهد.

ب) رخ دادن پیشامد $A_۱\cap A_۲$، یعنی هر دو پیشامد $A_۱$ و $A_۲$ رخ دهد.

پ) رخ دادن پیشامد $A_۱\cup A_۲$، یعنی دست‌کم یکی از دو پیشامد $A_۱$ و $A_۲$ رخ دهد.

تشخیص فضای نمونه

هرگاه بخواهیم مسئله‌ای را با کمک علم احتمال بررسی کنیم قدم اوّل شناختن فضای نمونه است. همان‌طور که گفته شد فضای نمونه مجموعه‌ای است که اعضای آن، که به آنها برآمد می‌گوییم، مشخص می‌کنند که نتیجهٔ آزمایش یا مشاهده‌ای که در حال بررسی آن هستیم چه حالت‌هایی دارد؛ مثلاً در پرتاب یک تاس، مجموعهٔ $\{۱,۲,...,۶\}$ فضای نمونه است.

اگر بخواهیم نتایج حاصل از پرتاب دو تاس را بررسی کنیم از عمل ضرب دکارتی مجموعه‌ها استفاده می‌کنیم؛ مجموعهٔ $\{۱,۲,...,۶\}\times\{۱,۲,...,۶\}$ که ۳۶ عضو دارد فضای نمونه است. البته لازم است که یکی از تاس‌ها را تاس اوّل و دیگری

را تاس دوم بنامیم تا مشخص شود که معنای برآمد (۱,۲) چیست. توجه داشته باشید که این برآمد غیر از برآمد (۲,۱) است.

در صورتی که آزمایشی متشکل از دو آزمایش با فضاهای نمونهٔ $S_۱$ و $S_۲$ باشد فضای نمونهٔ آن $S_۱ \times S_۲$ است. مشابه این موضوع برای هر تعداد آزمایش هم‌زمان نیز درست است.

مثال : یک رانندهٔ تاکسی خطی، در ایستگاه منتظر می‌ایستد تا حداکثر چهار مسافر سوار کند. البته ممکن است با کمتر از چهار مسافر نیز حرکت کند. در مسیر برگشت نیز همین اتفاق می‌افتد. فضای نمونه برای توصیف چنین پدیده‌ای، اگر فقط تعداد مسافرها در دو مسیر رفت و برگشت برای ما مهم باشد، چیست؟

حل : با توجه به اینکه تعداد این دو نوع مسافر در رفت و در برگشت عددی بین صفر و چهار است، می‌توان مجموعهٔ زیر را فضای نمونه گرفت :

$S=\{۰,۱,۲,۳,۴\} \times \{۰,۱,۲,۳,۴\}$

در این فضای نمونه، منظور از برآمد (۱,۲) این است که تاکسی با ۱ مسافر حرکت کرده و در برگشت ۲ مسافر سوار کرده است.

اصول احتمال

در حالت کلی شناختن فضای نمونه برای توصیف یک رویداد تصادفی کافی نیست. علاوه بر آن لازم است که بدانیم احتمال رخ دادن پیشامدهای مختلف که زیرمجموعه‌های فضای نمونه‌اند، چقدر است. این موضوع را در درس بعد که در مورد احتمال غیرهم‌شانس است بهتر متوجه خواهید شد.

به‌عنوان مثال، به وضعیت آب و هوای قلهٔ دماوند در صبح نوروز سال آینده فکر کنید؛ می‌توان فضای نمونه را این‌چنین در نظر گرفت :

{ آفتابی، ابری }

آیا چون فضای نمونه دو عضوی است باید احتمال هر کدام ۵۰ درصد باشد؟

ممکن است کسی فضای نمونه را به شکل زیر انتخاب کند :

{ آفتابی، ابری بدون بارندگی، بارش باران، بارش برف، بارش تگرگ }

در این صورت آیا چون فضای نمونه پنج عضو دارد، باید احتمال هر کدام ۲۰ درصد باشد؟

اگر کسی به هر دو سؤال بالا جواب مثبت دهد، پس احتمال آفتابی بودن را یک بار ۵۰ درصد و یک بار ۲۰ درصد دانسته است!

خواندنی

یک اشتباه تاریخی

مشهور است که دالامبر[1]، ریاضی‌دان، فیزیک‌دان، فیلسوف و دائرةالمعارف‌نویس فرانسوی قرن هجدهم، تصور می‌کرد که اگر یک سکه را دو بار پرتاب کنیم، احتمال اینکه دقیقاً یک بار رو بیاید، برابر یک سوم است. او این‌گونه استدلال می‌کرد :

در چنین آزمایشی سه حالت وجود دارد : «هر دو رو»، «هر دو پشت» و «یک بار رو و یک بار پشت». در نتیجه احتمال وقوع هر یک از این حالات یک سوم است!

همان‌طور که گفته شد نکته این است در یک فضای نمونه برآمدهای مختلف ممکن است احتمال برابر نداشته باشند. در این حالت، محاسبهٔ احتمال برآمدها و پیشامدها ممکن است ساده نباشد، ولی احتمال پیشامدهای مختلف حتماً باید ویژگی‌هایی داشته باشد که به آنها **اصول احتمال** می‌گویند :

۱ برای هر پیشامد دلخواه A، احتمال رخ دادن آن، یعنی $P(A)$ ، عددی حقیقی در بازهٔ $[0,1]$ است.

۲ $P(S)=1$

۳ برای هر دو پیشامد A و B که $A\cap B=\varnothing$ ، داریم $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$

به خاصیتی که در شمارهٔ ۳ برای دو پیشامد A و B فرض شده است، یعنی $A\cap B=\varnothing$، ناسازگاری این دو پیشامد گفته می‌شود و به این معناست که رخ دادن هر دوی آنها هم‌زمان محال است. در غیر این صورت، می‌گوییم A و B سازگارند.

قضیه

در مورد هر فضای نمونه، گزاره‌های زیر درست است :

۱ $P(A')=1-P(A)$

۲ $P(\varnothing)=0$

۳ اگر A، B و C پیشامدهایی دو به دو ناسازگار باشند، آن‌گاه

$$P(A\cup B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$

(این قسمت را می‌توان برای هر تعداد پیشامد نیز تعمیم داد).

۴ برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$.

۱ــ Jean Baptiste le Rond d'Alembert (۱۷۱۷ــ۱۷۸۳)

۵ برای هر دو پیشامد دلخواه A و B داریم : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$.

اثبات.

۱ به این موضوع توجه کنید که A و A' دو پیشامد ناسازگارند و اجتماع آنها برابر S می‌شود، داریم :

$$۱=P(S)=P(A\cup A')=P(A)+P(A')$$

در نتیجه $P(A')=۱-P(A)$.

۲ با توجه به اینکه $\varnothing$ متمم S است داریم :

$$P(\varnothing)=۱-P(S)=۱-۱=۰$$

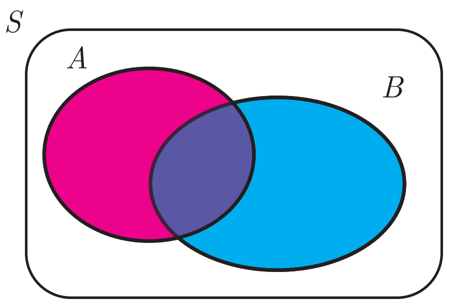
۳ توجه کنید که A و $B\cup C$ نیز دو پیشامد ناسازگارند و لذا

$$P(A\cup B\cup C)=P(A\cup(B\cup C))=P(A)+P(B\cup C)=P(A)+P(B)+P(C)$$

۴ واضح است که $A=(A-B)\cup(A\cap B)$ و پیشامدهای $A-B$ و $A\cap B$ ناسازگارند، پس

$$P(A)=P(A-B)+P(A\cap B)$$

و این نتیجه می‌دهد که $P(A-B)=P(A)-P(A\cap B)$.



۵ توجه کنید که $A\cup B=B\cup(A-B)$ و به‌علاوه دو پیشامد B و $A-B$ ناسازگارند. در نتیجه

$$P(A\cup B)=P(B)+P(A-B)$$

با استفاده از شمارهٔ ۴ حکم نتیجه می‌شود. (چرا؟)

کار در کلاس

مشخص کنید که در هر قسمت دو پیشامدی که آمده است با هم سازگارند یا ناسازگار؟

۱ دانش‌آموزی که به تصادف از کلاس انتخاب می‌کنید،

A : متولد ماه مهر باشد،

B : متولد فصل تابستان باشد.

۲ سکه‌ای که سه بار پرتاب می‌کنید،

A : هر سه بار مشابه بیاید،

B : زوج بار رو بیاید.

۳ فردا

A : خورشید در آسمان دیده شود،

B : باران ببارد.

۴ تاسی را پی در پی پرتاب می‌کنید،

A : برای اوّلین بار در مرتبهٔ سوم ۶ بیاید،

B : تا پرتاب سوم دو بار ۶ بیاید.

تمرین

۱ احمد و عباس با هم یک مرتبه سنگ، کاغذ، قیچی بازی می‌کنند. فضای نمونه برای این بازی چیست؟ فضای نمونه چند عضو دارد؟ در چه تعداد از برآمدها احمد برندهٔ بازی است؟

۲ یک تیم والیبال ۱۴ عضو دارد که قد هیچ دو عضوی برابر نیست. فرض کنید آنها یکی پس از دیگری وارد سالن می‌شوند. اگر برای ما فقط ترتیب قدّ آنها اهمیت داشته باشد، فضای نمونه را توصیف کنید. اگر اعضای تیم کاملاً تصادفی وارد سالن شده باشند، احتمال اینکه اوّلین کسی که وارد می‌شود، بلند قدترین عضو تیم باشد چقدر است؟

۳ در یک ایستگاه هواشناسی، در هر لحظه وضعیت آب و هوا با پنج چیز مشخص می‌شود : دمای هوا، رطوبت هوا، سرعت باد، وضعیت هوا (صاف یا ابری) و مقدار بارش در ۲۴ ساعت گذشته. ما برای سادگی، وضعیت آب و هوا را به این شکل خلاصه می‌کنیم : آیا از نظر دما سرد یا گرم است؟ آیا از نظر رطوبت خشک یا مرطوب است؟ آیا باد می‌وزد یا نمی‌وزد؟ آیا هوا صاف، نیمه‌ابری یا ابری است؟ و آیا در ۲۴ ساعت گذشته بارندگی رخ داده است یا خیر؟ برای وضعیت هوا در یک لحظه در یک ایستگاه هواشناسی فضای نمونه را به شکل حاصل‌ضرب دکارتی چند مجموعه بنویسید. این فضا چند عضو دارد؟

۴ فقط با استفاده از اصول احتمال و قضایای اثبات‌شده، گزاره‌های زیر را ثابت کنید :

الف) اگر $B\subseteq A$ داریم : $P(A-B)=P(A)-P(B)$.

ب) اگر $B\subseteq A$، آن‌گاه $P(B)\leq P(A)$.

۵ عددی به‌تصادف از بین اعداد ۱ تا ۱۰۰ انتخاب می‌کنیم. احتمال‌های زیر را محاسبه کنید :

الف) عدد انتخابی بر ۲ یا ۳ بخش‌پذیر باشد.

ب) عدد انتخابی بر ۲ بخش‌پذیر باشد، ولی به ۳ بخش‌پذیر نباشد.

پ) عدد انتخابی نه بر ۲ بخش‌پذیر باشد و نه بر ۳.

درس ۲ احتمال غیر هم‌شانس

نتایج بسیاری از آزمایش‌ها و اتفاق‌هایی که در آینده رخ می‌دهند، از قبل مشخص نیست، ولی می‌توان شانس یا احتمال وقوع آنها را از قبل تعیین کرد؛ مثلاً در پرتاب یک تاس سالم، شانس مشاهدهٔ هرکدام از اعداد با یکدیگر برابر است، ولی در مسابقه‌های گروهی، شانس قهرمانی تیم‌ها، لزوماً با یکدیگر برابر نیست. قبل از برگزاری جام‌جهانی ۲۰۱۴ فوتبال، شانس قهرمانی تیم‌ها به‌صورت زیر مشخص شده بود :

تیم	برزیل	آرژانتین	آلمان	اسپانیا	بلژیک	فرانسه	کلمبیا	هلند	بقیه تیم‌ها
احتمال قهرمانی	۰/۲۵	۰/۱۸۱	۰/۱۶۶	۰/۱۲۵	۰/۰۶۶	۰/۰۴۷	۰/۰۴۳	۰/۰۴۳	۰/۰۷۹

و جالب این است که چهار تیم راه یافته به مرحلهٔ نیمه نهایی، از هشت تیم نخست جدول فوق بودند. دنیای پیرامون ما سرشار از پیشامدهای غیرهم‌شانس است. به‌نظر شما احتمال بارش باران و آفتابی بودن هوا در تمام روزهای سال با یکدیگر برابر است؟

فعالیت

یک تاس طوری ساخته شده که روی سه وجه آن عدد۱، روی دو وجه آن عدد ۲ و روی وجه باقی‌مانده عدد ۳ مشاهده می‌شود. اگر این تاس را پرتاب کنیم،

۱ فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی را بنویسید.

$S = \{\ldots, \ldots, \ldots\}$

۲ با توجه به اینکه عدد ۱ روی سه وجه این تاس قرار دارد، احتمال اینکه این عدد بعد از پرتاب دیده شود را به‌دست آورید.

$A=\{۱\} \Rightarrow P(A)=\frac{\dots}{\dots}$

آیا می‌توانید از رابطهٔ $P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}$ برای محاسبهٔ احتمال وقوع پیشامد A استفاده کنید؟ چرا؟

هر زیرمجموعه تک‌عضوی از فضای نمونه‌ای را یک پیشامد ساده می‌گوییم. در پیشامدهای ساده، معمولاً به‌جای $P(\{a\})$ می‌نویسیم $P(a)$.

۳ مشابه قسمت قبل، یعنی با توجه به تعداد وجوهی از تاس که اعداد ۲ و ۳ روی آنها نوشته شده است، احتمال وقوع پیشامدهای ساده $B=\{۲\}$ و $C=\{۳\}$ را به‌دست آورید.

$P\{۲\}=\frac{\dots}{\dots} \quad , \quad P\{۳\}=\frac{\dots}{\dots}$

۴ آیا احتمال وقوع پیشامدهای ساده A ، B و C با یکدیگر برابرند؟ توضیح دهید

۵ به کمک نتایج قسمت‌های قبل، مجموع احتمال‌های پیشامدهای ساده را به‌دست آورید.

$P\{۱\}+P\{۲\}+P\{۳\}=\dots+\dots+\dots=\dots$

۶ اگر $D=\{۱,۲\}$ پیشامد مشاهده اعداد ۱ یا ۲ در پرتاب تاس باشد، $P(D)$ را به‌دست آورید. این مقدار را با $P\{۱\}+P\{۲\}$ مقایسه‌کنید.

همان‌طور که در فعالیت بالا مشاهده می‌کنید، در فضای نمونه‌ای S، احتمال وقوع پیشامدهای ساده با یکدیگر برابر نیستند.

هرگاه حداقل دو پیشامد ساده از فضای نمونه‌ای $S=\{s_۱, s_۲, \dots, s_n\}$ احتمال نابرابر داشته باشند، S را فضای نمونه‌ای با احتمال غیرهم‌شانس می‌گوییم.

در احتمال غیرهم‌شانس نیز مانند احتمال هم‌شانس که در سال‌های گذشته خوانده‌ایم، خواص زیر برقرارند:

در فضای نمونه‌ای متناهی با احتمال غیرهم‌شانس، اگر $S=\{s_۱, s_۲, \dots, s_n\}$ فضای نمونه‌ای و $A=\{a_۱, a_۲, \dots, a_k\}$ یک زیرمجموعه k عضوی S باشد، همواره داریم:

۱ $۰ \leq P(A) \leq ۱$

۲ $P(S)=۱$

۳ $P(A)=P(a_۱)+P(a_۲)+\dots+P(a_k)$

با استفاده از خاصیت (۲) و (۳) می‌توانیم نتیجهٔ زیر را بگیریم:

$P(S)=P(s_۱)+P(s_۲)+\dots+P(s_n)=۱$

مثال: در یک مسابقهٔ چهارجانبه فوتبال، تیم‌های a, b, c و d حضور دارند. اگر احتمال قهرمانی تیم‌های a, b و c با

یکدیگر برابر باشند، ولی احتمال قهرمانی تیم d، دو برابر هر یک از تیم‌های دیگر باشد، احتمال قهرمانی هریک از تیم‌ها را به‌دست می‌آوریم.

فرض کنید احتمال قهرمانی تیم a، x باشد، یعنی $P(a)=x$. از آنجایی که شانس قهرمانی تیم‌های a, b و c برابرند، پس $P(b)=P(c)=x$ از سوی دیگر احتمال قهرمانی تیم d، دو برابر تیم‌های دیگر است، پس $P(d)=۲P(a)=۲x$. با توجه به اینکه فضای نمونه‌ای در این مسئله $S=\{a, b, c, d\}$ است. بنابراین

$$P(a)+P(b)+P(c)+P(d)=۱$$

با جای‌گذاری احتمال‌های بالا برحسب x، به تساوی $x+x+x+۲x=۱$ می‌رسیم. پس $۵x=۱$ و در نتیجه $x=\frac{۱}{۵}$. بنابراین، احتمال قهرمانی هر یک از تیم‌ها عبارت است از : $P(a)=P(b)=P(c)=\frac{۱}{۵}$ و $P(d)=\frac{۲}{۵}$.

کار در کلاس

۱ در یک آزمایش تصادفی، $S=\{x,y,z\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(\{x,y\})=\frac{۲}{۳}$ و $P(\{x,z\})=\frac{۱}{۲}$، احتمال وقوع هریک از پیشامدهای ساده را به‌دست آورید.

حل :

با توجه به اینکه x, y و z همه اعضای فضای نمونه‌ای هستند. بنابراین $P(x)+P(y)+P(z)=۱$. همچنین با توجه به فرض $P(\{x,y\})=\frac{۲}{۳}$، پس $P(x)+P(y)=\frac{۲}{۳}$، بنابراین با توجه به تساوی بالا، $P(z)=\frac{\cdots}{\cdots}$.

از سوی دیگر، $P(\{x,z\})=\frac{۱}{۲}$، پس $P(x)+P(z)=\frac{۱}{۲}$. از قراردادن $P(z)$ در این تساوی $P(x)=\frac{\cdots}{\cdots}$ به‌دست می‌آید. اکنون این مقدار را در تساوی $P(x)+P(y)=\frac{۲}{۳}$ قرار دهید و مقدار $P(y)$ را به‌دست آورید : $P(y)=\frac{\cdots}{\cdots}$.

۲ یک تاس به‌گونه‌ای ساخته شده که احتمال وقوع هر عدد زوج، سه برابر احتمال وقوع هر عدد فرد است. در پرتاب این تاس، احتمال اینکه یکی از اعداد ۲ یا ۳ مشاهده شود را به‌دست آورید.

در این سؤال، $P(a)=۳P(b)$ که در آن a یک عدد زوج و b یک عدد فرد از ۱ تا ۶ هستند. بنابراین $P(۱)=P(۳)=\cdots$ و همچنین $P(۲)=P(۴)=\cdots$. (چرا؟) حال اگر $P(۱)=x$، سپس $P(۲)=۳x$. از رابطهٔ زیر استفاده کرده و با جای‌گذاری احتمال پیشامدهای ساده برحسب x، مقدار x را به‌دست آورید.

$$P(S)=۱ \Rightarrow P(۱)+P(۲)+P(۳)+P(۴)+P(۵)+P(۶)=۱$$
$$\Rightarrow x+۳x+\cdots+\cdots+\cdots+\cdots=۱$$
$$\Rightarrow x=\cdots$$

اکنون با محاسبه $P(۲)$ و $P(۳)$ می‌توانید $P(\{۲,۳\})$ را تعیین کنید.

$$P(\{۲,۳\})=\cdots+\cdots=\cdots$$

تمرین

۱ در پرتاب یک سکهٔ ناسالم، احتمال آمدن «رو» نصف احتمال آمدن «پشت» است. در پرتاب این سکه، احتمال ظاهر شدن «رو» و احتمال ظاهر شدن «پشت» را به دست آورید.

۲ در پرتاب یک تاس، احتمال مشاهدهٔ هر عدد، متناسب با همان عدد است، مثلاً احتمال مشاهدهٔ عدد ۳، سه برابر احتمال مشاهدهٔ عدد ۱ است. اگر این تاس را به هوا پرتاب کنیم، احتمال اینکه عدد مشاهده شده، زوج باشد را تعیین کنید.

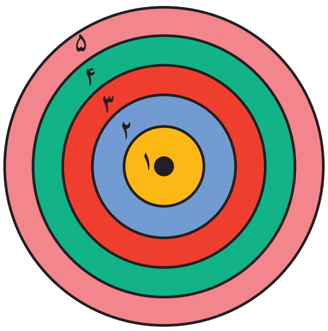
۳ اگر $S=\{a, b, c, d, e\}$ فضای نمونه‌ای یک آزمایش تصادفی و $A=\{a, b\}$, $B=\{a, b, c, d\}$ و $C=\{a, b, e\}$ سه پیشامد باشند به‌طوری که $P(A)=\frac{۲}{۷}$ و $P(B)=\frac{۳}{۵}$ ، مقدار $P(C')$ را به‌دست آورید.

۴ در یک تجربهٔ تصادفی، $S=\{x, y, z\}$ فضای نمونه‌ای است. اگر $P(x), P(y)$ و $P(z)$ یک دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت $\frac{۱}{۴}$ تشکیل دهند، احتمال وقوع هرکدام از این پیشامدها را به‌دست آورید.

۵ در پرتاب یک دارت به یک صفحه دایره‌ای شکل، مطابق شکل روبه‌رو که به پنج ناحیه مجزا تقسیم شده است[۱]، فرض کنید احتمال اصابت دارت به ناحیهٔ اوّل، x باشد. اگر احتمال اصابت به ناحیهٔ k ام، $(۲k-۱)x$ باشد :

الف) احتمال اصابت دارت به هر ناحیه را به‌دست آورید.

ب) احتمال اصابت دارت به یکی از ناحیه‌های اوّل، سوم یا چهارم بیشتر است، یا اصابت به دو ناحیهٔ دوم یا پنجم؟



۱ــ مرز مشترک بین دو ناحیه را جزء ناحیهٔ کوچک‌تر محسوب کنید.

درس ۳ احتمال شرطی

در مسائلی که در آنها با عدم قطعیت و احتمال سر و کار داریم، گاهی با سؤال‌هایی شرطی مواجه هستیم : «اگر فردا برف ببارد، چقدر احتمال دارد راه برخی روستاهای دهستان‌های شهرستان کنگاور مسدود شود؟»، «اگر راننده‌ای از کمربند ایمنی استفاده نکند، چقدر احتمال دارد پس از تصادف، دچار نقص عضو شود؟»، «اگر دانش‌آموزی در سال یازدهم موفق به کسب معدل بالای ۱۸ شود، چقدر احتمال دارد که در سال گذشته معدلش زیر ۱۵ بوده باشد؟» و . . .

در همهٔ این موارد با دو پیشامد مختلف سر و کار داریم و فرض می‌کنیم یکی از آنها رخ داده است و می‌خواهیم بدانیم احتمال رخ دادن دومی چه تغییری کرده است.

فعالیت

۱ در یک قرعه‌کشی بین ۲۰ نفر قرار است از بین کارت‌هایی با شماره‌های ۱ تا ۲۰، یکی را به تصادف انتخاب کنند. شمارهٔ کارت اکبر ۱۵ و شمارهٔ کارت بهرام ۷ است.

الف) احتمال اینکه اکبر برنده شود چقدر است؟ احتمال برنده شدن بهرام چقدر است؟

ب) وقتی مجری کارت را انتخاب می‌کند، قبل از اینکه آن را به دیگران نشان بدهد، می‌گوید : «عدد برنده، دو رقمی است!» اکنون اکبر و بهرام احتمال برنده شدن خود را چقدر می‌دانند؟

۲ در مدرسه‌ای سه کلاس یازدهم، با نام‌های ۱ـ۱۱، ۲ـ۱۱ و ۳ـ۱۱ وجود دارد که به‌ترتیب ۳۲، ۳۳ و ۳۵ دانش‌آموز دارند. در آزمونی مشترک از این سه کلاس، به‌ترتیب ۸، ۹ و ۶ نفر موفق به کسب نمرهٔ کامل شده‌اند. یکی از دانش‌آموزان را به تصادف انتخاب می‌کنیم.

الف) فضای نمونه که شامل همهٔ دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم است، چند عضوی است؟

ب) احتمال اینکه دانش‌آموز انتخاب شده نمرهٔ کامل گرفته باشد (پیشامد A) چقدر است؟

پ) احتمال اینکه او، دانش‌آموز کلاس ۱ـ۱۱ باشد (پیشامد B) چقدر است؟

ت) فرض کنید بعد از انتخاب، بفهمید که او دانش‌آموز کلاس ۱ـ۱۱ است. در این صورت، چقدر احتمال می‌دهید که او موفق به کسب نمرهٔ کامل شده باشد؟

در حلّ قسمت (ت) می‌توان این‌طور فکر کرد که فضای نمونه، که متشکل از ۱۰۰ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم است، بعد از اطلاع از اینکه او دانش‌آموز کلاس ۱ـ۱۱ است، به فضای نمونهٔ دیگری، که متشکل از ۳۲ دانش‌آموز کلاس ۱ـ۱۱ است، کاهش یافته است. سپس باید بررسی کنیم که چند نفر از ۳۲ دانش‌آموز کلاس ۱ـ۱۱ موفق به کسب نمرهٔ کامل شده‌اند. این یعنی تعداد اعضای پیشامد ..... $\cap$ ..... را بشماریم و نتیجه را به تعداد اعضای مجموعهٔ ..... تقسیم کنیم.

در علم احتمال برای آنچه در قسمت (ب) فعالیت ۱ و قسمت (ت) فعالیت ۲ پرسیده شد، از اصطلاح «احتمال شرطی» استفاده می‌کنند. مثلاً در فعالیت ۲ که پیشامد A «کسب نمرهٔ کامل» و B «دانش‌آموز کلاس ۱ـ۱۱ بودن» است آنچه خواسته شد، احتمال «کسب نمرهٔ کامل به شرط دانش‌آموز کلاس ۱ـ۱۱ بودن» است که با $P(A|B)$ نمایش داده می‌شود.

کار در کلاس

در فعالیت «قرعه‌کشی» احتمال شرطی کدام پیشامد نسبت به کدام پیشامد مورد سؤال قرار گرفته است؟

احتمال شرطی: کاهش فضای نمونه

باز هم به دو فعالیت قبل توجه کنید. در حالتی که فضای احتمال هم‌شانس است شرطی کردن یک پیشامد نسبت به پیشامد B مثل این است که فضای نمونه، یعنی S، را کنار گذاشته و B را فضای نمونه تلقی کنیم. احتمال روی این فضای نمونه نیز هم‌شانس است. به این رویکرد «کاهش فضای نمونه» گفته می‌شود.

کار در کلاس

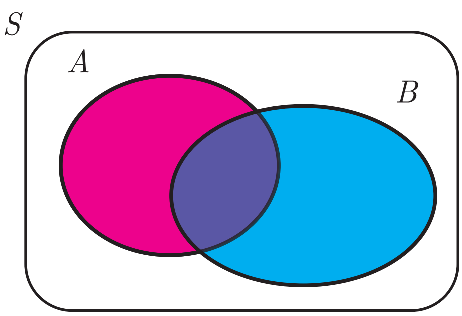
فرض کنید تاسی را دو مرتبه پرتاب می‌کنیم.

الف) فضای نمونهٔ این آزمایش چند عضوی است؟ آیا این فضای احتمال هم‌شانس است؟

ب) می‌دانیم که مجموع عدد دو پرتاب از ۹ بیشتر شده است. در این صورت، احتمال اینکه دست‌کم یک ۶ آمده باشد چقدر است؟

احتمال شرطی چگونه محاسبه می‌شود؟

همان‌طور که اشاره شد، اگر با احتمال هم‌شانس سر و کار داشته باشیم محاسبهٔ $P(A|B)$ ساده است؛ کافی است تعداد حالات مطلوب را به تعداد حالات ممکن تقسیم کنیم، ولی باید توجه داشته باشیم که چون می‌دانیم B رخ داده است دیگر همهٔ اعضای پیشامد A ممکن نیستند و لذا مجموعهٔ حالت‌های مطلوب در این وضعیت $A\cap B$ است. پس



$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

ولی در حالت کلی که احتمال می‌تواند هم‌شانس نباشد چه باید کرد؟

فعالیت

دوباره فرض کنید موضوع گفت‌وگوی احتمال هم‌شانس باشد؛ آیا می‌توانید سمت راست فرمول احتمال شرطی در حالت هم‌شانس را به شکلی بازنویسی کنید که به جای تعداد اعضای پیشامدها احتمال آنها آمده باشد؟

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{n(A\cap B)/n(........)}{n(B)/n(........)}=\frac{P(......\cap......)}{P(......)}$$

اگر فعالیت قبل را به درستی انجام داده باشید، به تعریف کلی احتمال شرطی (برای فضاهای هم‌شانس و فضاهای غیرهم‌شانس) رسیده‌اید :

در صورتی‌که B پیشامدی باشد که $P(B)>0$، برای هر پیشامد A، «احتمال A به شرط رخ دادن B» (که آن را «P ی A به شرط B» نیز می‌خوانیم) به شکل زیر تعریف می‌شود :

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

تذکر : در حالتی که $P(B)=0$، احتمال هیچ پیشامدی به شرط B تعریف نمی‌شود.

مثال : سکه‌ای را سه بار پرتاب می‌کنیم. می‌دانیم که دست کم یک بار رو آمده است. در این صورت، احتمال اینکه هر سه بار رو آمده باشد چقدر است؟

حل : سه بار رو آمدن سکه را A و دست کم یک بار رو آمدن سکه را B می‌نامیم. باید $P(A|B)$ را حساب کنیم. پس با توجه به تعریف باید $P(A\cap B)$ و $P(B)$ را محاسبه کنیم. فضای نمونه ۸ عضوی است و پیشامد $A\cap B$، یعنی سکه سه بار رو آمده باشد و به‌علاوه دست کم یک بار رو آمده باشد و این در واقع یعنی سکه در هر سه پرتاب رو آمده باشد. پس

$$P(A\cap B)=\frac{۱}{۸}$$

برای محاسبهٔ $P(B)$ بهتر است به پیشامد متمم آن توجه کنیم؛ پیشامد B' یعنی سکه اصلاً رو نیامده باشد که فقط یک حالت است. در نتیجه :

$$P(B)=۱-P(B')=۱-\frac{۱}{۸}=\frac{۷}{۸}$$

و لذا

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{۱}{۸}}{\frac{۷}{۸}}=\frac{۱}{۷}$$

مثال : دو تاس سبز و قرمز را پرتاب می‌کنیم.

الف) اگر بدانیم مجموع دو تاس ۱۰ شده است، احتمال اینکه تاس سبز ۶ آمده باشد چقدر است؟

ب) اگر بدانیم که تاس سبز ۶ آمده است، احتمال اینکه مجموع دو تاس ۱۰ شده باشد چقدر است؟

حل : الف) فرض کنید پیشامد A یعنی تاس سبز ۶ بیاید و پیشامد B یعنی مجموع دو تاس ۱۰ شود. پس در این مثال، $P(A|B)$ خواسته شده است و لذا باید $P(A\cap B)$ و $P(B)$ را محاسبه کنیم. فضای نمونه ۳۶ عضو دارد و یک فضای

هم‌شانس است پس باید تعداد اعضای یک پیشامد را برای رسیدن به احتمال آن به‌دست آوریم. روشن است که

$B=\{(۴,۶),(۵,۵),(۶,۴)\}$ و درنتیجه : $P(B)=\frac{۳}{۳۶}$.

روشن است که $A\cap B=\{(۶,۴)\}$ و لذا $P(A\cap B)=\frac{۱}{۳۶}$.

در نتیجه : $P(A|B)=\frac{۱}{۳}$.

ب) طبق نمادگذاری قسمت قبل، باید $P(B|A)$ را محاسبه کنیم. توجه داشته باشید که $P(A)=\frac{۱}{۶}$. پس

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{\frac{۱}{۳۶}}{\frac{۱}{۶}}=\frac{۱}{۶}$$

مثال : تیم ملی والیبال ایران، ۱۴ بازیکن دارد که قد هیچ دو نفری برابر نیست. اگر یکی از بازیکن‌ها را به‌تصادف انتخاب کنیم.

الف) احتمال اینکه آن بازیکن، بلندقدترین بازیکن تیم باشد چقدر است؟

ب) بازیکن دیگری را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که از بازیکن اوّل کوتاه قدتر است. در این صورت، احتمال اینکه بازیکن اوّل بلندقدترین بازیکن تیم باشد چقدر است؟

حل : پاسخ قسمت (الف) ساده است؛ با توجه به اینکه یکی از ۱۴ بازیکن، بلندقدترین بازیکن تیم است، احتمال اینکه آن فرد همان باشدکه ما تصادفاً انتخاب کرده‌ایم $\frac{۱}{۱۴}$ است.

برای به دست آوردن پاسخ قسمت (ب) دو پیشامد A و B را به شکل زیر تعریف می‌کنیم :

A : بازیکن اوّل بلندقدترین بازیکن تیم است.

B : بازیکن اوّل بلندقدتر از بازیکن دوم است.

$$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}=\frac{\frac{۱}{۱۴}}{\frac{۱}{۲}}=\frac{۱}{۷}$$

دلیل اینکه $P(B)=\frac{۱}{۲}$ ، این است احتمال اینکه بین دو بازیکن اوّلی یا دومی بلندقدتر باشد، برابر است.

کار در کلاس

در فعالیت مربوط به دانش‌آموزان پایهٔ یازدهم آمده بود که سه کلاس ۱ــ۱۱، ۲ــ۱۱ و ۳ــ۱۱ به‌ترتیب ۳۲، ۳۳ و ۳۵ دانش‌آموز دارند و در آزمون مشترک در این سه کلاس به‌ترتیب ۸، ۹ و ۶ نفر موفق به کسب نمرهٔ کامل شده‌اند. دانش‌آموزی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. پیشامد «دانش‌آموز کلاس ۱ــ۱۱ بودن» را $B_۱$ می‌نامیم و $B_۲$ و $B_۳$ را به‌طور مشابه تعریف می‌کنیم. پیشامد «نمره کامل شدن» را نیز با A نمایش می‌دهیم.

الف) مقدار $P(A|B_i)$ را برای $i=۱,۲,۳$ محاسبه کنید.
ب) مقدار $P(B_i|A)$ را برای $i=۱,۲,۳$ محاسبه کنید. معنای آنچه حساب کرده‌اید چیست؟
پ) با اطلاعات موجود در مورد سه کلاس، دانش‌آموزان کدام کلاس را در آزمون مشترک موفق‌تر می‌دانید؟ برای پاسخ دادن به این سؤال، پاسخ قسمت (الف) مهم است یا پاسخ قسمت (ب)؟

کار در کلاس

فرض کنید B پیشامدی با احتمال مثبت باشد. نشان دهید :
الف) اگر $A_۱$ و $A_۲$ دو پیشامد ناسازگار باشند :

$$P((A_۱\cup A_۲)|B)=P(A_۱|B)+P(A_۲|B)$$

ب) برای هر پیشامد A داریم : $P(A'|B)=۱-P(A|B)$.

دانستن تعریف احتمال شرطی و درک درستی از مفهوم آن برای حلّ مسائل، احتمال لازم است، ولی کافی نیست. در ادامه، با سه ابزار آشنا می‌شویم که در حلّ مسائل احتمال بسیار مفیدند. این سه ابزار «قانون ضرب احتمال»، «قانون احتمال کل» و «قانون بیز» هستند. هر سه مورد را، در برخی کتاب‌ها با عنوان «قضیه» و «فرمول» نیز می‌شناسند. توجه داشته باشید که شما علاوه بر اینکه باید با این سه قانون آشنا شوید، این را هم باید بیاموزید که هر کدام در چه مواردی به کار می‌آیند.
برای یادگیری بهتر هر قانون، مثال‌هایی مطرح خواهد شد که برخی به‌قدری ساده‌اند که با روش‌های قبلی نیز قابل حل کردن هستند. انتخاب چنین مثال‌هایی به این دلیل است که مطلب در ابتدا در ذهن شما به‌درستی جا بیفتد. در ادامه برخی مثال‌های پیچیده‌تر هم آمده است، تا در استفاده از این ابزارها متبحرتر شوید.
در برخی مثال‌ها، سعی شده است که صورت مسئله تا حدّی شبیه یک مسئلهٔ واقعی باشد. در چنین مثال‌هایی فهم درست صورت مسئله و تبدیل درست آن به یک مسئلهٔ احتمال و تشخیص پیشامدهای مورد بحث و نام‌گذاری مناسب، بخشی از حلّ مسئله است و شما باید این کار را هم به‌خوبی فرا بگیرید.

قانون ضرب احتمال

تعریف احتمال شرطی، با یک محاسبهٔ ساده به عبارتی تبدیل می‌شود که به آن «قانون ضرب احتمال» گفته می‌شود :

اگر A و B دو پیشامد باشند که $P(A)>۰$، آن‌گاه $P(A\cap B)=P(A)P(B|A)$.

از این قانون، معمولاً وقتی استفاده می‌شود که بخواهیم عبارت سمت چپ تساوی را حساب کنیم.
مثال : در کیسه‌ای ۱ گوی سبز، ۳ گوی سفید و ۲ گوی قرمز است. از کیسه دو گوی به‌ترتیب و بدون جای‌گذاری خارج می‌کنیم. احتمال اینکه گوی اوّل سبز و گوی دوم سفید باشد، چقدر است؟
حل : پیشامد سبز بودن گوی اوّل را A و پیشامد سفید بودن گوی دوم را B می‌نامیم. در این صورت، آنچه خواسته شده $P(A\cap B)$ است. با توجه به قانون ضرب احتمال باید $P(A)$ و $P(B|A)$ را به دست آوریم. در ابتدا ۶ گوی در کیسه است که یکی از آنها سبز است. پس $P(A)=\frac{۱}{۶}$.

برای محاسبهٔ $P(B|A)$ توجه کنید که بعد از خارج کردن گوی اوّل، با این شرط که آن گوی سبز باشد، ۵ گوی در کیسه مانده که ۳ تا از آنها سفید است، درنتیجه : $P(B|A)=\frac{۳}{۵}$.

پس $P(A\cap B)=\frac{۱}{۶}\times\frac{۳}{۵}=۰/۱$.

قانون ضرب احتمال را می‌توان برای سه پیشامد نیز نوشت :

اگر $A_۱$، $A_۲$ و $A_۳$ پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند، آن‌گاه

$$P(A_۱\cap A_۲\cap A_۳)=P(A_۱)P(A_۲|A_۱)P(A_۳|(A_۱\cap A_۲))$$

در یکی از تمرین‌های پایانی درس از شما خواسته شده تا این قانون را ثابت کنید.

کار در کلاس

با داده‌های مثال قبل، اگر سه گوی را به‌ترتیب و بدون جای‌گذاری خارج کنیم، احتمال اینکه اوّلی سبز، دومی سفید و سومی قرمز باشد چقدر است؟

قسمتی از راه‌حل، مشابه مثال قبلی است. کافی است C را پیشامد قرمز بودن گوی سوم بگیریم. در این صورت، باید $P(A\cap B\cap C)$ را به‌دست آوریم. با استفاده از قانون ضرب برای سه پیشامد، راه‌حل را ادامه دهید.

کار در کلاس

بسکتبالیستی هر بار که اقدام به پرتاب می‌کند، اگر روحیهٔ خوبی داشته باشد، پرتابش به احتمال ۹۰ درصد گُل می‌شود و اگر روحیه‌اش ضعیف باشد، احتمال گل شدن پرتابش ۶۰ درصد است. به‌علاوه می‌دانیم او اگر پرتابی را گل کند، در پرتاب بعدی روحیهٔ خوبی دارد و در غیر این صورت، روحیه‌اش ضعیف خواهد شد. فرض کنید بسکتبالیست، پیش از اوّلین پرتاب، روحیهٔ خوبی داشته باشد. احتمال اینکه از سه پرتاب متوالی، دقیقاً دو پرتاب آخر گل شود چقدر است؟

تصویر مربوط به تیم ملی بسکتبال با ویلچر کشورمان در بازی‌های پارالمپیک ۲۰۱۶ ریو است که در اولین دیدار خود ۶۹ بر ۶۳، تیم آلمان را شکست داد.

برای حلّ این مسئله، پیشامد گل شدن پرتاب iام را A_i بنامید. آنچه باید محاسبه کنید $P(A'_۱\cap A_۲\cap A_۳)$ است.

با استفاده از فرضیات مسئله و قانون ضرب احتمال داریم :

$$P(A'_۱\cap A_۲\cap A_۳)=P(A'_۱)P(A_۲|A'_۱)P(A_۳|A'_۱\cap A_۲)=۰/۱\times۰/۶\times۰/۹=۰/۰۵۴$$

چرا $P(A_۳|A'_۱\cap A_۲)$ برابر ۰/۹ است؟

مثال : فرض کنید سه کارت داریم. دو روی کارت اوّل سبز و دو روی کارت دوم قرمز است و یک روی کارت سوم سبز و روی دیگرش قرمز است. کارتی را به‌تصادف برمی‌داریم و مشاهده می‌کنیم که یک روی آن سبز است. احتمال اینکه هر دو روی آن سبز باشد چقدر است؟

حل : در ابتدا برای پیشامدهایی که در مثال آورده شده نام‌هایی انتخاب می‌کنیم :

A : کارت دو رو سبز است.

B : روی مشاهده‌شدهٔ کارت انتخابی سبز است.

باید $\mathrm{P}(A\cap B)$ و $\mathrm{P}(B)$ را محاسبه کنیم. واضح است که بعد از انتخاب یک کارت و نگاه کردن به یک روی آن، یکی از شش روی سه کارت را با احتمال‌های برابر، خواهیم دید و چون در مجموع سه روی سبز و سه روی قرمز داریم، پس

$$\mathrm{P}(B)=\frac{۳}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

احتمال پیشامد $A\cap B$ را به‌راحتی می‌توان با استفاده از قانون ضرب به دست آورد :

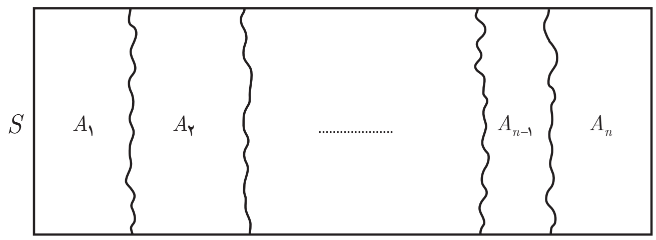
$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B\mid A)=\frac{۱}{۳}\times ۱=\frac{۱}{۳}$$

دلیل اینکه $\mathrm{P}(A)$ برابر $\frac{۱}{۳}$ است، این است که از سه کارت، یکی دو رو سبز است و $\mathrm{P}(B|A)=۱$ چون اگر کارت انتخابی دو رو سبز باشد، روی مشاهده شده حتماً سبز است. در نتیجه : $\mathrm{P}(A|B)=\frac{۲}{۳}$.

افراز[۱] : فرض کنیم $A_۱$ و $A_۲$ و $\cdots$ و A_n زیر مجموعه‌هایی ناتهی از مجموعهٔ S باشند، به‌گونه‌ای که اجتماع همهٔ آنها برابر S، و اشتراک هر دوتای آنها برابر $\varnothing$ باشد، در این‌صورت می‌گوییم این مجموعه‌ها یک **افراز** روی S درست کرده‌اند. به عبارتی داریم :

$$۱)\ A_۱\cup A_۲\cup\cdots\cup A_n=S \qquad (\bigcup_{i=۱}^{n}A_i=S)$$

$$۲)\ A_۱\cap A_۲=\varnothing\ ,\ A_۱\cap A_۳=\varnothing\ ,\ \cdots\ ,\ A_{n-۱}\cap A_n=\varnothing \qquad (A_i\cap A_j=\varnothing\ ,\ \underset{i\neq j}{۱\le i,j\le n})$$



مثال : کشور ایران به ۳۱ استان افراز شده است.

مثال : اگر A مجموعهٔ اعداد طبیعی اول و B مجموعهٔ اعداد طبیعی مرکب و $C=\{۱\}$ باشند، در این صورت A , B و C یک افراز روی مجموعهٔ اعداد طبیعی هستند.

مثال : مجموعهٔ اعداد گویا و مجموعهٔ اعداد اصم یک افراز روی مجموعهٔ اعداد حقیقی تشکیل می‌دهند.

۱ــ مفهوم افراز صرفاً جهت استفاده در قانون احتمال کل بیان شده است و طرح سؤال از آن در ارزشیابی مدنظر نیست.

قانون احتمال کل

رسیدن از داده‌های جزئی به نتایج کلی بسیار معمول است؛ مثلاً اطلاعاتی آماری که در استان‌های کشور تهیه شده، می‌تواند بعد از انجام برخی محاسبات منجر به آمارهایی دربارهٔ کلّ کشور شود. یا اطلاعاتی در مورد رفتار ترافیکی گروه‌های مختلف سنی و جنسی را می‌توان جمع‌بندی کرد و به آماری دربارهٔ همهٔ رانندگان رسید. موضوع قانون احتمال کل چنین چیزهایی است.

فعالیت

دو کیسه داریم که اوّلی شامل ۲ گوی سفید و ۳ گوی سبز و دومی شامل ۱ گوی سفید و ۹ گوی قرمز است. یکی از دو کیسه را به تصادف انتخاب می‌کنیم و از آن گویی را برمی‌داریم. می‌خواهیم احتمال سفید بودن این گوی را محاسبه کنیم.

سه پیشامد A، $B_۱$ و $B_۲$ را به شکل زیر تعریف می‌کنیم :

A : گوی برداشته شده سفید است.

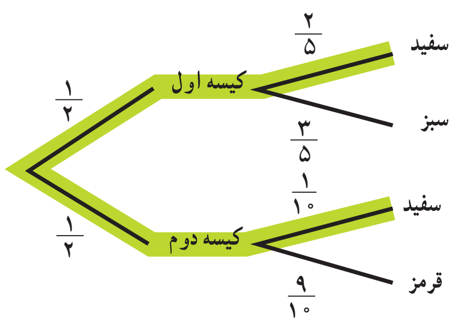
$B_۱$: کیسهٔ اوّل انتخاب شده است.

$B_۲$: کیسهٔ دوم انتخاب شده است.

پس هدف محاسبه $P(A)$ است. طبق اطلاعات داده شده $P(A|B_۱), P(A|B_۲)$، به‌ترتیب، برابر ...... و ...... هستند. به‌علاوه واضح است که $P(B_۱) = P(B_۲) = \ldots$. چون کیسهٔ انتخابی یا کیسهٔ اوّل است یا کیسهٔ دوم. پس $B_۱$ و $B_۲$ فضای نمونه را افراز می‌کنند. این نتیجه می‌دهد که $A\cap B_۱$ و $A\cap B_۲$ نیز A را افراز می‌کنند. پس

$$P(A)=P\big((A\cap B_۱)\cup(A\cap B_۲)\big)=P(A\cap B_۱)+P(A\cap B_۲)$$
$$=P(B_۱)P(A|B_۱)+P(B_۲)P(A|B_۲)=\frac{۱}{۲}\times\cdots+\cdots\times\cdots=\cdots$$

در محاسبات فوق دو بار از قانون ضرب احتمال استفاده کردیم. «کجا؟» نمودار درختی زیر، محاسبات را به شکل دیگری نمایش می‌دهد :



$$\left.\begin{array}{l} :\frac{۱}{۲}\times\frac{۲}{۵} \\ \\ :\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۱۰}\end{array}\right\} =\frac{۱}{۲}\times\cdots\cdots+\frac{۱}{۲}\times\cdots\cdots=\cdots\cdots$$

«قانون احتمال کل»، که شما در فعالیت قبل تلویحاً از آن استفاده کردید، به این شکل است :

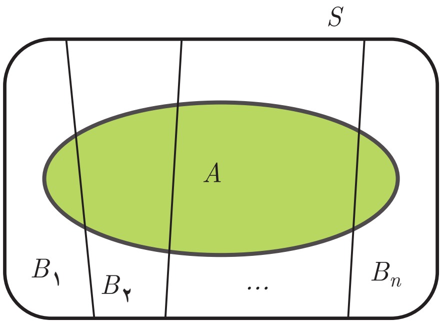
فرض کنید $B_۱$، $B_۲$، و ... B_n پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می‌کنند. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A، داریم :

$$P(A)=P(B_۱)P(A|B_۱)+P(B_۲)P(A|B_۲)+\ldots+P(B_n)P(A|B_n)=\sum_{k=۱}^{n}P(B_k)P(A|B_k)$$

در فعالیت قبل، فضای نمونه به دو پیشامد $B_۱$ و $B_۲$ افراز شده بود؛ کیسهٔ انتخابی، یا کیسهٔ اوّل است، یا کیسهٔ دوم است.

کار در کلاس

با انجام مراحل زیر قانون احتمال کل را ثابت کنید :



۱ این فرض که B_1، B_2، و ... B_n فضای نمونه را افراز می‌کنند؛ یعنی دو به دو .... هستند و ... $= \bigcup_{k=1}^{n} B_k$.

۲ در این صورت $A\cap B_1$، $A\cap B_2$، و ... $A\cap B_n$ دو به دو .... هستند و اجتماع آنها برابر ...... می‌شود. در نتیجه داریم

$$\mathrm{P}(A)=\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}(...\cap...)$$

۳ اگر جملات داخل سیگما را به کمک قانون ضرب احتمال بازنویسی کنید، به قانون احتمال کل می‌رسید.

کار در کلاس

میوه‌فروشی ده صندوق سیب از سه باغ مختلف خریده است. ۳ صندوق از باغ شمالی، ۵ صندوق از باغ مرکزی و ۲ صندوق از باغ جنوبی. در این سه باغ احتمال اینکه یک سیب لکه‌دار باشد، به‌ترتیب، ۱۰ درصد، ۳ درصد و ۵ درصد است. با فرض اینکه تعداد سیب در صندوق‌های مختلف برابر است، احتمال اینکه سیبی که از یکی از صندوق‌ها برمی‌داریم لکه‌دار باشد چقدر است؟

برای حلّ این مسئله گیریم B_1، B_2 و B_3، به‌ترتیب، این پیشامدها باشند که سیب انتخابی از باغ شمالی، باغ مرکزی و باغ جنوبی باشد. پیشامد A را نیز لکه‌دار بودن آن سیب تعریف می‌کنیم. در این صورت داریم :

$\mathrm{P}(B_1)=...$, $\mathrm{P}(B_2)=...$, $\mathrm{P}(B_3)=...$

و

$\mathrm{P}(A|B_1)=...$, $\mathrm{P}(A|B_2)=...$, $\mathrm{P}(A|B_3)=...$

آنچه در مسئله از ما خواسته شده است $\mathrm{P}(A)$ است که با استفاده از قانون احتمال کل به شکل زیر محاسبه می‌شود :

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B_1)\mathrm{P}(A|B_1)+ \cdots\cdots + \cdots\cdots = \cdots + \cdots + \cdots =$$

با تکمیل محاسبات جواب به دست می‌آید.

می‌دانیم که B و B' فضای S را افراز می‌کنند؛ لذا ساده‌ترین شکل قانون احتمال کل در حالت $n=2$ به شکل زیر بیان می‌شود :

فرض کنید B پیشامدی باشد که $0<\mathrm{P}(B)<1$. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A، داریم :

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(B')\mathrm{P}(A|B')$$

مثال : دسته‌ای کارت شامل ۲ کارت دو رو قرمز و ۸ کارت یک رو سبز، یک رو قرمز است. کارتی را به‌تصادف از این دسته انتخاب می‌کنیم و یک روی آن را می‌بینیم. احتمال اینکه رنگ مشاهده شده قرمز باشد چقدر است؟

حل : این پیشامد را که رنگ قرمز دیده شود A و این پیشامد را که دو روی کارت انتخابی قرمز باشد B می‌نامیم. باید $P(A)$ را حساب کنیم. طبق قانون احتمال کل داریم :

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')$$

واضح است که $P(A|B)=۱$ و $P(A|B')=۰/۵$ و با توجه به تعداد، دو نوع کارت داریم

$$P(B)=\frac{۲}{۲+۸}=۰/۲\ ,\ P(B')=۱-۰/۲=۰/۸$$

پس
$$P(A)=۰/۲\times۱+۰/۸\times۰/۵=۰/۶$$

قانون بیز

وقتی شما برای اوّلین‌بار با فردی آشنا می‌شوید، پیش‌فرض‌هایی از میزان صداقت او دارید. در طول زمان که اعمال و رفتار او را می‌بینید این پیش‌فرض‌ها به شکل مثبت یا منفی تغییر می‌کند. اگر مربی ورزش دانش‌آموزی را تحت نظر بگیرد، در ابتدا نسبت به توانایی او در ضربه زدن به توپ پیش‌فرض‌هایی دارد و هر چه بازی او را مشاهده کند، این پیش‌فرض‌ها تغییر می‌کند. قانون بیز که از مهم ترین قوانین در علم احتمال است، این موضوع را به زبان ریاضی فرمول‌بندی می‌کند.

خواندنی

توماس بِیز[1] آماردان، فیلسوف و کشیش انگلیسی است که به دلیل فرمول‌بندی حالت خاصی از قانون بیز، معروف شده است. او البته هیچ‌گاه کارهایی که در نهایت منجر به قانون بیز شد را منتشر نکرد؛ بلکه بعد از مرگش ریچارد پرایس[2]، فیلسوف و ریاضی‌دان اهل ولز پس از ویرایش یادداشت‌های بیز آنها را منتشر کرد.

فعالیت

فرض کنید سه صندوق، با تعداد زیاد سیب، از سه باغ شمالی، مرکزی و جنوبی داریم. در این باغ‌ها، به‌ترتیب، ۱۰ درصد، ۳ درصد و ۵ درصد سیب‌ها لکه دارند. یکی از صندوق‌ها را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم.

الف) احتمال اینکه این صندوق مربوط به باغ شمالی باشد چقدر است؟ در مورد دو باغ دیگر این احتمال چقدر است؟

ب) اکنون سیبی را به تصادف از داخل صندوق انتخابی خارج می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که لکه‌دار است. آیا بعد از این مشاهده، نظر شما در مورد احتمال اینکه صندوق انتخابی مربوط به باغ شمالی باشد، تغییر کرده است؟

پ) به‌طور شهودی، فکر می‌کنید آیا این احتمال نسبت به قبل از مشاهدهٔ سیب لکه‌دار افزایش پیدا کرده است، یا کاهش؟

۱ــ Thomas Bayes (۱۷۰۲ ــ ۱۷۶۱)

۲ــ Richard Price (۱۷۲۳ ــ ۱۷۹۱)

در علم احتمال گاهی با مسائلی مانند فعالیت قبل مواجه هستیم که در آنها وقوع یک پیشامد، موجب تغییر نگرش ما به احتمال وقوع پیشامدهای دیگر می‌شود. شما در زندگی با این نوع مسائل، البته با نگاهی کیفی و نادقیق، مواجه بوده‌اید.

قانون بیز مشخص می‌کند که «احتمال‌های پیش از مشاهده» چگونه به «احتمال‌های پس از مشاهده» تبدیل می‌شوند.

فرضیات قانون بیز کاملاً مشابه فرضیات قانون احتمال کل است:

فرض کنید B_1، B_2، ... و B_n پیشامدهایی با احتمال ناصفر باشند که فضای نمونه را افراز می‌کنند. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A و هر $i \le n$ داریم:

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{P(A)}$$

این قانون توضیح می‌دهد که چگونه $P(B_i)$ها بعد از مشاهدهٔ رخ دادن پیشامد A، به $P(B_i|A)$ها تبدیل می‌شوند.

گاهی قانون بیز را به شکل زیر می‌نویسند:

$$P(B_i \mid A) = \frac{P(B_i)P(A \mid B_i)}{\sum_{k=1}^{n} P(B_k)P(A \mid B_k)}$$

هدف از این نوع نوشتن قانون بیز این است که تصریح شود در یک مسئلهٔ مربوط به قانون بیز معمولاً داده‌های موجود $P(B_k)$ها و $P(A|B_k)$ها هستند. توجه کنید که آنچه در مخرج عبارت سمت راست آمده است، طبق قانون احتمال کل، همان $P(A)$ است.

ساده‌ترین حالت قانون بیز وقتی است که n برابر ۲ باشد. در این‌صورت، B_1 و B_2 دو پیشامد متمم‌اند.

فرض کنید B پیشامدی باشد که احتمال آن مخالف صفر و یک است. در این صورت، برای هر پیشامد دلخواه A:

$$P(B \mid A) = \frac{P(B)P(A \mid B)}{P(A)} = \frac{P(B)P(A \mid B)}{P(B)P(A \mid B) + P(B')P(A \mid B')}$$

اگر احتمال B صفر، یا یک باشد چه مشکلی در فرمول بالا پیش می‌آید؟

مثال: دسته‌ای کارت شامل ۲ کارت دو رو قرمز و ۸ کارت یک رو سبز، یک رو قرمز است. کارتی را به‌تصادف از این دسته انتخاب می‌کنیم و فقط یک روی آن را مشاهده می‌کنیم و می‌بینیم که قرمز است. احتمال اینکه روی دیگر کارت نیز قرمز باشد چقدر است؟

حل: این پیشامد که رنگ قرمز دیده شود را A و این پیشامد که دو روی کارت انتخابی قرمز باشد را B می‌نامیم. باید $P(A)$ را حساب کنیم. با توجه به اینکه B و B' فضای نمونه را افراز می‌کنند داریم:

$$P(A)=P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')=۰/۲\times۱+۰/۸\times۰/۵=۰/۶$$

توجه کنید که پیشامد B' یعنی کارت انتخابی دو رو قرمز نباشد و به همین دلیل احتمال آن ۰/۸ است.

طبق قانون بیز داریم:

$$P(B \mid A) = \frac{P(B)P(A \mid B)}{P(A)} = \frac{۰/۲\times۱}{۰/۶} = \frac{۱}{۳}$$

مثال : سه صندوق سیب، هر کدام شامل ۱۰۰ سیب داریم. سیب‌های صندوق اوّل سبز؛ سیب‌های صندوق دوم، قرمز است. صندوق سوم شامل ۲ سیب سبز و ۹۸ سیب قرمز است. صندوقی را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم.

فرض کنید دست در صندوق کنیم و سیبی را تصادفاً در آوریم و ببینیم که سبز است. احتمال اینکه همهٔ سیب‌های صندوق سبز باشد چقدر است؟

حل : فرض کنید پیشامد A، یعنی سیب مشاهده شده سبز باشد و پیشامدهای $B_۱$، $B_۲$ و $B_۳$ به‌ترتیب به معنای انتخاب صندوق‌های اوّل، دوم و سوم باشند. لذا

$$P(B_۱)=P(B_۲)=P(B_۳)=\frac{۱}{۳}$$

و

$$P(A|B_۱)=۱ \quad , \quad P(A|B_۲)=۰ \quad , \quad P(A|B_۳)=\frac{۲}{۱۰۰}=۰/۰۲$$

برای محاسبهٔ $P(B_۱|A)$ ابتدا $P(A)$ را محاسبه می‌کنیم. طبق قانون احتمال کل

$$P(A)=\frac{۱}{۳}\times۱+\frac{۱}{۳}\times۰+\frac{۱}{۳}\times۰/۰۲=۰/۳۴$$

در نتیجه :

$$P(B_۱|A)=\frac{P(B_۱)P(A|B_۱)}{P(A)}=\frac{\frac{۱}{۳}}{۰/۳۴}=\frac{۱}{۱/۰۲}\simeq۰/۹۸۰۴$$

کار در کلاس

فرض کنید سه صندوق سیب، از سه باغ شمالی، مرکزی و جنوبی داریم. در این باغ‌ها، به‌ترتیب، ۱۰ درصد، ۳ درصد و ۵ درصد سیب‌ها لکه‌دارند. یکی از صندوق‌ها را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم و نمی‌دانیم که صندوق انتخابی مربوط به کدام باغ است. سیبی را از آن صندوق خارج می‌کنیم و مشاهده می‌کنیم که لکه‌دار است. در این صورت، احتمال اینکه صندوق انتخابی مربوط به باغ شمالی باشد، چقدر است؟

برای حلّ این مسئله، این پیشامد را که سیب انتخابی لکه‌دار باشد با A و اینکه صندوق انتخابی مربوط به سه باغ شمالی، مرکزی و جنوبی باشد را به‌ترتیب با $B_۱$، $B_۲$ و $B_۳$ نمایش دهید.

در صورت مسئله چه احتمال‌هایی مشخص شده است؟ آنها را مشخص می‌کنیم :

$$P(B_۱)=\ldots \quad , \quad P(B_۲)=\ldots \quad , \quad P(B_۳)=\ldots$$

و

$$P(A|B_۱)=\ldots \quad , \quad P(A|B_۲)=\ldots \quad , \quad P(A|B_۳)=\ldots$$

آنچه در مسئله از ما خواسته شده است $P(B_۱|A)$ است. ابتدا $P(A)$ را محاسبه می‌کنیم :

$$P(A)=P(B_۱)P(A|B_۱)+ \qquad +$$

در نتیجه :

$$P(B_۱|A)=\frac{P(B_۱)P(A|B_۱)}{P(A)}=...$$

مثال : در یک کارخانهٔ شیر پاستوریزه، وقتی خط تولید سالم است، تنها ۲ درصد از پاکت‌ها کمتر از ۲۹۷ سی‌سی شیر دارند، ولی وقتی یکی از قطعات اصلی خط تولید دچار عیب می‌شود، این مقدار به ۱۰ درصد افزایش پیدا می‌کند. تجربه نشان داده است که احتمال خراب شدن خط تولید که تقریباً همیشه ناشی از معیوب شدن آن قطعه است، پس از یک ماه، ۵ درصد است. ماه گذشته آخرین باری بوده است که مسئول فنی، خط تولید را به‌طور کامل سرویس کرده است.

مسئول کنترل کیفیت کارخانه، به تصادف یک پاکت شیر را مورد بررسی قرار می‌دهد و مشاهده می‌کند که حاوی کمتر از ۲۹۷ سی‌سی شیر است. در این صورت احتمال خراب بودن خط تولید چقدر است؟

حل :

دو پیشامد A و B را به شکل زیر تعریف می‌کنیم :

A : حجم شیر پاکت انتخاب‌شده کمتر از ۲۹۷ سی‌سی است.

B : خط تولید خراب شده است.

در این صورت باید $P(B|A)$ را محاسبه کنیم. اطلاعات مسئله به این صورت خلاصه می‌شود :

$$P(B)=۰/۰۵$$
$$P(A|B)=۰/۱$$
$$P(A|B')=۰/۰۲$$

زیرا $P(B)$ یعنی احتمال خراب بودن خط تولید، $P(A|B)$ یعنی احتمال اینکه یک پاکت کمتر از ۲۹۷ سی‌سی شیر داشته باشد، به شرط آنکه خط تولید خراب شده باشد و $P(A|B')$ یعنی احتمال اینکه یک پاکت کمتر از ۲۹۷ سی‌سی شیر داشته باشد، به شرط آنکه خط تولید سالم باشد.

طبق قانون بیز داریم :

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(B')P(A|B')}=\frac{۰/۰۵\times ۰/۱}{۰/۰۵\times ۰/۱+۰/۹۵\times ۰/۰۲}$$
$$=\frac{۵}{۲۴}\simeq ۰/۲۰۸$$

یعنی مسئول کنترل کیفیت که ابتدا فقط ۵ درصد احتمال می‌داد که خط تولید خراب شده باشد، بعد از مشاهدهٔ یک پاکت با محتویات کمتر از ۲۹۷ سی‌سی، ۲۰/۸ درصد احتمال می‌دهد که خط تولید خراب شده باشد.

تمرین

۱ دربارهٔ خانواده‌ای چهار فرزندی، می‌دانیم که دست کم یکی از فرزندان آنها پسر است. احتمال اینکه دقیقاً ۲ پسر داشته باشند چقدر است؟

۲ ستاد مرکزی معاینهٔ فنّی خودروهای تهران در اواخر سال ۱۳۹۵ اعلام کرد : «امسال پرکارترین سال در عرصهٔ معاینهٔ فنّی خودروهای کشور از ابتدای تأسیس تاکنون بوده و ۸۷۰ هزار خودرو در تهران معاینهٔ فنّی شده‌اند. امسال یکی از سخت‌ترین سال‌های مبارزه با آلودگی هوا بود ...»

در این طرح، سیزده مرکز مسئولیت معاینهٔ فنّی خودروهای سبک را به عهده داشتند. فرض کنید جدول زیر آمار خودروهای مراجعه کرده و خودروهای مردودی در معاینهٔ فنّی باشد : (تعداد به هزار دستگاه است).

شمارهٔ مرکز	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲	۱۳
تعداد مراجعه	۶۰	۷۷	۸۶	۸۵	۷۹	۷۹	۵۶	۵۹	۴۸	۵۰	۵۵	۵۱	۸۵
تعداد مردودی	۲۸	۱۶	۱۲	۱۷	۲۶	۱۰	۱۴	۱۴	۲۹	۳۰	۲۲	۲۲	۱۸

خودرویی را از بین خودروهای مراجعه کرده انتخاب می‌کنیم.

الف) خودروی انتخابی به چه احتمالی مردود شده است؟

ب) اگر بدانیم آن خودرو به مرکز شمارهٔ ۵ مراجعه کرده، جواب سؤال قبل چند است؟

پ) اگر بدانیم آن خودرو مردود شده است، احتمال اینکه به مرکز شمارهٔ ۵ مراجعه کرده باشد چقدر است؟

۳ بررسی‌های آماری نشان داده است که اگر یک روز ساحل جزیرهٔ هرمز آرام باشد، فردای آن روز به احتمال ۹۰ درصد آرام و به احتمال ۱۰ درصد طوفانی است و اگر ساحل در یک روز طوفانی باشد فردای آن روز به احتمال ۵۰ درصد آرام و به احتمال ۵۰ درصد طوفانی است. اگر امروز ساحل آرام باشد، احتمال اینکه در دو روز بعد ساحل طوفانی باشد چقدر است؟

۴ قانون ضرب احتمال برای سه پیشامد را ثابت کنید : $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|(A_1 \cap A_2))$

۵ قانون ضرب احتمال n پیشامد را بنویسید. اگر بخواهیم از این قانون برای محاسبهٔ احتمال اشتراک n پیشامد استفاده کنیم، به چند حالت مختلف این کار قابل انجام است؟

۶ جمعیت بزرگسال ساکن در یک روستا، ۵۵ درصد زن و ۴۵ درصد مرد است. می‌دانیم که ۲۰ درصد زنان بزرگسال و ۷۰ درصد مردان بزرگسال در این روستا گواهینامهٔ تراکتور دارند. اگر بزرگسالی را از ساکنان روستا به تصادف انتخاب کنیم، احتمال اینکه گواهینامهٔ تراکتور داشته باشد چقدر است؟

۷ دو ظرف داریم. در اوّلی ۴ مهره سبز و ۳ مهره قرمز و در دومی ۳ مهره سبز و ۵ مهره قرمز وجود دارد. از ظرف اوّل یک مهره به‌طور تصادفی برمی‌داریم و بدون مشاهده آن را به ظرف دوم منتقل می‌کنیم. اکنون یک مهره از ظرف دوم بیرون می‌آوریم؛ با چه احتمالی این مهره سبز است؟

۸ در شهری ۶۰ درصد راننده‌ها مرد و ۴۰ درصد زن هستند. احتمال اینکه یک رانندهٔ مرد، وقتی چراغ راهنمایی قرمز است، روی خط عابر توقف کند ۰/۰۵ است و زن‌ها چنین تخلفی را به احتمال ۰/۰۱ انجام می‌دهند. احتمال اینکه یک راننده در این شهر هنگام قرمز بودن چراغ راهنمایی روی خط عابر توقف کند چقدر است؟

۹ در دو جعبه به‌ترتیب، ۱۰ و ۱۲ لامپ موجود است. در جعبهٔ اوّل ۴ لامپ و در جعبهٔ دوم ۳ لامپ معیوب است. از هرکدام از جعبه‌ها ۵ لامپ به‌تصادف انتخاب و در یک جعبه جدید قرار می‌دهیم. احتمال آنکه لامپ انتخابی از جعبهٔ جدید، معیوب باشد را محاسبه کنید.

۱۰ ۵۰ درصد واجدین شرایط در شهر A و ۸۰ درصد واجدین شرایط در شهر B در انتخابات شورای شهر شرکت کرده‌اند. اگر تعداد واجدین شرایط شهر A سه برابر تعداد واجدین شرایط شهر B باشد و فردی به تصادف از بین رأی‌دهنده‌های این دو شهر انتخاب شود، به چه احتمالی از شهر A خواهد بود؟

۱۱ احتمال مبتلا شدن به یک بیماری خاص برای کودکی که واکسن زده ۰/۰۰۲ و برای کودکی که واکسن نزده ۰/۱ است. اگر در شهری ۹۰ درصد کودکان، واکسن زده باشند، احتمال اینکه یک کودک از این شهر به این بیماری مبتلا شود چقدر است؟

۱۲ قانون بیز را ثابت کنید :

$$\mathrm{P}(B_i \mid A)=\frac{\mathrm{P}(B_i)\mathrm{P}(A \mid B_i)}{\mathrm{P}(A)}$$

راهنمایی : در دو طرف تساوی از تعریف احتمال شرطی استفاده کنید، تا درستی آن را ببینید.

۱۳ امیر و بابک عضو تیم ده نفرهٔ والیبال مدرسه‌اند. در این تیم قد هیچ دو نفری برابر نیست. اگر بدانیم امیر از بابک بلندتر است، احتمال اینکه امیر بلندقدترین عضو تیم باشد چقدر است؟ احتمال اینکه امیر از نظر بلندی قد، نفر نهم باشد چقدر است؟

۱۴ علی و مازیار هر کدام به‌ترتیب، با احتمال‌های ۰/۳ و ۰/۴ برای دیدن یک مسابقهٔ ورزشی به ورزشگاه می‌روند. اگر علی به ورزشگاه رفته باشد، مازیار با احتمال ۰/۸ به ورزشگاه می‌رود. فرض کنید علی به ورزشگاه نرفته باشد. با چه احتمالی مازیار نیز به ورزشگاه نرفته است؟

۱۵ خانم‌ها اکبری، برنا و چمنی نسخه‌خوان‌های یک مؤسسهٔ انتشاراتی‌اندکه به‌ترتیب، ۲۰، ۳۰ و ۵۰ درصد از کارهای نسخه‌خوانی را انجام می‌دهند. احتمال اینکه این سه نفر صفحه‌ای که به آنها سپرده شده را بی‌غلط تصحیح کنند به‌ترتیب ۰/۹، ۰/۹۵ و ۰/۹۹ است. صفحه‌ای نسخه‌خوانی شده، ولی هنوز غلط دارد. احتمال اینکه مسئول خواندن آن صفحه خانم اکبری بوده باشد چقدر است؟

۱۶ فرض کنید از بین چهار کارت با شماره‌های ۱ تا ۴، کارتی را به‌تصادف انتخاب می‌کنیم و سپس سکه‌ای را به تعداد عدد کارت پرتاب می‌کنیم. اگر ۲ بار رو بیاید، احتمال اینکه شمارهٔ کارت خارج شده ۳ باشد چقدر است؟

۱۷ یک شرکت بیمه، بیمه گزاران خود را به دو گروه تقسیم کرده است؛ گروه «پرخطر» که در یک سال با احتمال ۰/۴ تصادف می‌کنند و گروه «کم خطر» که احتمال تصادف کردن آنها در یک سال ۰/۲ است. می‌دانیم که ۳۰ درصد بیمه‌گزاران پرخطرند.

الف) احتمال اینکه یک بیمه‌گزار در سال آینده تصادف کند را به دست آورید.

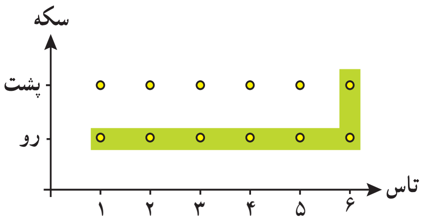
ب) اگر یک بیمه‌گزار در سال گذشته تصادف کرده باشد، احتمال اینکه جزء گروه پرخطر باشد چقدر است؟

درس ۴ پیشامدهای مستقل و وابسته

دنیایی که در آن زندگی می‌کنیم، سرشار از وقایعی است که به یکدیگر وابسته‌اند؛ مثلاً سونامی‌های بزرگ پس از زلزله‌های عظیم در داخل دریا اتفاق می‌افتند. بسیاری از رفتارهای انسانی نیز به یکدیگر وابسته‌اند؛ به عنوان مثال، اخلاق نیکوی یک فرد و روابط اجتماعی او به یکدیگر وابسته‌اند. از سوی دیگر بعضی از رخدادها به یکدیگر وابسته نیستند و اصطلاحاً، مستقل از یکدیگرند. آیا گروه خونی شما به گروه خونی دوستتان وابسته است؟ البته تشخیص وابستگی و یا مستقل بودن خیلی از پیشامدها، واضح نیست و به ابزاری دقیق برای بررسی آنها نیاز داریم.

فعالیت

یک سکه و یک تاس را به طور هم‌زمان پرتاب می‌کنیم. فرض کنید A پیشامد ۶ آمدن تاس و B پیشامد رو شدن سکه باشد.



۱ فضای نمونه‌ای این آزمایش تصادفی و پیشامدهای A، B و $A\cap B$ را بنویسید.

$S=\{(\text{ر},۱), \ldots, \ldots, \ldots, \ldots, \ldots, \ldots, \ldots, \ldots, \ldots, \ldots, \ldots\}$

$A=\{\ldots\ldots,\ldots\ldots\}$

$B=\{\ldots\ldots, \ldots\ldots, \ldots\ldots, \ldots\ldots, \ldots\ldots,\ldots\ldots\}$

$A\cap B=\{\cdots\cdots\}$

۲ احتمال وقوع پیشامدهای A، B و $A\cap B$ را تعیین کنید.

$$\mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} \quad , \quad \mathrm{P}(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} \quad ,$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$$

اگر سکه رو آمده باشد، احتمال اینکه تاس عدد ۶ بیاید، یعنی $\mathrm{P}(A|B)$ را به دست آورید.

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$$

۳ با مقایسهٔ $\mathrm{P}(A|B)$ و $\mathrm{P}(A)$، آیا وقوع پیشامد B تأثیری در احتمال وقوع پیشامد A داشته است؟

۴ اگر $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$، چه رابطه‌ای بین $\mathrm{P}(A)$، $\mathrm{P}(B)$ و $\mathrm{P}(A\cap B)$ برقرار است؟

۵ در تساوی $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$ و با استفاده از تعریف احتمال شرطی، تساوی $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$ را نتیجه بگیرید.

پیشامدهای A و B را **مستقل** می‌گوییم، هرگاه وقوع یکی از آنها در احتمال وقوع دیگری تأثیری نداشته باشد. به عبارت دیگر دو پیشامد A و B مستقل‌اند، اگر و تنها اگر

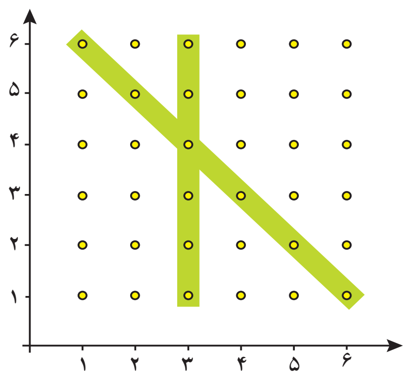
$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$

دو پیشامدی که مستقل نباشند، **وابسته** نامیده می‌شوند.

اگر $\mathrm{P}(A)$ و $\mathrm{P}(B)$ ناصفر باشند، برقراری تساوی $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$ و یا تساوی $\mathrm{P}(B|A)=\mathrm{P}(B)$ نیز مستقل بودن A و B را نتیجه می‌دهد. در فعالیت بالا، $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A)$، بنابراین، پیشامدهای A و B مستقل‌اند. مستقل بودن این دو پیشامد، یعنی رو آمدن سکه و ۶ آمدن تاس، بدون محاسبه احتمال‌ها نیز قابل مشاهده است، ولی مستقل بودن از پیشامدها چندان واضح نیست.

مثال ۱) در پرتاب دو تاس، فرض کنید A پیشامد مشاهدهٔ عدد ۳ در تاس اوّل و B پیشامد مجموع ۷ در برآمدهای دو تاس باشد، مستقل بودن A و B را بررسی می‌کنیم.

برآمد هر تاس ۶ حالت دارد. بنابراین، فضای نمونه‌ای این آزمایش $n(S)=۶\times۶=۳۶$ عضو دارد. اکنون پیشامدهای A، B و $A\cap B$ و احتمال های آنها را به دست می‌آوریم.



$$A=\{(۳,۱),(۳,۲),(۳,۳),(۳,۴),(۳,۵),(۳,۶)\}$$
$$\Rightarrow \mathrm{P}(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶},$$
$$B=\{(۱,۶),(۲,۵),(۳,۴),(۴,۳),(۵,۲),(۶,۱)\}$$
$$\Rightarrow \mathrm{P}(B)=\frac{n(B)}{n(S)}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱}{۶},$$
$$A\cap B=\{(۳,۴)\}\Rightarrow \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{n(A\cap B)}{n(S)}=\frac{۱}{۳۶}$$

پس $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$، بنابراین پیشامدهای A و B مستقل از یکدیگرند.

مستقل بودن بسیاری از پیشامدها نیاز به بررسی ندارد؛ به عنوان مثال، قبولی در یک درس برای دو نفر، یا جنسیت فرزندان یک خانواده مستقل از یکدیگرند. از استقلال این پیشامدها می‌توانیم در حلّ مسائل استفاده کنیم.

مثال ۲) احتمال قبولی زهرا در درس فیزیک، ۹۰ درصد و احتمال قبولی ریحانه در این درس، ۷۰ درصد است. احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در این درس قبول شود، را به دست می‌آوریم.

اگر $\mathrm{P}(A)$ احتمال قبولی زهرا و $\mathrm{P}(B)$ احتمال قبولی ریحانه در این درس باشد، احتمال قبولی حداقل یکی از آنها، همان $\mathrm{P}(A\cup B)$ است و می‌دانیم که:

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A\cap B)$$

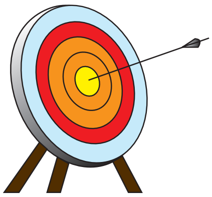
با توجه به مستقل بودن A و B، $\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$ ، پس

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)-\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$$
$$=۰/۹+۰/۷-۰/۶۳=۰/۹۷$$

کار در کلاس

۱ سکهٔ سالمی را سه بار پرتاب می‌کنیم. اگر A پیشامد مشاهده رو در پرتاب دوم و B پیشامد مشاهدهٔ فقط دو رو به طور متوالی باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

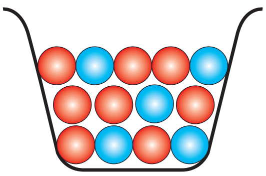
۲ در پرتاب دو تاس، A را پیشامد عدد ۳ در تاس اوّل و B را مشاهده مجموع ۱۰ در برآمدهای دو تاس در نظر بگیرید. آیا A و B مستقل‌اند؟



۳ در یک مسابقهٔ تیراندازی، احتمال اینکه محمد به هدف بزند، $\frac{۵}{۷}$ و این احتمال برای مرتضی، $\frac{۷}{۱۰}$ است. اگر آنها به تناوب به هدف تیراندازی کنند، احتمال اینکه هر دو به هدف بزنند، چقدر است؟

انتخاب‌های با جای‌گذاری و بدون جای‌گذاری

مثال ۳) از جعبه‌ای که شامل ۵ مهرهٔ آبی و ۸ مهرهٔ قرمز است، دو مهره به صورت پی‌درپی و بدون جای‌گذاری، بیرون می‌آوریم. اگر A پیشامد آبی بودن مهرهٔ اوّل و B پیشامد قرمز بودن دومین مهره باشد،



الف) احتمال اینکه هر دو پیشامد رخ دهند، چقدر است؟

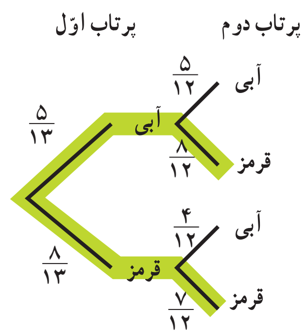
ب) پیشامدهای A و B مستقل‌اند یا وابسته؟

حل) با توجه به رابطهٔ $\mathrm{P}(B|A)=\dfrac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$ در احتمال شرطی داریم:

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۸}{۱۲}=\frac{۱۰}{۳۹}$$

برای بررسی وابستگی یا استقلال این پیشامدها، $\mathrm{P}(B)$ و $\mathrm{P}(B|A)$ را محاسبه و با یکدیگر مقایسه می‌کنیم. برای محاسبهٔ $\mathrm{P}(B)$ از قانون احتمال کلی استفاده کرده و نمودار درختی انتخاب مهره‌ها و تعیین حالت مطلوب را نیز محاسبه کرده‌ایم.

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}\ (\text{مهرهٔ دوم قرمز})$$
$$=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)+\mathrm{P}(A')\mathrm{P}(B|A')$$
$$=\frac{۵}{۱۳}\times\frac{۸}{۱۲}+\frac{۸}{۱۳}\times\frac{۷}{۱۲}$$
$$=\frac{۸}{۱۳}$$



از سوی دیگر $\mathrm{P}(B|A)=\frac{۸}{۱۲}$ ، پس $\mathrm{P}(B|A)\neq\mathrm{P}(B)$ ، بنابراین A و B وابسته‌اند.

کار در کلاس

در مثال صفحهٔ قبل، اگر مهرهٔ دوم را پس از جای‌گذاری مهرهٔ اوّل در جعبه بیرون آوریم. با محاسبهٔ $P(B)$ و $P(B|A)$، مستقل بودن A و B را نتیجه بگیرید.

مستقل بودن پیشامدهای A و B در کار در کلاس بالا قابل حدس زدن است؛ زیرا با جای‌گذاری مهرهٔ اوّل انتخاب شده در جعبه، شرایط برای انتخاب مهرهٔ دوم، دقیقاً همانند انتخاب مهرهٔ اوّل است و در حقیقت آزمایش اوّل تکرار می‌شود. در حالت کلی، انتخاب‌هایی که با جای‌گذاری انجام می‌شوند، مستقل‌اند.

مفهوم استقلال برای بیش از دو پیشامد نیز تعریف می‌شود.

سه پیشامد A، B و C را مستقل می‌گوییم، هرگاه چهار تساوی زیر برقرار باشند.

$$P(A\cap B)=P(A)P(B)$$
$$P(A\cap C)=P(A)P(C)$$
$$P(B\cap C)=P(B)P(C)$$
$$P(A\cap B\cap C)=P(A)P(B)P(C)$$

در حالت کلی، n پیشامد A_1، A_2، ...، A_n را مستقل می‌گوییم، هرگاه احتمال اشتراک هر تعداد از این پیشامدها با حاصل‌ضرب احتمال آنها برابر باشد.

مثال ۴) خانواده‌ای ۴ فرزند دارد.

الف) احتمال اینکه ۴ فرزند این خانواده دختر باشد، چقدر است؟

ب) احتمال اینکه فقط فرزند اوّل و آخر این خانواده دختر باشند، چقدر است؟

پ) احتمال اینکه دو فرزند این خانواده دختر باشند، چقدر است؟

حل الف) فرض کنید A پیشامد این باشد که هر ۴ فرزند خانواده دختر باشند، با توجه به مستقل بودن جنسیت فرزندان، داریم :

$P(A)=P$ (دختر، دختر، دختر، دختر)

$=P$(دختر) $\times P$(دختر) $\times P$(دختر) $\times P$(دختر)

$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}$

$=\frac{۱}{۱۶}$

حل ب) مشابه بالا، اگر B پیشامد دختر بودن فقط فرزند اوّل و آخر این خانواده باشد، سپس :

$P(B)=P$ (دختر، پسر، پسر، دختر)

$=P$(دختر) $\times P$(پسر) $\times P$(پسر) $\times P$(دختر)

$=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}$

$=\frac{۱}{۱۶}$

اکنون فرض کنید C پیشامد وجود دو دختر در این خانواده باشد، یکی از حالت‌ها به صورت زیر است :

فرزند اوّل	فرزند دوم	فرزند سوم	فرزند چهارم
دختر	پسر	دختر	پسر

و احتمال پیشامد بالا عبارت است از :

$$P(\text{دختر، پسر، دختر، پسر}) = P(\text{دختر}) \times P(\text{پسر}) \times P(\text{دختر}) \times P(\text{پسر}) = \frac{۱}{۱۶}$$

قرار گرفتن دو دختر در این خانواده، به $۶ = \binom{۴}{۲}$ حالت میسّر است و احتمال هر کدام از این حالت‌ها، همان $\frac{۱}{۱۶}$ است،

بنابراین : $P(C) = ۶ \times \frac{۱}{۱۶} = \frac{۳}{۸}$

مثال ۵) ۸۰ درصد افراد شهری با سوادند. ۵ نفر از این شهر انتخاب می‌شوند. احتمال اینکه هر ۵ نفر بی‌سواد باشند را به دست می‌آوریم. احتمال اینکه اوّلین نفر بی‌سواد باشد، ۲۰ درصد یا ۰/۲ است. با توجه به اینکه جای‌گذاری انجام نشده است، بی‌سواد بودن فرد دوم مستقل از بی‌سوادی فرد اوّل نیست، ولی چون انتخاب از یک جامعه پر جمعیت انجام می‌شود، می‌توان فرض کرد که بی‌سواد بودن افراد انتخاب شده، مستقل از یکدیگر است و احتمال بی‌سواد بودن هر کدام از آنها ۰/۲ است. پس :

$$P(\text{هر پنج نفر بی‌سواد}) = P(\text{نفر اوّل بی‌سواد}) \times P(\text{نفر دوم بی‌سواد}) \times P(\text{نفر سوم بی‌سواد}) \times P(\text{نفر چهارم بی‌سواد}) \times P(\text{نفر پنجم بی‌سواد})$$
$$= (۰/۲)^۵$$
$$= ۰/۰۰۰۳۲$$

تمرین

۱ اگر A و B دو پیشامد ناتهی و ناسازگار از فضای نمونه‌ای S باشند، آیا A و B می‌توانند مستقل باشند؟ برای پاسخ خود دلیل ارائه کنید.

۲ اگر A و B دو پیشامد مستقل و $E \subseteq A$ و $F \subseteq B$ دو زیر مجموعه ناتهی باشند، آیا E و F نیز همیشه مستقل‌اند؟ چرا؟

۳ اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند، نشان دهید که پیشامدهای زیر نیز مستقل‌اند.

الف) A' و B

ب) A' و B'

۴ در پرتاب دو تاس به طور پی‌درپی، اگر A پیشامد متوالی بودن اعداد ظاهر شده و B پیشامد ظاهر شدن عدد ۳ در تاس اوّل باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

۵ از مجموعهٔ $\{۱، ۲، ۳، \ldots، ۱۰\}$ یک عضو انتخاب می‌کنیم. فرض کنید A پیشامد یک عدد زوج و B پیشامد وقوع عددی بخش‌پذیر بر ۳ باشد، مستقل بودن A و B را بررسی کنید.

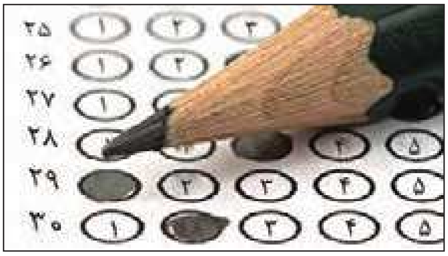
۶ احتمال موفقیت عمل پیوند کلیه روی یک بیمار ۰/۶ و روی بیمار دیگر ۰/۸ است. اگر این عمل روی این دو نفر انجام شود، مطلوب است احتمال اینکه :

الف) روی هر دو بیمار موفقیت‌آمیز باشد.

ب) روی هیچ‌کدام موفقیت‌آمیز نباشد.

پ) فقط روی بیمار دوم موفقیت‌آمیز باشد.

۷ یک سکه و دو تاس به‌طور همزمان پرتاب می‌شوند. احتمال اینکه سکه، رو و هردو تاس عدد ۶ را نشان دهند، چقدر است؟

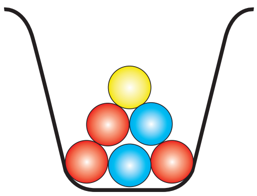


۸ در یک امتحان پنج گزینه‌ای، ۱۰ سؤال مطرح شده است. اگر یک دانش‌آموز به تمام سؤالات به طور تصادفی پاسخ دهد، احتمال آن را به‌دست آورید که :

الف) به تمام سؤال‌ها پاسخ صحیح داده باشد.

ب) تنها به پنج سؤال اوّل پاسخ صحیح داده باشد.

پ) به نیمی از سؤال‌ها پاسخ صحیح داده باشد.



۹ در یک جعبه که شامل ۳ مهرهٔ قرمز، ۲ مهرهٔ آبی و ۱ مهرهٔ زرد است، دو مهره به تصادف و با جای‌گذاری بیرون می‌آوریم. مطلوب است احتمال آنکه :

الف) هر دو مهره قرمز باشند.

ب) حداقل یک مهره آبی باشد.

پ) هر دو مهره همرنگ باشند.

۱۰ جعبه‌ای شامل ۱۲ لامپ است که سه تای آنها معیوب است. اگر به تصادف و بدون جای‌گذاری ۳ لامپ از جعبه بیرون آوریم، احتمال آن را به دست آورید که :

الف) هر سه لامپ معیوب باشند.

ب) حداقل یک لامپ معیوب باشد.

۱۱ احتمال موفقیت یک داروی ساخته شده، ۰/۹ است. اگر ۱۰ نفر را انتخاب کنیم، احتمال اینکه داروی ساخته شده، روی همهٔ افراد جواب منفی داشته باشد، چقدر است؟

۱۲ اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند به‌طوری که $P(A\cap B)=$ ۰/۱ و $P(A\cap B')=$ ۰/۴، حاصل $P(A\cup B')$ را به‌دست آورید.

پل زمان خان، شهرستان سامان، استان چهارمحال و بختیاری

آمار هنر پرورش و پردازش داده است. نمایش داده‌ها می‌تواند شبیه یک کوه و یا شبیه شاخه‌های درختان باشد. می‌توان برای ساختن یک پل از معیارهای گرایش به مرکز و یا معیارهای پراکندگی استفاده نمود.

۳ آمار توصیفی

۱ توصیف و نمایش داده‌ها

۲ معیارهای گرایش به مرکز

۳ معیارهای پراکندگی

درس ۱ توصیف و نمایش داده‌ها

بعد از گردآوری داده‌ها، به تنظیم، رده‌بندی و خلاصه کردن آنها می‌پردازیم. به این منظور می‌توان از روش‌های زیر استفاده نمود:

الف) تنظیم وطبقه‌بندی داده‌ها در یک جدول به نام جدول فراوانی

ب) رسم کردن نمودارهای مختلف براساس مقادیر جدول فراوانی

فعالیت

یک راننده تاکسی در یک روز، اسکناس‌های زیر را از مسافران دریافت می‌کند. او تصمیم دارد این اسکناس‌ها را در کیف خود دسته‌بندی کند. برای انجام این دسته‌بندی، می‌خواهد مراحل زیر را انجام دهد. شما به او کمک کنید تا این کار را انجام دهد.

۱ ابتدا به هرنوع اسکناس عدد ۱ تا ۴ را بدهید و در ستون شماره وارد کنید.

۲ سپس به شمارش اسکناس‌ها بپردازید و تعداد تکرار هر اسکناس را در ستون سوم وارد کنید.

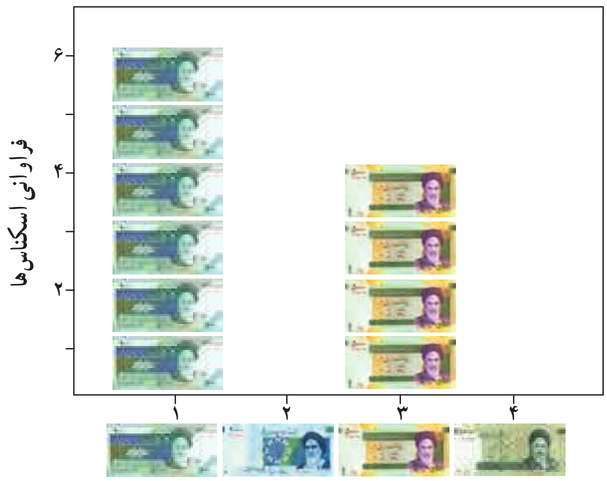
۳ در ادامه تعداد هر اسکناس را بر تعداد کل اسکناس‌ها تقسیم کنید و آن را در ستون چهارم قرار دهید.

۴ با توجه به اعداد موجود در جدول زیر، چند درصد اسکناس‌ها ۱۰ هزار تومانی، چند درصد ۱۰۰۰ تومانی و چند درصد ۵ هزار تومانی است؟

انواع اسکناس‌ها	شماره	فراوانی یا تعداد تکرار هر اسکناس	$\frac{\text{فراوانی یا تعداد تکرار هر اسکناس}}{\text{تعداد کل اسکناس‌ها}}$
	۱	۶	$\frac{۶}{۲۰}$
	۲		۰/۱۵
	۳	۴	
	۴		۰/۳۵
تعداد کل اسکناس‌ها		۲۰	

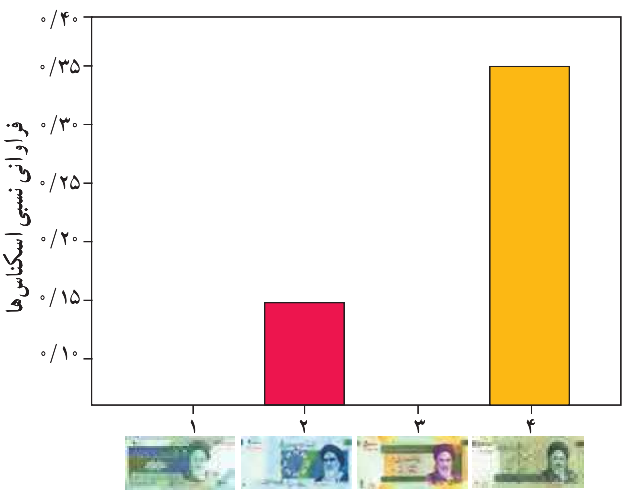
حال می‌خواهیم جدول بالا را به صورت سه نمودار الف، ب و پ نشان دهیم.

۱ در نمودار الف، ابتدا دو محور مختصات رسم می‌کنیم که محور عمودی نشان‌دهندهٔ تعداد تکرار اسکناس‌ها، یا فراوانی اسکناس‌ها و محور افقی نشان‌دهندهٔ نوع اسکناس‌ها باشد. مطابق شکل، شما هم اسکناس‌های ۲ هزار تومانی را به صورت $\boxed{۲}$ و اسکناس‌های ۱۰ هزار تومانی را به صورت $\boxed{۱۰}$ در نمودار قرارداده و آن را کامل کنید.



نمودار الف

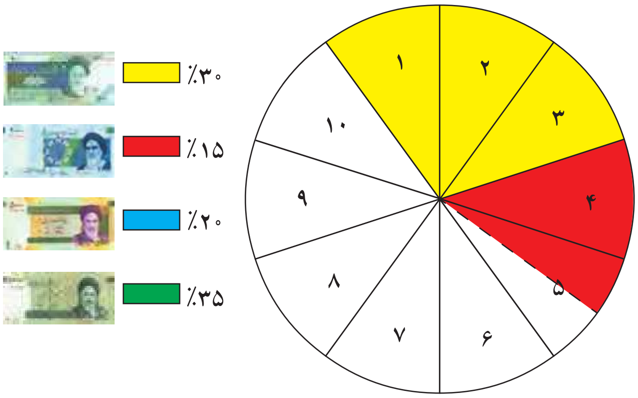
۲ در نمودار ب، نیز دو محور مختصات رسم می‌کنیم که محور عمودی نشان دهندهٔ نسبت تکرار هر اسکناس به تعداد کلّ اسکناس‌ها یا فراوانی نسبی اسکناس‌ها و محورافقی نشان دهندهٔ نوع اسکناس‌ها است. با رسم مستطیل‌هایی برای فراوانی نسبی اسکناس‌های ۱۰۰۰ و ۵ هزار تومانی نمودار شکل ب را کامل کنید.



نمودار ب

۳ اگر راننده تاکسی بخواهد وضعیت تعداد اسکناس‌های خود را در یک هفته پیش‌بینی کند، کدام نمودار الف یا ب می‌تواند به او کمک کند؟

۴ برای رسم نمودار دایره‌ای ابتدا دایره را به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم که هر قسمت نشان دهندهٔ ۱۰ درصد کلّ دایره است. سپس با استفاده از عدد مربوط به نسبت تکرار هر اسکناس به تعداد کل اسکناس‌ها یا فراوانی نسبی مربوط به اسکناس هزار تومانی، سه قسمت دایره رنگ زرد شده است که معادل ۳۰ درصد کل دایره است و به طور مشابه برای اسکناس ۲ هزار تومانی، یک و نیم قسمت دایره رنگ قرمز شده است که معادل ۱۵ درصد کلّ دایره است. برای اسکناس‌های ۵۰۰۰ و ۱۰۰۰۰ تومانی دایره را رنگ آبی و سبز کنید.



نمودار پ

داده‌ها : واقعیت‌هایی دربارهٔ یک شیء یا فردند که در محاسبه، برنامه‌ریزی و پیش‌بینی به کار می‌روند.

متغیر : هر ویژگی از اشیا یا اشخاص، که در اعضای جامعه یکسان نیست و معمولاً از یک عضو به عضو دیگر تغییر می‌کند را **متغیر** می‌گویند و عددی که به آن ویژگی یک عضو نسبت داده می‌شود را **مقدار متغیر**، یا **مشاهده** می‌گویند.

فراوانی یک داده : تعداد دفعاتی که هر داده مشاهده می‌شود را **فراوانی** آن داده می‌گویند.

فراوانی نسبی یک داده : با تقسیم فراوانی هر داده به تعداد کلّ داده‌ها، **فراوانی نسبی** آن داده به‌دست می‌آید.

اگر فراوانی نسبی داده‌ها در ۱۰۰ ضرب شود، آن‌گاه درصد داده‌ها به‌دست می‌آید.

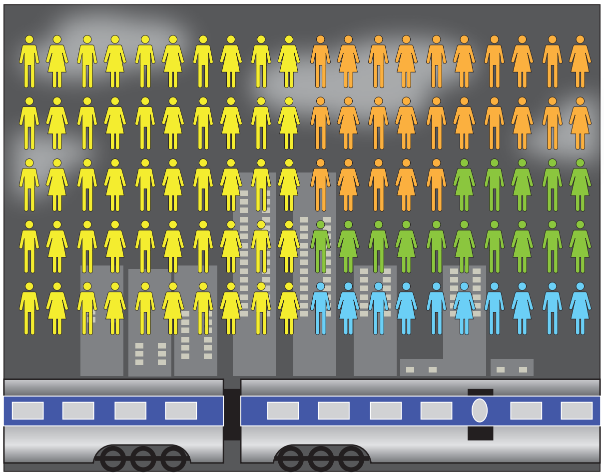
کار در کلاس

در مورد اینکه مسافران یک قطار در طول سفر چگونه از وقت خود استفاده می‌کنند، تحقیقی صورت گرفته است و نتایج زیر به دست آمده است.

در شکل ت، تعداد مسافران یک قطار به عنوان متغیر گسسته را ملاحظه می‌کنید.

- افرادی که با رنگ زرد مشخص شده‌اند، مسافرانی‌اند که در قطار استراحت می‌کنند.
- افرادی که با رنگ نارنجی مشخص شده‌اند، مسافرانی‌اند که در قطار با تلفن همراه خود بازی می‌کنند.
- افرادی که با رنگ سبز مشخص شده‌اند، مسافرانی‌اند که در قطار مطالعه می‌کنند.

■ افرادی که با رنگ آبی مشخص شده‌اند، مسافرانی‌اند که در قطار غذا می‌خورند.



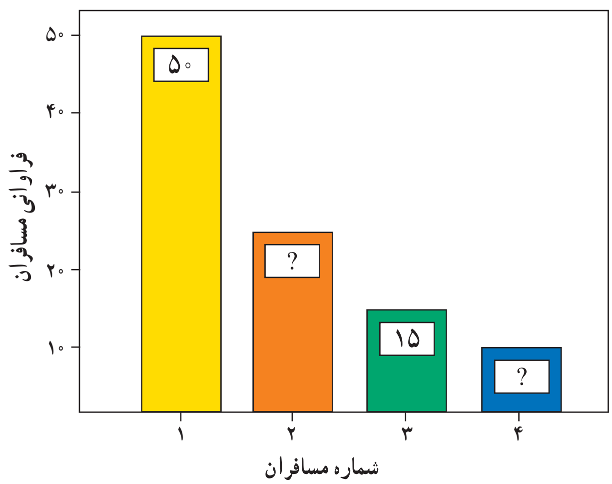
شکل ت

جدول فراوانی مربوط به فراوانی تعداد مسافران را کامل کنید.

مسافران قطار	شماره مسافران	فراوانی مسافران	فراوانی نسبی مسافران
مسافرانی که استراحت می‌کنند	۱	۵۰	
مسافرانی که با تلفن همراه خود بازی می‌کنند	۲		۰/۲۵
مسافرانی که مطالعه می‌کنند	۳	۱۵	
مسافرانی که غذا می‌خورند	۴		۰/۱۰
تعداد کلّ مسافران		۱۰۰	

همچنین نمودار میله‌ای مربوط به فراوانی تعداد مسافران را کامل کنید.

فراوانی نسبی تعداد مسافران را براساس جدول کامل شده رسم کنید. نمودار دایره‌ای مربوط به فراوانی نسبی تعداد مسافران را رسم کنید.



فعالیت

سال‌هاست با مسئلهٔ آلودگی هوا آشنا هستیم و این مسئله به یکی از دغدغه‌های مهم تبدیل شده است.

شاخص کیفیت هوا[۱] (AQI)، متغیّری پیوسته برای بیان کیفیت روزانه هواست. شاخص کیفیت هوا، برای شش آلایندهٔ اصلی هوا شامل کربن مونواکسید، اوزون، گوگرد دی‌اکسید، نیتروژن دی‌اکسید و میزان ذرات معلّق درهوا سنجیده می‌شود.

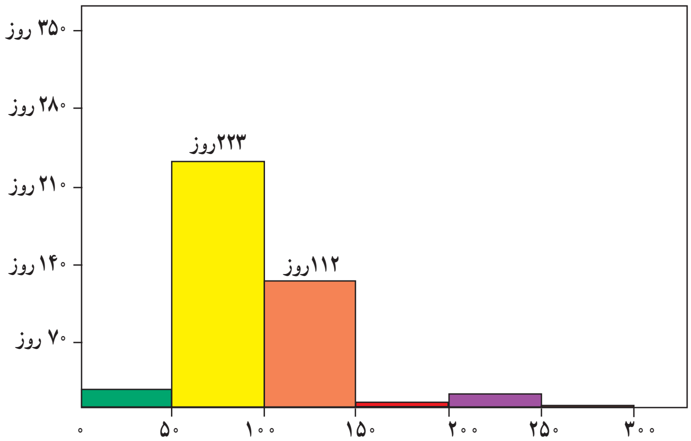
	آلاینده	تأثیر بهداشتی	منبع انتشار
O_3	اوزون	کاهش عملکرد ریه و افزایش علائم تنفسی مانند سرفه، تنگی نفس، تشدید آسم و سایر بیماری‌های ریوی، افزایش استفاده از دارو، مراجعات و پذیرش بیمارستانی، اورژانس و مرگ‌ومیر زودرس	این آلایندهٔ ثانویه در اثر واکنش شیمیایی ترکیبات آلی فرّار و اکسیدهای نیتروژن در حضور نور خورشید تولید می‌شود.
$PM_{2.5}$ PM_{10}	ذرات معلّق	مواجهۀ کوتاه مدت با این آلاینده می‌تواند منجر به تشدید علائم بیماری‌های قلبی ریوی و علائم تنفسی، افزایش نیاز به استفاده از دارو و پذیرش بیمارستانی گردد. مواجهۀ طولانی مدت عامل مرگ‌ومیر زودرس و تشدید بیماری‌های قلبی و ریوی است.	ذرات معلّق در اثر انتشار مستقیم و یا واکنش‌های شیمیایی ایجاد می‌شوند. عمده‌ترین منابع انتشار این آلاینده شامل احتراق سوخت (مانند سوزاندن زغال سنگ، چوب و سوخت دیزل)، فرایندهای صنعتی، کشاورزی و انتشار از جاده، خودروها (اگزوز، لنت، لاستیک و...) می‌باشند.
NO_2	نیتروژن دی‌اکسید	تشدید بیماری‌های ریوی، افزایش مراجعات و پذیرش بیمارستانی، اورژانس و افزایش آسیب‌پذیری و استعداد ابتلا به عفونت‌های ریوی	احتراق سوخت (از وسایل نقلیه، واحدهای تولید برق، صنایع، بویلرها و همچنین سوزاندن چوب)
CO	کربن مونواکسید	کاهش اکسیژن‌رسانی به بافت‌ها و اندام‌های مختلف بدن، تشدید بیماری‌های قلبی و درد قفسه سینه، افزایش مراجعات و پذیرش بیمارستانی	احتراق سوخت (به خصوص در وسایل نقلیه موتوری)
SO_2	گوگرد دی‌اکسید	تشدید آسم و افزایش علائم تنفسی، کمک به شکل‌گیری و تشدید علائم و اثرات بیماری‌های ریوی	احتراق سوخت (به‌ویژه سوخت‌های با گوگرد بالا)، فرایندهای تولید برق و صنایع، منابع طبیعی مانند آتشفشان

۱ـ Air Quality Index

اطلاعات تکمیلی و داده‌های مربوط به شاخص آلودگی هوا در سایت شرکت کنترل کیفیت هوا[1] قابل دسترسی است.
میزان شاخص کیفیت هوا در شهر تهران برای تمام روزهای سال ۱۳۹۳ در جدول زیر گزارش شده است. این جدول را کامل کنید :

وضعیت هوا	شاخص کیفیت هوا	فراوانی	فراوانی نسبی
پاک	$0 \le AQI \le 50$	۱۶	
سالم	$50 < AQI \le 100$	۲۲۳	
ناسالم برای گروه‌های حساس	$100 < AQI \le 150$	۱۱۲	
ناسالم	$150 < AQI \le 200$	۴	
بسیار ناسالم	$200 < AQI \le 250$	۱۰	
خطرناک	$250 < AQI \le 300$	۰	
تعداد کلّ روزهای یک سال		۳۶۵	

نمودار مربوط به فراوانی تعداد روزها براساس وضعیت آلودگی هوا را کامل کنید؟



- نمودار فراوانی نسبی تعداد روزها را براساس وضعیت آلودگی هوا رسم کنید.
- چند درصد از روزهای سال، هوا سالم بوده است؟
- چند درصد از روزهای سال، هوا ناسالم و بسیار ناسالم بوده است؟
- کدام نمودار، در پاسخ دادن به سؤالات، ما را بهتر راهنمایی می‌کند؟

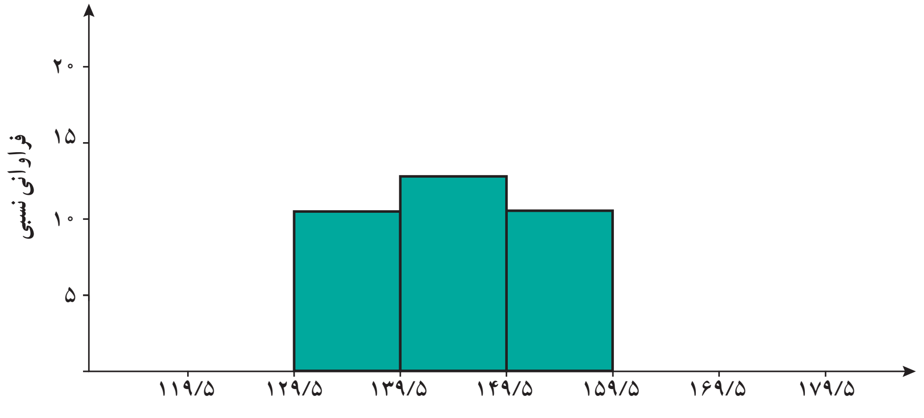
۱ــ http: //air.tehran.ir

کار در کلاس

جدول فراوانی زیر مربوط به قد (H) ۵۰ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم است. جاهای خالی جدول زیر را کامل کنید.

دسته‌ها	قد دانش‌آموزان	فراوانی	فراوانی نسبی	کرانه‌ها
۱۲۰ـ۱۲۹	$۱۲۰ \leq H < ۱۳۰$	۳		[۱۱۹/۵ـ۱۲۹/۵]
۱۳۰ـ۱۳۹	$۱۳۰ \leq H < ۱۴۰$	۱۰		[۱۲۹/۵ـ۱۳۹/۵]
۱۴۰ـ۱۴۹	$۱۴۰ \leq H < ۱۵۰$	۱۳		[۱۳۹/۵ـ۱۴۹/۵]
۱۵۰ـ۱۵۹	$۱۵۰ \leq H < ۱۶۰$	۱۱		[۱۴۹/۵ـ۱۵۹/۵]
۱۶۰ـ۱۶۹	$۱۶۰ \leq H < ۱۷۰$	۱۰		[۱۵۹/۵ـ۱۶۹/۵]
۱۷۰ـ۱۷۹	$۱۷۰ \leq H < ۱۸۰$	۳		[۱۶۹/۵ـ۱۷۹/۵]
	مجموع	۵۰		

بر اساس اعداد جدول، نمودارهای بافت نگاشت[1] مربوط به فراوانی نسبی قد دانش‌آموزان را کامل کنید.



قد چند درصد از دانش‌آموزان بین ۱۶۰ تا ۱۷۰ سانتی‌متر است؟ همچنین قد چند درصد از دانش‌آموزان بین ۱۲۰ تا ۱۴۰ سانتی‌متر است؟

۱ـ Histogram

تمرین

۱ داده‌های زیر، مسافتی را که ۲۰ راننده از مکان‌های مختلف برای رسیدن به مقصد A طی می‌کنند نشان می‌دهد. این داده‌ها، در جدول زیر گردآوری شده است. جدول را کامل کرده و نمودار بافت نگاشت مربوطه را رسم کنید.

دسته‌ها	کیلومترهایی که توسط راننده طی شده است	فراوانی	فراوانی نسبی
۶ـ۱۰	از ۵/۵ کیلومتر تا ۱۰/۵ کیلومتر	۱	
۱۱ـ۱۵	از ۱۰/۵ کیلومتر تا ۱۵/۵ کیلومتر	۲	
۱۶ـ۲۰	از ۱۵/۵ کیلومتر تا ۲۰/۵ کیلومتر	۳	
۲۱ـ۲۵	از ۲۰/۵ کیلومتر تا ۲۵/۵ کیلومتر	۵	
۲۶ـ۳۰	از ۲۵/۵ کیلومتر تا ۳۰/۵ کیلومتر	۴	
۳۱ـ۳۵	از ۳۰/۵کیلومتر تا ۳۵/۵ کیلومتر	۳	
۳۶ـ۴۰	از ۳۵/۵کیلومتر تا ۴۰/۵ کیلومتر	۲	
	مجموع	۲۰	

۲ رنگ چشم ۱۲۸ فرد به شرح زیر است : ۶۴ نفر قهوه‌ای، ۲۳ نفر آبی، ۳۶ نفر سبز و ۵ نفر سایر رنگ‌هاست. چه نمودارهایی می‌توان برای این اعداد رسم کرد. آن نمودار را رسم کنید؟

نمودار میله‌ای ☐ نمودار دایره‌ای ☐ هر دو ☐

۳ جملات زیر را کامل کنید :

الف) برای متغیّرهای پیوسته از نمودار............... استفاده می‌شود.

ب) برای متغیّرهای گسسته از نمودارهای .... و .... استفاده می‌شود.

پ) برای متغیّرهای کیفی از نمودارهای .... و .... استفاده می‌شود.

۴ گروه خونی ۵۰ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم به صورت زیر گردآوری شده‌اند :

الف) جدول فراوانی مربوط به گروه خونی این افراد را رسم کنید. ب) نمودار میله‌ای مربوط به فراوانی و فراوانی نسبی و همچنین نمودار دایره‌ای مربوط به این افراد را رسم کنید؟ پ) چند درصد افراد، دارای گروه خونی O هستند؟

O	O	A	A	O
B	O	B	A	O
AB	B	A	B	AB
O	O	A	A	O
AB	O	A	B	A
O	A	A	O	A
O	A	O	AB	A
O	B	A	A	O
O	O	O	A	O
O	A	O	A	O

۵ اگر فراوانی نسبی مربوط به گروه خونی O، ۰/۴ باشد و مجموع فراوانی‌های همهٔ گروه‌های خونی برابر ۲۰ در نظر گرفته شود. فراوانی گروه خونی O چه عددی است؟

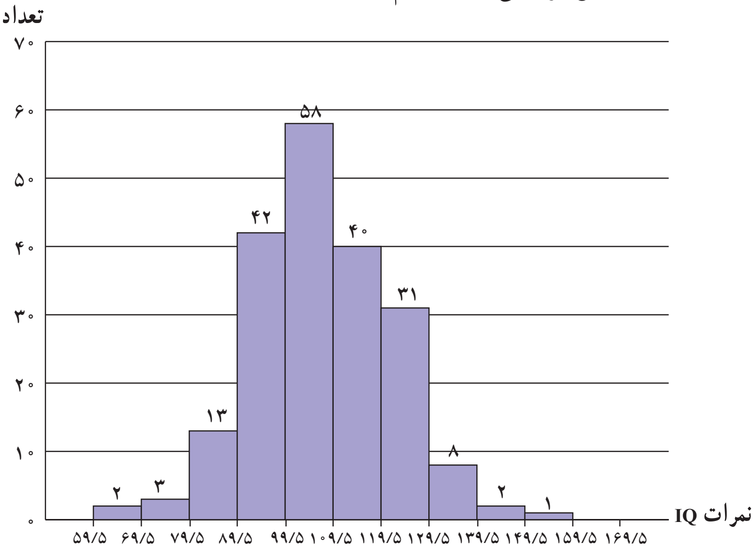
۶ نمودار بافت نگاشت نمرات IQ کودکان یک مهدکودک به صورت زیر رسم شده است. با توجه به این نمودار، به سؤالات زیر پاسخ دهید؟

الف) تعداد کلّ کودکان که نمرهٔ IQ آنها، مورد بررسی قرار گرفته است، چند نفر است؟

ب) نمرهٔ IQ در کدام رده بیشترین و در کدام رده کمترین فراوانی را دارد؟

پ) چند درصد کودکان دارای نمره IQ بین ۱۴۰ تا ۱۶۰ هستند؟

ت) جدول فراوانی آن را رسم کنید؟



۷ جدول فراوانی و نمودارهای مناسب مربوط به تعداد حروف بیت شعر زیر را به‌دست آورید؟

کیست این پنهان مرا در جان و تن   کز زبان من همی گوید سخن[1]

۱ــ این بیت شعر از کتاب گنجینة الاسرار عمان سامانی است.

خواندنی

تاریخچهٔ علم آمار و علم احتمال

علم آمار تاریخچه‌ای بسیار طولانی دارد؛ منشأ ظهور آمار به‌صورت توصیف اطلاعات را می‌توان سرشماری‌هایی که حدود ۴۰۰۰ سال قبل از میلاد مسیح توسط بابلی‌ها و مصری‌ها و بعداً توسط امپراتوری‌های روم و ایران دربارهٔ اطلاعات مربوط به زاد و ولد و دارائی‌های افراد جامعهٔ زیر سلطهٔ خود انجام می‌گرفته، به حساب آورد.

در قرن ۱۴ میلادی برای محاسبه نرخ بیمه، جمع‌آوری اطلاعات دربارهٔ تولد و وفات و حوادث رایج شد.

در اواسط قرن ۱۷ مطالعات آماری به‌صورت توصیفی انجام می‌گرفت. مثلاً **گرونت** با مطالعهٔ تعداد متولدین کشف نمود که تعداد پسرها کمی از تعداد دخترها بیشتر است، اما سال‌های اول زندگی تعداد بیشتری از پسرها فوت می‌کنند.

استفاده از علم احتمال در آمار، در اواخر قرن ۱۷ شروع شد. در این مورد می‌توان به مطالعات **مندل** در مورد قانون وراثت اشاره کرد.

دامنهٔ علم آمار در اوایل قرن ۱۹ شامل جمع‌آوری و تحلیل داده‌ها می‌شد. **لژاندر** در ۱۸۰۵ «روش کمترین مربعات» را برای اولین بار شرح داد.

آمار مدرن در اواخر قرن ۱۹ و اوایل قرن ۲۰ پدید آمده است. **گالتون** و **کارل پیرسون** آمار را وارد چارچوب دقیق ریاضیات کردند و فیشر در ابداع روش‌های مختلف «استنباط آماری» از جمله «آزمون فرض» قدم‌های مهمی برداشت.

علم احتمال عمری کوتاه‌تر از علم آمار دارد :

در اواسط قرن ۱۶ اولین کتاب احتمال توسط **کاردانو** با عنوان «بازی‌های شانس»نوشته شد.

در اواسط قرن ۱۷ **پاسکال** و **فرما** اولین کسانی بودند که مطالعهٔ احتمال را به‌طور علمی شروع نمودند. البته آنها کتابی در این مورد ننوشتند بلکه در مکاتبات خود به آنالیز ترکیبی و مسائل مربوط به علم احتمال پرداختند. **هویگنس** کتابی در مورد احتمال نوشت که از نظر تحلیل علمی در سطح بسیار بالاتری از کتاب **کاردانو** قرار داشت.

یاکوب برنولی و **دموآور** در قرن ۱۸ کار را ادامه دادند. در قرن ۱۸ و ابتدای قرن ۱۹ علم احتمال در دانش‌های طبیعی و صنعت به‌طور جدی کاربرد پیدا کرد. در این دوره نخستین قضیه‌های علم احتمال یعنی قضایای **لاپلاس**، **پواسون**، **لژاندر** و **گاوس** ثابت شد.

در نیمهٔ دوم قرن ۱۹ دانشمندان روسی تأثیر زیادی در پیشرفت علم احتمال داشتند؛ **چبیشف** و شاگردانش، مسئله‌های **لیاپونوف** و **مارکوف**، از مسئله‌های کلی علم احتمال را حل کردند و قضایای **برنولی** و **لاپلاس** را تعمیم دادند.

در آغاز قرن ۲۰ متخصصان کارهای قبلی را منظم نموده و ساختمان اصول موضوعه احتمال را بنا نمودند. در این دوره دانشمندان زیادی روی علم احتمال کار کردند اما درخشان‌ترین نام در این عرصه **کولموگروف** روسی است که اصول موضوع احتمال را در کتابی به نام مبانی علم احتمال در آلمان منتشر کرد.

با توجه به اینکه شکل‌گیری علم احتمال در اروپای قرن شانزدهم برای بررسی بازی‌های شانسی بوده است، بسیاری از مسائل احتمال هنوز هم به زبان بازی و شرط‌بندی بیان می‌شود، در حالی‌که امروزه علم احتمال در بسیاری از مسائل مهندسی، پزشکی، اقتصادی، سیاسی، علوم انسانی و ... مورد استفاده قرار می‌گیرد.

درس ۲ معیارهای گرایش به مرکز

الف) میانگین

فعالیت

معلمی از دانش‌آموزان خواست تا براساس اطلاعات زیر، معدل (میانگین) تعدادی از دروس حسین را که دانش‌آموز پایه یازدهم رشته علوم تجربی است، محاسبه کنند :

عنوان درس	تعداد واحد	نمره
فیزیک (۲)	۴	۱۸
شیمی (۲)	۳	۱۷
آزمایشگاه علوم تجربی (۲)	۱	۱۹
زمین‌شناسی	۲	۱۸

دو دانش‌آموز به دو روش مختلف این کار را انجام دادند :

رضا :

$$۱۸ = \frac{۱۸+۱۷+۱۹+۱۸}{۴} = \text{معدل (میانگین) نمرات حسین}$$

قاسم :

$$\text{معدل (میانگین) نمرات حسین} = \frac{۴\times۱۸+۳\times۱۷+۱\times۱۹+۲\times۱۸}{۴+۳+۱+۲} = \frac{۷۲+۵۱+۱۹+۳۶}{۱۰} = ۱۷/۸$$

به نظر شما کدام‌یک از این دو روش درست است؟ چرا؟

....

رضا از قاسم پرسید : چرا برای محاسبه معدل، نمره هر درسی را در تعداد واحد آن ضرب کردی؟
قاسم : چون که این درس‌ها تأثیر یکسانی بر معدل ندارند و هر درسی براساس تعداد واحد آن در معدل تأثیر می‌گذارد.
به‌عنوان مثال تأثیر درس فیزیک (۲) نسبت به درس آزمایشگاه علوم تجربی (۲)، ۴ به ۱ است یا درس شیمی، تأثیرش در معدل، ۳ برابر تأثیر درس آزمایشگاه است.

مجموع داده‌ها : اگر n دادهٔ x_1، x_2، … و x_n، داشته باشیم، مجموع آن داده‌ها را با نماد سیگما (Σ) نمایش می‌دهیم و داریم :

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$$

و عبارت $\sum_{i=1}^{n} x_i$ ، سیگمای i از ۱ تا n، x_i می‌خوانیم.

میانگین یا متوسط داده‌ها : میانگین یا متوسط n دادهٔ x_1، x_2، … و x_n را با نماد $\overline{x}$ نشان می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

میانگین موزون داده‌ها : اگر n دادهٔ x_1، x_2، … و x_n، داشته باشیم به طوری که هر یک از این داده‌ها به ترتیب دارای فراوانی f_1، f_2، … و f_n باشند، میانگین موزون داده‌ها را با نماد $\overline{x}_f$ نشان می‌دهیم و آن را به صورت زیر تعریف می‌کنیم :

$$\overline{x}_w = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_i x_i}{\sum_{i=1}^{n} f_i} = \frac{f_1 x_1 + f_2 x_2 + \cdots + f_n x_n}{f_1 + f_2 + \cdots + f_n}$$

کار در کلاس

دانش‌آموزی در کنکور سراسری شرکت می‌کند و نتیجهٔ کارنامهٔ آزمون آن به شرح زیر است :

مواد امتحانی	ریاضیات	فیزیک	شیمی	زبان انگلیسی	ادبیات و زبان فارسی	دین و زندگی
نمره بر حسب درصد	۷۱	۶۵	۸۰	۵۲	۹۵	۱۰۰
ضریب درس	۴	۳	۱	۱	۴	۳

الف) میانگین نمره‌های مواد امتحانی این دانش‌آموز بدون احتساب ضرایب مواد امتحانی چه عددی است؟

ب) میانگین نمره‌های مواد امتحانی این دانش‌آموز با احتساب ضرایب مواد امتحانی را کامل کنید.

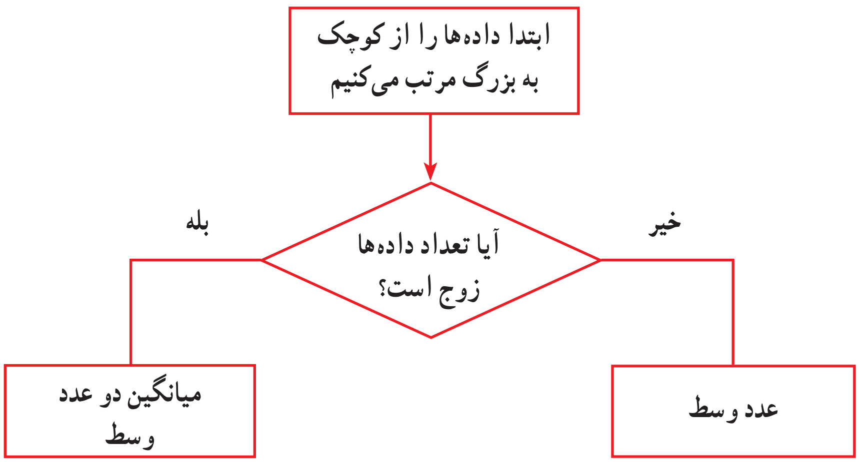
$$\overline{x}_w=\frac{\sum_{i=۱}^{۶} f_i x_i}{\sum_{i=۱}^{۶} f_i}=\frac{۴\times ۷۱+\cdots\cdots+\cdots\cdots+\cdots\cdots+\cdots\cdots+۳\times ۱۰}{۴+\cdots\cdots+\cdots\cdots+\cdots\cdots+\cdots\cdots+۳}$$

پ) کدام نوع میانگین، مناسب است؟

ب) میانه

میانه، چارک اوّل و چارک سوم : عدد وسط مجموعه‌ای از داده‌ها را که از کوچک به بزرگ مرتب شده باشند میانه داده‌ها می‌گوییم و آن را با $Q_۲$ نشان می‌دهیم. میانهٔ یک دومِ اوّل داده‌های مرتب شده را چارک اوّل می‌گوییم و آن را با $Q_۱$ نشان می‌دهیم. همچنین میانهٔ یک دومِ آخرِ داده‌های مرتب شده را چارک سوم گوییم و آن را با $Q_۳$ نشان می‌دهیم.

نحوهٔ به دست آوردن میانه داده‌ها



کار در کلاس

در یک شعبهٔ بانک تراکنش‌های مالی بسیاری در یک روز انجام می‌گردد. یک تراکنش مالی ممکن است انتقال مبلغی از حساب پس‌انداز یک مشتری به حساب جاری مشتری دیگری در یک بانک باشد. این تراکنش را می‌توان به دو عملیات تقسیم کرد : بدهکار کردن حساب پس‌انداز یک مشتری به اندازهٔ مبلغ مورد نظر و طلبکار کردن حساب جاری مشتری دیگر به‌اندازهٔ همان مبلغ است.

الف) فرض کنید تراکنش‌های مالی در بازهٔ زمانی ۸ تا ۹ صبح یک شعبهٔ بانک (به میلیون تومان) به شرح زیر گردآوری شود.

۱۰	۸/۷	۱۰	۱۲	۲۵

■ میانه، چارک اوّل و سوم مربوط به تراکنش‌های مالی بر اساس داده‌های جمع‌آوری شده را مشخص کنید.

ب) حال فرض کنید تراکنش‌های مالی دیگری در بازهٔ زمانی ۹ تا ۱۰ صبح در همان شعبه بانک (به میلیون تومان) به شرح زیر گردآوری شود.

۷۰	۳۰	۸۱/۷	۲۰	۳۲	۳۴

■ در این حالت نیز میانه، چارک اوّل و سوم مربوط به تراکنش‌های مالی بر اساس داده‌های جمع‌آوری شده را مشخص کنید.

پ) نما (مد)

نما (مد) : داده‌ای که بیشترین فراوانی را داشته باشد، نما یا مد داده‌ها نام دارد. اگر در داده‌هایی، همهٔ داده‌ها یک فراوانی داشته باشند، آن‌گاه این داده‌ها مد ندارند. اگر در داده‌هایی، دو داده بیشترین فراوانی را داشته باشند، آن‌گاه این داده‌ها دو مد دارند.

کار در کلاس

در یک مسابقهٔ پرتاب دارت، سه نفر شرکت کرده‌اند. بر اساس ۱۰ پرتابی که آنها انجام داده‌اند، امتیازهای زیر به دست آمده است:

■ مد نفر اوّل چه عددی است؟

■ مد نفر دوم چه عددی است؟

■ مد نفر سوم چه عددی است؟

نفر اوّل	۱۰	۹	۱۰	۷	۵	۹	۱۰	۹	۸	۸
نفر دوم	۱۰	۹	۸	۶	۱	۲	۳	۵	۴	۷
نفر سوم	۹	۹	۹	۷	۱۰	۱۰	۹	۵	۴	۷

تمرین

۱ تعداد حمله‌های یک تیم فوتبال در شش مسابقه گذشته به صورت ۴۳، ۴۲، ۴۵، ۴۴، ۴۵، ۴۸ است.
میانگین تعداد حملات این تیم در شش بازی گذشته را به دست آورید؟

۲ بالاترین دما در هریک از روزهای هفته گذشته اندازه‌گیری شده و نتایج زیر به دست آمده است. معدل یا میانگین دما در هفتهٔ گذشته چه عددی است؟

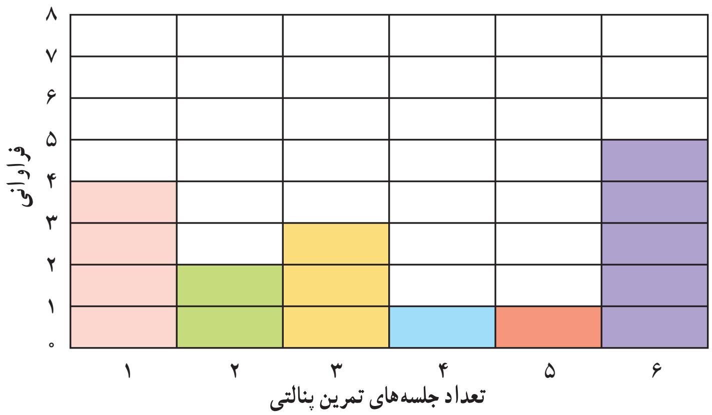
۲۹، ۳۱، ۲۸، ۳۲، ۲۹، ۲۷، ۵۵

۳ میانه و مد هر یک از داده‌های زیر را به دست آورید؟

الف) ۹، ۹، ۹، ۹، ۸ ب) ۳۰۰، ۲۴، ۴۰، ۵۰، ۶۰ پ) ۱۰، ۳، ۸، ۱۵

ت) ۴، ۶، ۹، ۱۲، ۵ ث) ۲۳، ۱۲، ۱۲، ۲۳ ج) ۷، ۱۳، ۴، ۷

۴ نمودار زیر، نمودار میله‌ای مربوط به تعداد ضربات پنالتی گل شده یک بازیکن در شش جلسهٔ تمرین پنالتی است. با توجه به نمودار، میانگین، میانه و مد تعداد ضربات گل شده را به دست آورید؟



۵ در جدول زیر، نمرات درس ریاضی ۱۰ دانش‌آموز گردآوری شده و میانگین نمرات داده شده است. علامت‌های سؤال چه اعدادی‌اند؟

نمرات درس ریاضی	۲۰	۱۶	۱۷	۱۹	۱۷/۵
	۱۸	؟	۱۸	۱۵	۱۶
میانگین نمرات = ۱۵/۶۵					
مد نمرات = ؟					

۶ داده‌های زیر مدت زمان مطالعهٔ یک دانش‌آموز را در روزهای هفته نشان می‌دهد.

روزهای هفته	شنبه	یکشنبه	دوشنبه	سه شنبه	چهارشنبه	پنج شنبه	جمعه
مدت زمان مطالعه (ساعت)	۲	۱/۵	۲/۵	۱/۵	۲	۳	۳

این دانش‌آموز به طور میانگین چند ساعت در روز، در هفتهٔ گذشته مطالعه کرده است؟

۷ یک شرکت بیمه برای تعیین حقّ بیمه شخص ثالث در سال آینده، نمونه‌ای از خسارت‌های پرداخت شده امسال را جمع‌آوری نموده است. میانگین خسارت‌های پرداخت شده برابر ۸۵ میلیون ریال به دست آمده است در صورتی که میانه و مد

آن برای این خسارت‌های پرداخت شده برابر ۴۲/۲ میلیون ریال و عدد ۹۰ میلیون ریال می‌باشد. به نظر شما مدیر شرکت، کدام معیار گرایش به مرکز را به منظور تعیین حقّ بیمه در سال آینده در نظر بگیرد تا اینکه این شرکت ضرر نکند؟

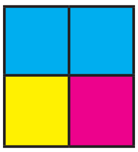
۸ دانش‌آموزی در کنکور سراسری شرکت می‌کند و نتیجهٔ کارنامه آزمون آن به شرح زیر است :

مواد امتحانی	ریاضیات	فیزیک	شیمی	زبان انگلیسی	ادبیات و زبان فارسی	دین و زندگی
درصد	۵۳	؟	۶۷	۳۴	۸۰	۶۷
ضریب درس	۴	۳	۱	۱	۴	۳

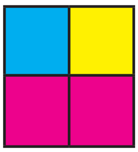
اگر معدل موزون درصد این دانش‌آموز ۷۳ باشد، درس فیزیک را چند درصد زده است؟

۹ میانگین ۵ دادهٔ آماری ۱۷ است، اگر دو عدد ۱۷ و ۱۱ را به داده‌های قبلی اضافه کنیم، میانگین جدید چه عددی خواهد شد؟

۱۰ دو دانش‌آموز، جدول‌های چهارخانه‌ای را به صورت روبه‌رو رنگ‌آمیزی کرده‌اند، بر اساس جدول مربوط به طول موج طیف رنگ‌ها، جدول عددی این دو شکل به صورت روبه‌رو نشان داده شده است :



$$\begin{pmatrix} ۴۷۰ & ۴۷۰ \\ ۵۸۰ & ۶۹۰ \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} ۴۷۰ & ۵۸۰ \\ ۶۹۰ & ۶۹۰ \end{pmatrix}$$

حال جدول عددی مربوط به این دو شکل را ابتدا با هم جمع و سپس هریک از اعضای جدول عددی را به عدد ۲ تقسیم می‌کنیم. جدول عددی حاصل را به دست آورده و شکل مورد نظر را با توجه به جدول طول موج طیف رنگ‌ها، به دست آورید. آیا این شکل میانگین دو شکل بالا است؟

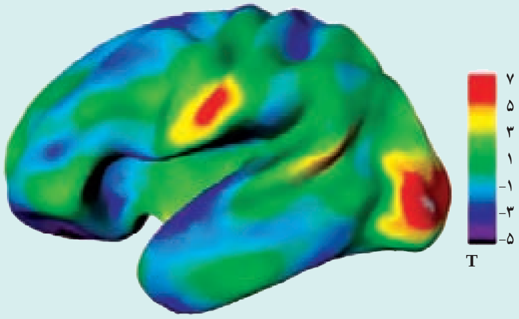
برای پاسخ به این سؤال، کاربرد علم آمار در علوم شناختی و مغز را مطالعه کنید. عدد مربوط به طول موج طیف رنگ‌ها در جدول موجود در حاشیه نشان داده شده است.

رنگ‌ها	طول موج طیف رنگ‌ها (برحسب نانومتر)
	۴۵۰ تا ۴۹۵
	۴۹۵ تا ۵۷۰
	۵۷۰ تا ۵۹۰
	۵۹۰ تا ۶۲۰
	۶۲۰ تا ۷۵۰

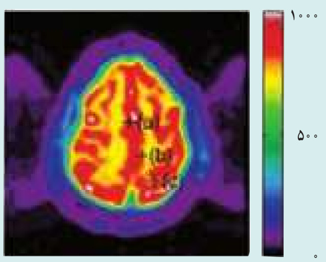
کاربرد علم آمار در علوم شناختی و مغز

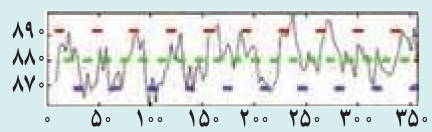
تفسیر تصاویر مغزی

در شکل زیر با میانگین تصویر مغزی ۱۰ فرد آشنا می‌شویم.



این تصویر از شکل زیر، برشی از یک تصویر مغزی است. رنگ قرمز نشان دهندهٔ ناحیه‌ای است که درآن فشار خون بالایی وجود دارد. این ناحیه که مشکوک به وجود تومور است با استفاده از علم آمار شناسایی و محلّ تومور حدس زده می‌شود. به عنوان مثال، نقطهٔ a به عنوان نقطه‌ای شناخته می‌شود که با احتمال بالایی محلّ قرارگرفتن تومور است، ولی نقاط b و c به‌رغم داشتن فشار خون بالا، محل تومور نیستند.





درس ۳ معیارهای پراکندگی

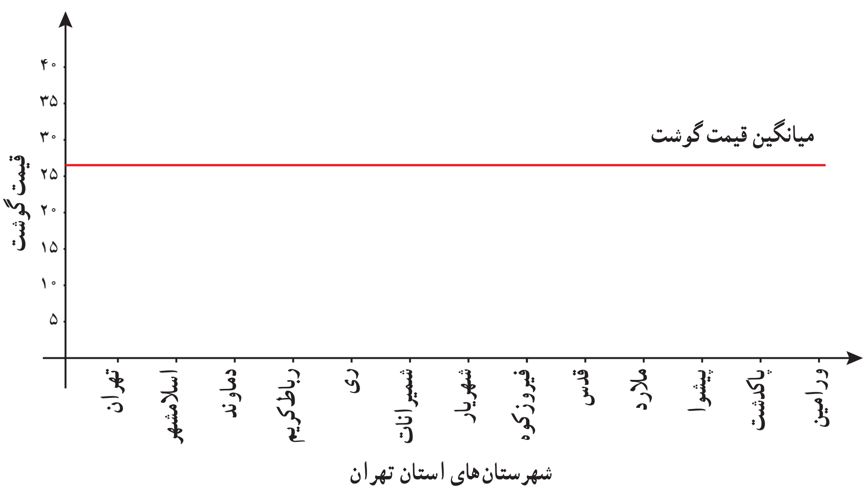
۱ـ انحراف معیار و واریانس داده‌ها

فعالیت

شهرستان‌های استان تهران	قیمت گوشت قرمز (هزارتومان)
تهران	۴۲
اسلام شهر	۲۰
دماوند	۲۵
رباط کریم	۲۶
ری	۲۷
شمیرانات	۴۰
شهریار	۲۰
فیروزکوه	۱۶
قدس	۲۰
ملارد	۲۱
پیشوا	۲۲
پاکدشت	۲۳
ورامین	۲۶

در اقتصاد هر کشوری شاخصی تحت عنوان نرخ تورّم، نقش بسیار مهمی را ایفا می‌کند. یکی از اقلام مصرفی مورد نیاز در محاسبهٔ نرخ تورّم در یک کشور، قیمت گوشت قرمز است. در جدول روبه‌رو قیمت گوشت قرمز در سال ۱۳۹۵ در شهرستان‌های استان تهران گردآوری شده است.

- میانگین قیمت گوشت قرمز در شهرستان‌های استان تهران را به دست آوردید؟
- درنمودار زیر، میانگین قیمت گوشت قرمز در شهرستان‌های استان تهران نشان داده شده است. قیمت گوشت قرمز در هریک از شهرستان‌های استان تهران را با کشیدن نقطه روی نمودار مشخص کنید.



۱ چند نقطهٔ بالای خط قرمز، چند نقطه پایین خط قرمز و چند نقطه روی خط قرمز قرار دارند؟

۲ منظور از پراکندگی قیمت گوشت قرمز یعنی اینکه قیمت گوشت قرمز در هریک از شهرستان‌های استان تهران چقدر از میانگین قیمت دورتر است. هر چقدر نقاط یا همان قیمت گوشت قرمز در هریک از شهرستان‌های استان تهران حول خطّ قرمز یا همان میانگین قیمت گوشت قرمز نزدیک‌تر باشند، نشان‌دهندهٔ چیست؟ هرچقدر دورتر باشند چطور؟

۳ معیاری را برای اندازه‌گیری پراکندگی قیمت گوشت قرمز یا همان نقاط حول خط قرمز می‌توانید معرفی کنید؟

دیدیم پراکندگی قیمت گوشت قرمز یعنی اینکه قیمت گوشت قرمز در هریک از شهرستان‌های استان تهران چقدر از میانگین قیمت دورتر است. برای معرفی معیار مناسب یک راه حل ابتدایی این است که میانگین را از تک‌تک داده‌ها کم کنیم. هر یک از این تفاضل‌ها را انحراف از میانگین می‌نامیم. مجموع انحراف از میانگین‌ها برابر با صفر خواهد شد و این به دلیل آن است که برخی از داده‌ها از میانگین بزرگ‌تر و برخی دیگر کوچک‌ترند در نتیجه مقادیر مثبت و منفی حاصل می‌شوند که مجموع آنها همدیگر را خنثی می‌کنند. برای رفع این مشکل، قدر مطلق انحراف از میانگین داده‌ها در نظر گرفته می‌شود. میانگین این مقادیر می‌تواند معیاری برای سنجش پراکندگی داده‌ها باشد، اما کار کردن با قدر مطلق کار آسانی نیست. از این رو، توان دوم انحراف از میانگین داده‌ها در نظر گرفته می‌شود.

در آمار، یک معیار سنجش برای میزان پراکندگی داده‌ها حول میانگینشان، **انحراف معیار** است.

انحراف معیار به صورت زیر محاسبه می‌شود:

انحراف معیار داده‌ها : اگر n داده از جامعه به صورت x_1، x_2، ... و x_n داشته باشیم، انحراف آنها را با نماد σ نشان می‌دهیم، که به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\sigma=\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n}}=\sqrt{\frac{(x_1-\bar{x})^2+(x_2-\bar{x})^2+\cdots+(x_n-\bar{x})^2}{n}}$$

که در آن $x_i-\bar{x}$، را انحراف داده iام از میانگین داده‌ها می‌گویند.

واریانس داده‌ها : توان دوم انحراف معیار داده‌ها را واریانس داده‌ها گویند و آن را با نماد σ^2 نشان می‌دهیم.

اگر انحراف معیار مجموعه داده‌ها عدد کوچکی باشد، بدین معناست که پراکندگی داده‌ها حول میانگینشان کم و درنتیجه داده‌ها به هم نزدیک‌تر است و اگر انحراف معیار مجموعه داده‌ها عددی بزرگ باشد، بدین معناست که پراکندگی داده‌ها حول میانگینشان زیاد و درنتیجه داده‌ها از هم دورتر است.

کار در کلاس

انحراف معیار و واریانس مربوط به داده‌های قیمت گوشت قرمز در شهرستان‌های تهران را می‌توانید با تکمیل جدول روبه‌رو محاسبه کنید.

قیمت گوشت قرمز	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^۲$
۴۲		
۲۰		
۲۵		
۲۶		
۲۷		
۴۰		
۲۰		
۱۶		
۲۰		
۲۱		
۲۲		
۲۳		
۲۶		
	σ	
	$\sigma^۲$	

خواندنی

نرخ تورّم

در علوم اقتصادی با استفاده از علم آمار، شاخصی تحت عنوان نرخ تورّم بیان می‌شود. نرخ تورّم، درصد تغییر سطح قیمت مجموعه کالاهای مصرفی مانند خوراک و پوشاک و کالاهای خدماتی مانند مسکن، آب و برق خانوارها در طول زمان را اندازه می‌گیرد.

فرض کنید متوسط قیمت مجموعه کالاهای مصرفی یک خانوار در سال a، $P_۱$ و متوسط قیمت همان مجموعه کالای مصرفی در سال $a-۱$، $P_۰$ باشد، در این صورت نرخ تورّم در طی سال a به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\text{نرخ تورّم} = \frac{P_۱-P_۰}{P_۰}\times ۱۰۰\%$$

به عنوان مثال، اگر متوسط قیمت گوشت قرمز به عنوان کالای مصرفی در سال $a-۱$ و a به ترتیب، ۲۸ و ۳۲ هزار تومان برای هرکیلو باشد، در این صورت نرخ تورّم برای قیمت گوشت قرمز در سال a برابر:

$$\text{نرخ تورّم} = \frac{(۳۲-۲۸)}{۲۸}\times ۱۰۰ = ۱۴\%$$

یعنی متوسط قیمت گوشت قرمز در سال a ، ۱۴ درصد نسبت به سال گذشته افزایش یافته است.

لازم به ذکر است هر چقدر نرخ تورّم افزایش یابد، قدرت خرید مردم کاهش پیدا می‌کند. همچنین مرکز آمار ایران برای محاسبهٔ نرخ تورّم در یک سال، متوسط قیمت ۱۰۰ قلم کالای گروه خوراکی‌ها و آشامیدنی‌ها و ۲۵۹ قلم کالای خدماتی برای سال جاری و سال قبل آن در نظر گرفته و این نرخ را محاسبه می‌کند.

۲ــ ضریب تغییرات داده‌ها

فعالیت

یکی از شاخص‌های کیفیت در لاستیک‌های تولید شده اتومبیل توسط یک کارخانه، طول عمر آن لاستیک‌هاست. هرچقدر متوسط طول عمر لاستیک‌های تولیدی بیشتر و انحراف معیار طول عمر لاستیک‌ها کمتر باشد، به این معناست که لاستیک‌ها کیفیت بالایی از نظر طول عمر دارند.

حال با توجه به مطالب گفته شده، به بررسی کیفیت لاستیک‌های تولیدی از نظر طول عمر دو کارخانهٔ (الف) و (ب) می‌پردازیم. براساس داده‌های به دست آمده میانگین طول عمر لاستیک‌ها در دو کارخانه و انحراف معیار آنها به شرح جدول روبه‌رو است :

کارخانه	میانگین	انحراف معیار
کارخانهٔ الف	۵۴۰۰۰ کیلومتر	۵۰ کیلومتر
کارخانهٔ ب	۶۵۰۰۰ کیلومتر	۱۰۰ کیلومتر

- شما ترجیح می‌دهید از کدام کارخانه لاستیک بخرید؟
- آیا می‌توان براساس میانگین و انحراف معیار و نمونه‌های در نظر گرفته شده قضاوت کرد؟

برای پاسخ به سؤالات فوق نیاز به معرفی معیار جدیدی برای سنجش پراکندگی داده وجود دارد. این معیار را **ضریب تغییرات داده‌ها** می‌نامند.

ضریب تغییرات داده‌ها : معیاری است که از تقسیم انحراف معیار داده‌ها (σ) به میانگین داده‌ها $(\bar{x})$ به دست می‌آید و آن را با نماد CV نشان می‌دهند.

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

هر قدر ضریب تغییرات کمتر باشد، میزان پراکندگی داده‌ها کمتر خواهد شد که این موضوع برای ما مطلوب است.

کار در کلاس

الف) با کامل کردن جدول زیر، ضریب تغییرات مربوط به طول عمر دو کارخانه را محاسبه کنید.

کارخانه	میانگین	انحراف معیار	ضریب تغییرات
کارخانهٔ الف	۵۴۰۰۰ کیلومتر	۵۰ کیلومتر	
کارخانهٔ ب	۶۵۰۰۰ کیلومتر	۱۰۰ کیلومتر	

محصولات کدام کارخانه را انتخاب می‌کنید؟

ب) حال با تغییر واحد اندازه‌گیری در جدول قبلی میانگین و انحراف معیارطول عمر لاستیک‌ها در دو کارخانهٔ (الف) و (ب) به صورت زیر گزارش داده شده است.

کارخانه	میانگین	انحراف معیار	ضریب تغییرات
کارخانهٔ الف	۵۴۰۰۰۰۰۰ متر	۵۰۰۰۰ متر	
کارخانهٔ ب	۶۵۰۰۰ کیلومتر	۱۰۰۰۰ کیلومتر	

همان‌طور که ملاحظه می‌کنید میانگین و انحراف معیار لاستیک‌ها برای کارخانهٔ (الف) برحسب واحد اندازه‌گیری متر و برای کارخانهٔ (ب) برحسب کیلومتر است. در این حالت نیز ضریب تغییرات را در جدول زیر محاسبه کنید. آیا ضریب تغییرات به واحد اندازه‌گیری وابسته است؟

نمودار جعبه‌ای

در ابتدای این درس با معیارهای پراکندگی آشنا شدیم، حال می‌خواهیم با استفاده از نمودارهای آماری، معیارهای پراکندگی داده‌ها را به صورت تصویری نشان دهیم.

فعالیت

میزان بارش برف سالانه در دو پیست اسکی «الف» و «ب» برای هفت سال اندازه‌گیری و نتایج، در جدول زیر گردآوری شده است :

سال	۱۳۹۴	۱۳۹۳	۱۳۹۲	۱۳۹۱	۱۳۹۰	۱۳۸۹	۱۳۸۸
میزان بارش برف در پیست اسکی الف	۸۲۵	۷۲۸	۴۷۲	۷۸۷	۳۳۵	۱۹۰	۵۵۱
میزان بارش برف در پیست اسکی ب	۵۶۶	۵۸۱	۹۳	۱۰۱۶	۵۲۵	۰	۲۷۱

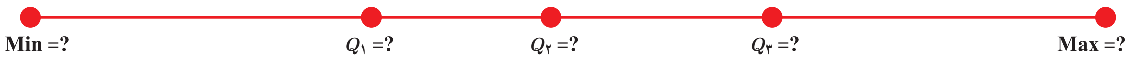
عدد ۰ در جدول به این معناست که میزان بارش کمتر از ۱ سانتی‌متر است.

برای رسم نمودار آماری، مراحل زیر را انجام دهید.

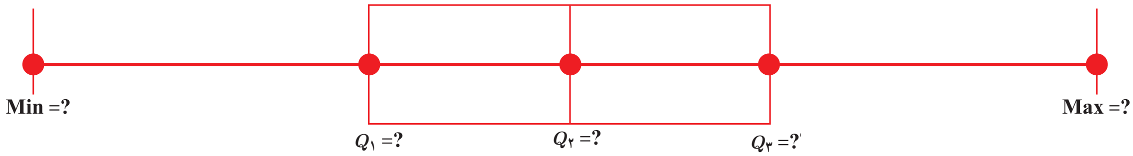
الف) جدول زیر را کامل کنید.

سال	بیشترین مقدار میزان بارش برف Max	چارک سوم میزان بارش برف Q_3	میانه میزان بارش برف Q_2	چارک اول میزان بارش برف Q_1	کمترین مقدار میزان بارش برف Min
پیست اسکی الف					

ب) حال مقادیر جدول را روی یک محور نمایش می دهیم.



پ) برای مشخص کردن حدود دامنهٔ میان چارکی (IQR) یک جعبه به عرض دلخواه رسم می کنیم، سپس با استفاده از یک خط، میانه را در جعبه مشخص می کنیم و در انتها، از دو طرف جعبه به کمترین و بیشترین مقدار داده‌ها دو خط رسم می کنیم.



به این نمودار، نمودار جعبه‌ای می گوییم. در این نمودار چارک اوّل، میانه، چارک سوم، بیشترین و کمترین مقدار داده‌ها به‌طور هم‌زمان نشان داده می‌شود.

کار در کلاس

- نمودار جعبه‌ای مربوط به پیست «ب» را رسم کنید. و سپس با نمودار جعبه‌ای پیست «الف» مقایسه کنید.
- اگر داده دورافتاده‌ای در داده‌ها باشد، نمودار جعبه‌ای چه تغییری می کند؟

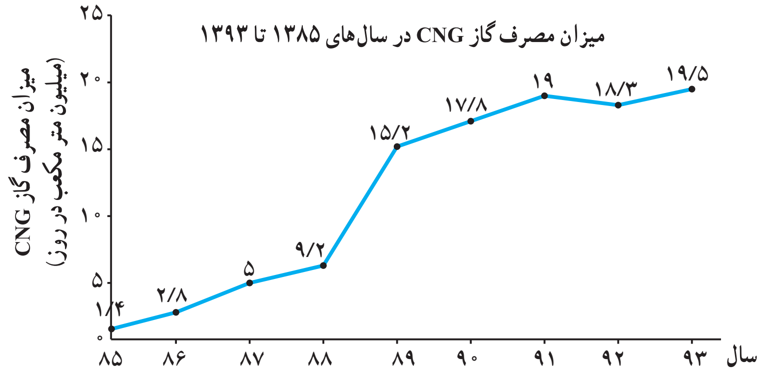
تمرین

۱ فرض کنید سنّ افرادی که در یک روز سوار اتوبوس شده‌اند، به صورت زیر است :

۶۱، ۵۰، ۶۴، ۲۳، ۴۵، ۱۷، ۷۴، ۵۳، ۲۶، ۵۹، ۳۲

انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات سنّ افراد را به دست آورید.

۲ نمودار زیر میزان مصرف گاز CNG را از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۳ نشان می‌دهد. با توجه به این نمودار انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات میزان مصرف گاز CNG از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۳ را به دست آورید.



۳ انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات را برای هریک از اعداد جدول زیر به دست آورید.

اعداد	انحراف معیار	واریانس	ضریب تغییرات
۷، ۴، ۱۰، ۱۶، ۸، ۱۲، ۱۰۰			
۱۰/۱۱، ۱۱/۳۶، ۱۰/۱۱، ۹/۶۲، ۹/۷۶، ۹/۴۲، ۹/۸۸			
۲۰۰۰، ۲۵۰۰، ۳۰۰۰، ۲			

۴ اعداد دلخواه را در جدول زیر بنویسید و انحراف معیار، واریانس و ضریب تغییرات را برای هریک از اعداد به دست آورید.

اعداد	انحراف معیار	واریانس	ضریب تغییرات

۵ اگر ضریب تغییرات ۱۰ داده ۲ باشد و میانگین آن ۴، واریانس داده‌ها را به دست آورید.

۶ اگر n داده را c برابر کنیم ضریب تغییرات داده‌ها چند برابر می‌شود؟

۷ فرض کنید ۲۲ بوته گل قرمز را انتخاب و تعداد گل‌های هر بوته را شمرده‌ایم و نتایج زیر به دست آمده است :

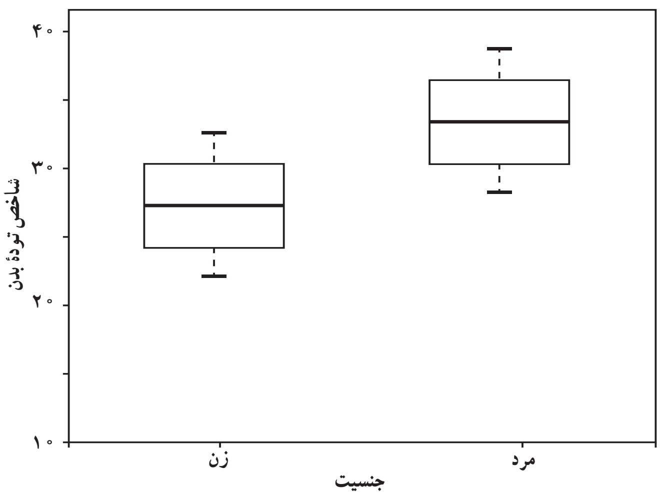
۲، ۱، ۵، ۵، ۲،۲، ۲، ۲، ۳، ۱، ۱، ۱، ۲، ۴، ۷، ۱، ۴، ۶، ۸، ۳، ۴، ۷

نمودار جعبه‌ای را برای این داده‌ها رسم کنید.

۸ نمودار جعبه‌ای مربوط به شاخص تودهٔ بدن (BMI) به تفکیک جنسیت رسم شده است. این نمودار را تفسیر کنید و به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) میانهٔ شاخص توده بدن در خانم‌ها بیشتر است یا آقایان؟

ب) میزان پراکندگی شاخص توده بدن در خانم‌ها بیشتر است یا آقایان؟



۹ داده‌های زیر مربوط به نرخ بیکاری یک کشور در ده سال گذشته است :

سال	اوّل	دوم	سوم	چهارم	پنجم	ششم	هفتم	هشتم	نهم	دهم
نرخ بیکاری	۱۱/۵	۱۱/۳	۱۰/۵	۱۰/۴	۱۱/۹	۱۳/۵	۱۲/۳	۱۲/۲	۱۰/۴	۳۰/۱

نمودار جعبه‌ای این داده‌ها را رسم کنید.

خواندنی

نرخ بیکاری

امروزه بیکاری یکی از موضوعات مهم در جوامع بشری است که دولتمردان و سیاست‌گذاران تمامی کشورهای جهان به دنبال راهکارهایی برای از بین بردن این مسئله در کشورشان و فراهم کردن زمینه‌ای برای به‌کارگیری استعدادهای مردم کشورشان هستند. در علوم اقتصادی با استفاده از علم آمار، شاخصی تحت عنوان نرخ بیکاری بیان می‌شود. نرخ بیکاری، به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$\text{نرخ بیکاری} = \frac{\text{جمعیت بیکار}}{\text{کل جمعیت فعال}}$$

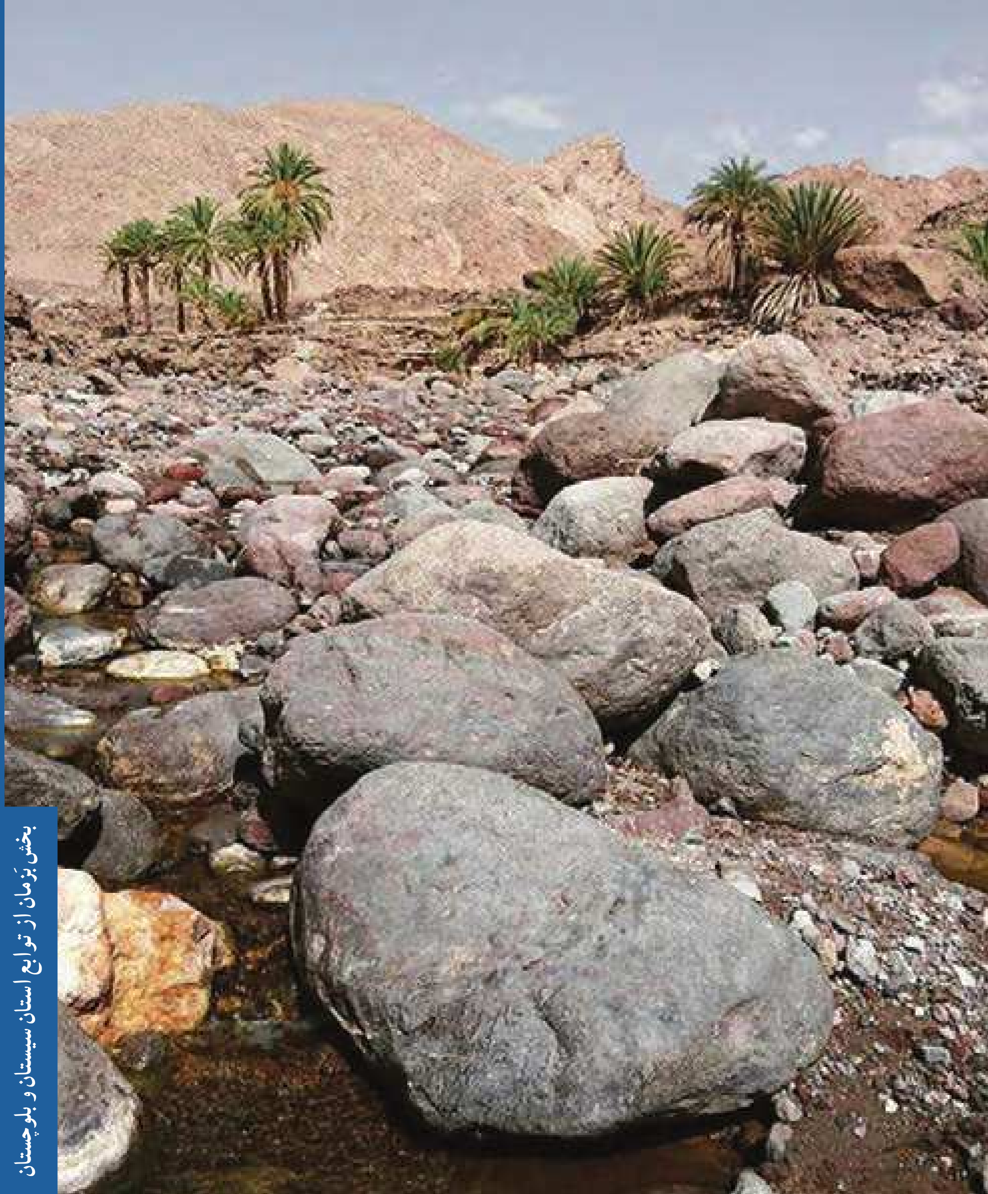
جمعیت بیکار به افراد ۱۰ ساله و یا بالاتر از ۱۰ ساله‌ای گفته می‌شود که سه شرط زیر را توأماً داشته باشند :

- در هفتهٔ مشخص حتی یک ساعت هم کار نکرده باشد.
- آمادگی برای انجام کار داشته باشد.
- در هفتهٔ مشخص و سه هفتهٔ قبل از آن جویای کار باشد. (اقدامات مشخصی را به منظور جست‌وجوی اشتغال، مزدبگیری و یا خوداشتغالی به عمل آورده باشد.)

جمعیت شاغل : به افراد ۱۰ ساله، یا بالاتر از ۱۰ ساله‌ای که در طول هفتهٔ مشخص (بازهٔ زمانی ۷ روزه‌ای که وضع فعالیت افراد در این بازهٔ زمانی مدّنظر باشد) حداقل یک ساعت کار کرده باشد شاغل گویند.

جمعیت فعال : به مجموع جمعیت بیکار و شاغل گفته می‌شود.

ماسوله ـ استان گیلان



بخش بُرمان از توابع استان سیستان و بلوچستان

اوج علم آمار استفاده از علم احتمال برای ابداع آمار استنباطی بوده است. آمار استنباطی استخراج نتایجی براساس بخش کوچکی از داده‌ها در یک مسئله است که می‌توان آن را به همه داده‌های آن مسئله تعمیم داد. با وجود آنکه پایه‌های احتمال بر نظریه‌های ریاضی استوار شده است، ولی آمار را نمی‌توان به عنوان شاخه‌ای از ریاضی در نظر گرفت.

۴ آمار استنباطی

درس ۱ گردآوری داده‌ها

فعالیت

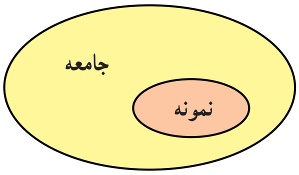
می‌خواهیم برخی از ویژگی‌های مگس‌های سفید مزاحم در شهر تهران را بررسی کنیم. آیا برای انجام این کار می‌توانیم ویژگی‌های همهٔ مگس‌های سفید را اندازه‌گیری کنیم؟ آیا همهٔ آنها در دسترس‌اند؟ آیا زمان و هزینه لازم برای این کار در اختیار داریم؟

واحد آماری[1] به هر یک از افراد یا اشیا می‌گویند که داده‌های مربوط به آنها در یک بررسی آماری گردآوری می‌شود.

مجموعهٔ کلّ واحدهای آماری را **جامعهٔ آماری**[2] می‌نامند.

هر زیر مجموعه از جامعهٔ آماری را که با روش مشخصی انتخاب شده باشد، یک **نمونه** می‌نامند.

نمونه‌گیری[3]، فرایند انتخاب نمونه‌ای از یک جامعه، به منظور تعمیم اطلاعات آن به‌جامعه است.



بیشتر مطالعات آماری بر روی بخشی از جامعه است. رابطهٔ بین جامعه و بخشی از آن‌که نمونه نامیده می‌شود، در شکل نشان داده شده است.

کار در کلاس

در فعالیت قبل هر مگس سفید .... است. همهٔ مگس‌های سفید، که کل واحدهای آماری هستند، .... را تشکیل می‌دهند. اگر سنّ همهٔ مگس‌های سفید را در اختیار داشته باشیم، داده‌های .... را داریم. ۱۰۰ مگس سفید معرف یک .... است.

۱ــ Statistical Unit

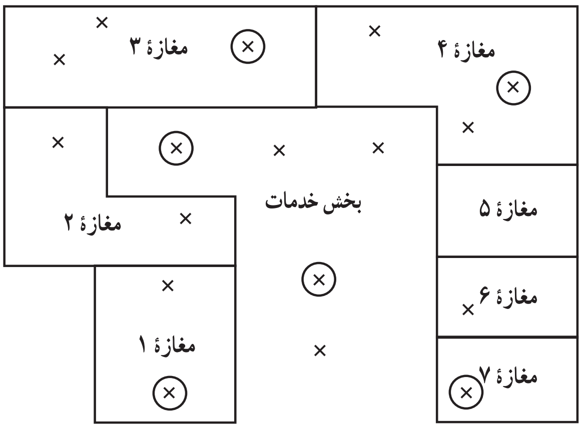
۲ــ Statistical Population

۳ــ Sampling

نمونه‌گیری تصادفی ساده[۱] نوعی روش نمونه‌گیری که در آن همهٔ واحدهای آماری برای انتخاب شدن در نمونه، احتمال یکسان دارند.

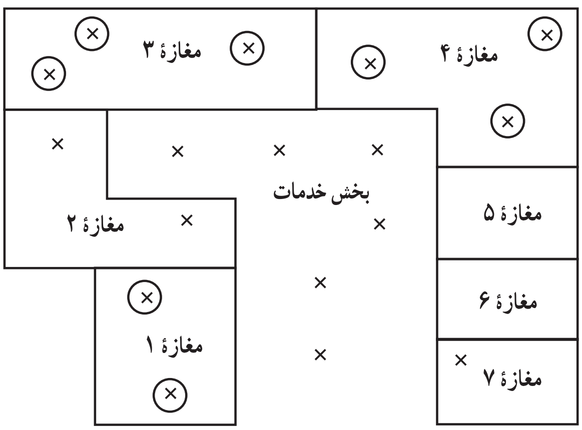
فعالیت

۱ می‌خواهیم متوسط درآمد کارکنان یک مجتمع تجاری را محاسبه کنیم. اگر این مجتمع از ۷ مغازه و یک بخش خدمات تشکیل شده باشد، که روی هم ۱۷ کارکن دارند، چگونه از بین ۱۷ نفر، ۶ نفر را به تصادف انتخاب می‌کنید؟ یک راه ساده برای انجام این کار نوشتن اسامی کارکنان یا شمارهٔ کارمندی آنها روی ۱۷ برگهٔ کوچک و انتخاب تصادفی ۶ تا از آنهاست. آیا این روش نمونه‌گیری، نمونه‌گیری تصادفی ساده است؟ آیا همهٔ واحدهای جامعه احتمال برابری برای انتخاب دارند؟



در شکل روبه‌رو نقشه‌ای از مجتمع تجاری ترسیم شده که کارکنان با × و دور انتخاب‌شدگان یک دایره رسم شده است.

انجام نمونه‌گیری تصادفی ساده در عمل با دشواری‌هایی همراه است. اگر اندازه جامعهٔ بزرگ باشد، یعنی تعداد واحدهای آماری زیاد باشند، دسترسی به فهرستی از اعضای جامعه و دسترسی به اعضای انتخابی، دشوار و ممکن است هزینه‌بر باشد.



۲ هر یک از ۷ مغازه و بخش خدمات را به‌صورت یک گروه فرض می‌کنیم. حال از بین ۸ گروه در نظر گرفته شده، سه تا از آنها را به تصادف انتخاب می‌کنیم و در هر یک سرشماری انجام می‌دهیم. آیا این روش نمونه‌گیری **سریع‌تر** است؟

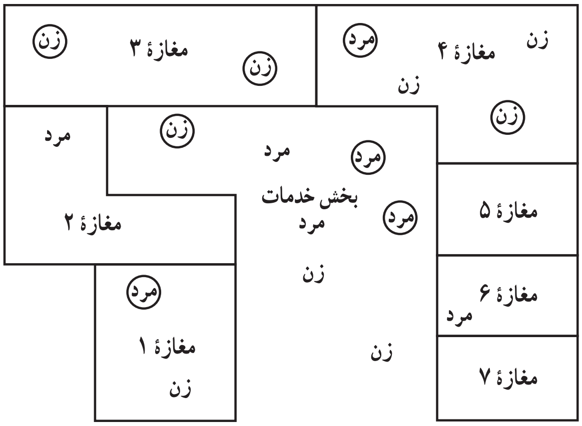
نمونه‌گیری خوشه‌ای[۲] : نمونه‌گیری که در آن، واحدهای نمونه‌گیری اوّلیه در جامعه، گروه‌ها یا خوشه‌ها باشند. سپس همهٔ واحدهای آماری خوشه‌های انتخاب شده را به عنوان نمونه درنظر می‌گیرم.

۱ــ Simple Random Sampling

۲ــ Cluster Sampling

سؤال : می‌خواهیم میانگین نمرات ریاضی دانش آموزان شهر تهران را محاسبه کنیم. اگر فهرست همهٔ دانش‌آموزان را نداشته باشیم، اما فهرست مدارس موجود باشد، نمونه‌گیری خوشه‌ای، راه مناسبی برای گردآوری داده‌هاست. اگر بودجهٔ کافی یا زمان لازم برای نمونه‌گیری تصادفی ساده نداشته باشیم آیا این روش مقرون به صرفه است؟

۳ اگر بخواهیم یک نمونهٔ ۸ تایی شامل دقیقاً ۴ مرد و ۴ زن از مجتمع تجاری بگیریم، چگونه این کار را انجام می‌دهیم؟ زمانی که جامعه به دو یا چند بخش تقسیم می‌شود که عضو مشترکی ندارند، می‌توان از هر بخش جداگانه نمونه‌گیری کرد. این کار با افزایش هزینه یا زمان همراه است، ولی انتظار داریم که ...... را نیز افزایش دهد.



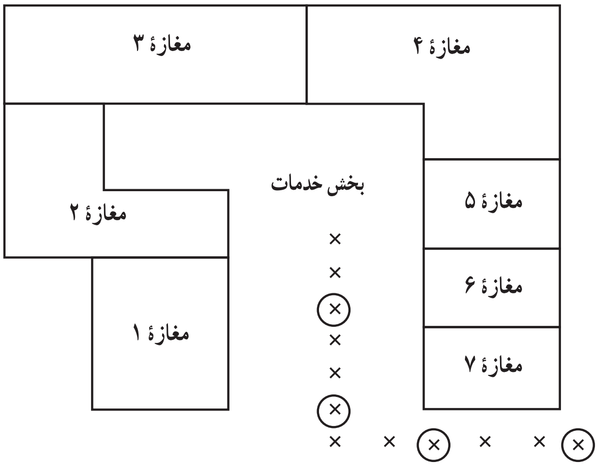
در واقع داده‌ها به دو طبقهٔ مجزّا تقسیم شده‌اند که طبقات از نظر ویژگی مورد بررسی همگن هستند. در صورتی که در نمونه‌گیری خوشه‌ای، درون خوشه‌ها هرچه ویژگی مورد بررسی تفاوت بیشتری داشته باشند بهتر است.

نمونه‌گیری طبقه‌ای[1] : روش نمونه‌گیری که در آن با طبقه‌بندی جامعه به زیرجامعه‌های مجزّا یک نمونهٔ تصادفی ساده از هر طبقه انتخاب می‌شود.

علاقه‌مند به نمونه‌گیری از نمرات درس ریاضی دانش آموزان استان تهران هستیم. اگر فهرست همهٔ دانش آموزان را در اختیار داشته باشیم، می‌توانیم از نمونه‌گیری تصادفی ساده استفاده کنیم؛ ولی این روش نمونه‌گیری هیچ تضمینی ندارد که دانش‌آموزان از تمامی شهرهای استان در نمونه حضور داشته باشند. درصورتی‌که اگر از هر شهر متناسب با تعداد دانش‌آموزان آن شهر نمونه‌گیری تصادفی ساده انجام دهیم، مشکل قبلی رفع می‌شود. به عبارت دیگر از نمونه‌گیری طبقه‌ای استفاده می‌کنیم. حال فرض کنید فقط فهرست مدارس را داشته باشیم. چه روش نمونه‌گیری را پیشنهاد می‌کنید؟ (راهنمایی : شما می‌توانید از دو روش نمونه‌گیری پشت سر هم استفاده کنید.)

۴ فرض کنید در مجتمع، ۱۲ نفر حضور دارند. صبر می‌کنیم که مجتمع تجاری تعطیل شود و هنگام خروج کارکنان می‌خواهیم نمونهٔ ۴ نفری انتخاب کنیم. برای این منظور، همانند شکل صفحهٔ بعد عمل کرده‌ایم. ابتدا از ۳ نفر یکی را به تصادف انتخاب می‌کنیم. در این شکل، نفر اوّل انتخاب شده است. حال با همین رویه برای سه نفر بعد هم، نفر اوّل را انتخاب می‌کنیم و ادامه می‌دهیم. این روش نمونه‌گیری شباهت بیشتری به کدام یک از روش‌های نمونه‌گیری قبلی دارد؟ خوشه‌ای یا طبقه‌ای؟ این کار باعث چه نوع صرفه‌جویی می‌شود؟

۱ـ Stratified Sampling



به نظر شما این نوع نمونه‌گیری در کدام‌یک از مثال‌های زیر امکان دارد :

- گردآوری اطلاعات از مبدأ و مقصد مسافران در خروجی ــ ورودی یک شهر
- کنترل کیفیت یک خط تولید
- انتخاب نمونه از ماهی‌های یک حوضچه
- زمانی که فهرستی از واحدهای جامعه وجود نداشته باشد.
- فهرست واحدهای آماری ترتیب تصادفی داشته باشند.

نمونه‌گیری یا سامانمند[1] **(سیستماتیک)**، نوعی نمونه‌گیری طبقه‌ای است که در آن اندازه طبقات باهم برابر است. فقط از طبقهٔ اوّل، واحد آماری به تصادف انتخاب می‌شود و با همان رویه از طبقات دیگر، این کار انجام می‌گیرد.

آیا اعضای جامعه برای انتخاب شدن در نمونه‌گیری سامانمند شانسی برابر دارند؟ چرا؟

کار در کلاس

جدول زیر را کامل کنید.

روش نمونه‌گیری	مزیت	محدودیت
تصادفی ساده		
خوشه‌ای		
طبقه‌ای		
سامانمند		

فعالیت

از مگس‌های سفید با چه روشی می‌توان نمونه‌گیری کرد؟ فهرستی از آنها نداریم، تعداد آنها را هم نمی‌دانیم. می‌توان چند منطقه از تهران را به تصادف انتخاب کرد و در هر منطقه نمونهٔ در دسترس را انتخاب و بررسی کنیم. آیا این روش نمونه‌گیری به تمامی واحدهای جامعه شانس انتخاب می‌دهد؟

نمونه‌گیری احتمالی : نمونه‌گیری است که همهٔ واحدهای آماری احتمالی معلوم برای انتخاب در نمونه داشته باشد. و از روشی تصادفی برای انتخاب واحدهای نمونه استفاده شود.

۱ــ Systematic

نمونه‌گیری‌های چهار فعالیت قبل، همگی احتمالی‌اند. در کدام‌یک همهٔ واحدهای آماری احتمال برابری برای انتخاب دارند.

کار در کلاس

راه حلی ارائه کنید که نمونه‌گیری‌های غیر احتمالی زیر را احتمالی می‌کند، هرچند که به صورت غیر واقعی باشد.

مثال	نمونه‌گیری غیر احتمالی	نمونه‌گیری احتمالی
نمونه‌گیری از یک قفس بزرگ خرگوش‌های یک آزمایشگاه	بدون برنامه‌ریزی خرگوش‌هایی را برمی‌دارد که دستش به آنها می‌خورد.	
در مطالعاتی که در آنها فرایند سنجش برای شخصی که سنجیده می‌شود ناخوشایند یا دردسرآفرین است.	داوطلبانی که حاضر به پاسخ به سؤالات شما در یک نظرسنجی می‌شوند.	
نمونه‌گیری از زغال‌سنگ‌های یک واگن	نمونه در دسترس انتخاب می‌شود.	

فعالیت

شاید در نگاه اوّل این‌طور به نظر برسد که انجام نمونه‌گیری تصادفی ساده کاری آسان است، در حالی که در دنیای واقعی، گاهی چنین نیست. روش‌های نمونه‌گیری که به ذهن می‌رسند، گاهی مشکلات و ایرادهایی دارند که در نگاه اوّل دیده نمی‌شوند و استفاده از آنها ما را به نتایجی بسیار دور از واقعیت می‌رساند. این موضوع را با چند مثال بهتر متوجه خواهید شد.

فرض کنید آمارگیری می‌خواهد بداند در یک شهر خانواده‌ها چند نفره‌اند. او برای این کار صد نفر را به‌تصادف انتخاب می‌کند و از آنها می‌پرسد : «خانوادهٔ شما چند نفر است؟»

آیا این روش برای نمونه‌گیری درست است؟ جواب منفی است؛ دلیل آن هم این است که واحدهای آماری مورد نظر در این مسئلهٔ خانواده‌ها هستند نه افراد. آیا خانواده‌های مختلف احتمال حضور برابر در این نمونه‌گیری را دارند؟ واضح است که احتمال حضور هر خانواده متناسب با تعداد اعضای آن است و مثلاً احتمال حضور یک خانوادهٔ شش نفره دو برابر احتمال حضور یک خانوادهٔ سه نفره است و این، یعنی شرایط نمونه‌گیری ساده برقرار نیست.

نتیجهٔ چنین ایرادی در نمونه‌گیری این است که هر چه تعداد نمونه‌ها را افزایش دهیم، نتایج به مقداری اشتباه نزدیک‌تر می‌شود. مثلاً فرض کنید آمار واقعی تعداد افراد خانواده‌ها چنین باشد :

تعداد افراد	۱	۲	۳	۴	۵ و بیشتر
درصد	۸/۵	۲۰/۷	۲۸/۵	۲۷/۶	۱۴/۷

در این جامعه تعداد خانواده‌های دو نفره تقریباً $۱/۴ = \frac{.........}{.........}$ برابر تعداد خانواده‌های پنج نفره (و بیشتر) است، ولی با آمارگیری نادرستی که توضیح داده شد به نتیجهٔ دیگری خواهیم رسید؛ احتمال حضور یک خانوادهٔ پنج نفره (و بیشتر) در

نمونه‌ها بیشتر از .... برابر احتمال حضور یک خانوادهٔ دو نفره است و لذا عددی که در روش نادرست آماری به‌دست می‌آید کمتر از $\frac{۱/۴}{۲/۵}=۰/۵۶$ است. نتیجه اینکه هر چند واقعیت این است که نسبت خانواده‌های دو نفره بسیار بیشتر از خانواده‌های ۵ نفره (و بیشتر) است، ولی ما با نمونه‌گیری اشتباه به نتیجه‌ای بسیار متفاوت می‌رسیم.

برای برطرف کردن این مشکل راه‌های مختلفی دارد. مثلاً اینکه فقط از سرپرست خانواده‌ها در مورد تعداد اعضای خانواده‌ها بپرسیم. (جدول صفحهٔ قبل، برگرفته از آمار واقعی کشور در سرشماری[۱] سال ۱۳۹۵ است.)

کار در کلاس

فرض کنید در شهری جمعیت کلاس‌های پایهٔ ششم دبستان به شکل زیر باشد :

تعداد دانش‌آموز	۲۵	۲۶	۲۷	۲۸	۲۹	۳۰	۳۱	۳۲	۳۳	۳۴	۳۵
تعداد کلاس	۷	۹	۱۰	۱۱	۷	۱۱	۸	۸	۷	۵	۴

الف) چه تعداد کلاس پایهٔ ششم در این شهر وجود دارد؟ تعداد دانش‌آموزان پایهٔ ششم چند تاست؟

ب) چه درصدی از کلاس‌های پایهٔ ششم بیشتر از ۳۰ دانش‌آموز دارند؟

پ) اگر به‌تصادف یک دانش‌آموز ششم دبستانی را انتخاب کنیم، احتمال اینکه کلاسی که در آن درس می‌خواند بیشتر از ۳۰ دانش‌آموز داشته باشد، چقدر است؟

ت) فرض کنید فردی برای اینکه بفهمد کلاس‌های ششم دبستان چند نفری‌اند، تعداد زیادی دانش‌آموز ششم دبستانی را به‌تصادف انتخاب کند و از آنها بپرسد «کلاس شما چند نفره است؟» این کار چه ایرادی دارد؟

ث) اگر با روش قبل درصد کلاس‌های با بیش از ۳۰ دانش‌آموز را محاسبه کنیم، نتیجه از جواب واقعی چند درصد فاصله خواهد داشت؟

مثال : فرض کنید می‌خواهیم میزان آلایندگی خودروهای در حال تردّد در شهری را بررسی کنیم. برای این کار چگونه باید نمونه‌گیری کنیم؟

اگر نمونه‌گیری را در تعمیرگاه‌ها انجام دهیم، هرچند هر خودرویی ممکن است گاهی سر از تعمیرگاه درآورد، ولی این نمونه‌گیری، تصادفی ساده نیست؛ زیرا احتمال اینکه یک خودرو در نمونهٔ ما باشد، متناسب با ساعاتی است که در تعمیرگاه بوده است و لذا درصد خودروی‌های آلاینده بسیار بیشتر از واقعیت نشان داده خواهد شد.

اگر نمونه‌گیری را در خیابان انجام دهیم، مشکل آن کمتر است، ولی بازهم نمونه‌گیری ما مشکل دارد؛ زیرا خودروهایی که از آنها بیشتر استفاده می‌شود، احتمال بیشتری دارد که به‌عنوان نمونه انتخاب شوند.

کار در کلاس

فرض کنید بخواهیم میزان مطالعهٔ غیردرسی دانش‌آموزان یک مدرسه را بررسی کنیم. برای این کار این سؤال را طراحی کرده‌ایم و می‌خواهیم از یک نمونهٔ ۳۰ تایی آن را بپرسیم :

۱ــ سر شماری (Census) فرایند انتخاب همهٔ واحدهای آماری جامعه است.

«در یک سال گذشته چند کتاب غیردرسی خوانده‌اید؟»

روش‌های زیر را نقد کنید :

الف) پرسیدن سؤال از تعدادی از دانش‌آموزانی که در کتابخانه هستند.

ب) گذاشتن تعدادی پرسش‌نامه در محل رفت و آمد دانش‌آموزان.

پ) پرسیدن از دانش‌آموزانی که صبح وارد مدرسه می‌شوند و مایل‌اند به سؤال مذکور جواب دهند.

شما چه روشی را پیشنهاد می‌کنید که به نمونه‌گیری تصادفی ساده نزدیک‌تر باشد؟

کار در کلاس

از جمله مسائلی که مردم در مورد آنها به نظرسنجی‌ها علاقه زیادی نشان می‌دهند، انتخابات است. با این وجود، گاهی مردم و گاهی گروه‌های سیاسی از روش‌هایی برای کشف نظر مردم استفاده می‌کنند که آنها را گمراه می‌کند.

در این مورد روش‌های زیر را نقد کنید :

الف) پرسیدن نظر دوستان و اطرافیان.

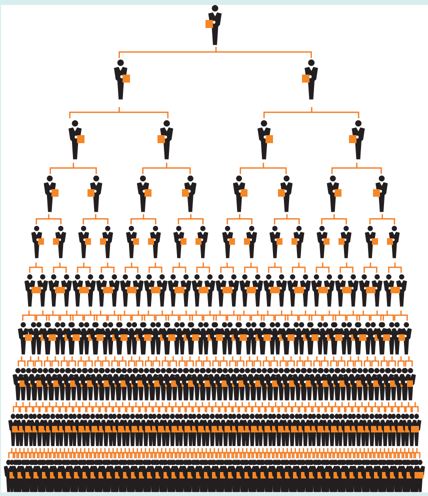
ب) طراحی یک نظرسنجی در وبگاهی پرطرف‌دار و لحاظ کردن ساز و کاری که از یک آدرس بیش از یک بار رأی گرفته نشود.

در تمام مثال‌هایی که ذکر شد، روش نمونه‌گیری به شکلی بود که داده‌هایی به سمتی انحراف پیدا می‌کردند و لذا افزایش تعداد نمونه‌ها نیز به کاهش این انحراف کمک نمی‌کرد. در علم آمار اصطلاحی خاص برای این مشکل وجود دارد :

اگر یک روش نمونه‌گیری از نمونه‌گیری ایده‌آل فاصله بگیرد و به سمتی خاص انحراف پیدا کند می‌گویند آن روش نمونه‌گیری **اریب** است. لذا آمارشناسان تلاش می‌کنند تا با شناسایی منابع تولید اریبی، نمونه‌گیری‌ها را تا جایی که می‌توانند **نااریب** کنند.

خواندنی

شرکت‌های هرمی که سال‌ها در دنیا کلاهبرداری کرده‌اند از اواخر دهۀ ۷۰ شمسی (حدود سال ۱۳۷۸) وارد ایران شدند. یک شرکت هرمی از مشتریان خود می‌خواهد که افراد جدیدی را به عضویت شرکت درآورند و به آنها وعده می‌دهد که اگر زیرشاخه تولیدشده به‌اندازۀ کافی بزرگ شود، جوایزی به او تعلق خواهد گرفت. معمولاً اعضای این شرکت‌ها برای اینکه بفهمند شانس رسیدن به جایزه‌ها چقدر است به اطرافیان خود و به‌خصوص بالاسری‌های خود نگاه می‌کنند. مثال سادۀ صفحۀ بعد نشان می‌دهد که این نوع نمونه‌گیری تا چه حد گمراه کننده است :



شرکتی هرمی از مشتریان خود می‌خواهد که بعد از خرید یک میلیون تومان کالا، دو نفر را به‌عنوان زیرشاخه خود معرفی کنند تا آنها هم همین کار را انجام دهند. شرکت به هر کس که زیرمجموعه‌هایش تا سه ردیف رشد کند جایزه می‌دهد. عموم مشتریان تصور می‌کنند تا قبل از یک ماه به جایزه خواهند رسید.

درخت دودویی صفحهٔ قبل نشان می‌دهد که مجموعهٔ مشتریان این شرکت چگونه رشد می‌کند؛ اگر این درخت n ردیف داشته باشد، تعداد اعضای آن برابر است با :

$$۱+۲+۴+...+۲^{n-۱}=۲^{n}-۱$$

همهٔ این اعضا، مگر آنهایی که در سه ردیف آخر قرار دارند، از شرکت جایزه گرفته‌اند. تعداد آنها برابر است با :

$$۱+۲+۴+...+۲^{n-۴}=۲^{n-۳}-۱$$

پس نسبت کسانی که جایزه گرفته‌اند، به کل اعضای برابر کسر زیر است:

$$\frac{۲^{n-۳}-۱}{۲^{n}-۱}\cong\frac{۲^{n-۳}}{۲^{n}}=\frac{۱}{۸}$$

یعنی از هر ۸ نفر فقط یکی موفق به گرفتن جایزه شده است. اکنون از زاویهٔ دید کسی به ماجرا نگاه کنید که در ردیف آخر این مجموعه است و به بالاسری‌های خود نگاه می‌کند. خودش و افراد بالای سرش n نفر هستند و غیر از سه نفر پایینی همه جایزه گرفته‌اند. لذا این عضو، نسبت جایزه گرفته‌ها را به‌کل اعضا به این شکل برآورد می‌کند:

$$\frac{n-۳}{n}=۱-\frac{۳}{n}$$

و این عبارت وقتی n بزرگ باشد، تقریباً برابر یک است. مثلاً به ازای $n=۱۲$ که تعداد اعضای شرکت

$۲^{۱۲}-۱=۴۰۹۵$

نفر است. یک عضو تازه وارد تصور می‌کند که نسبت کسانی که جایزه گرفته‌اند برابر با :

$$۱-\frac{۳}{۱۲}=۰/۷۵$$

است؛ یعنی ۷۵ درصد. در حالی که مقدار واقعی کمتر از ۱۲/۵ درصد است!

اگر تعداد ردیف‌ها به $n=۱۸$ برسد، تعداد اعضای شرکت $۲^{۱۸}-۱=۲۶۲۱۴۳$ نفر می‌شود. در این صورت، عضو تازه واردی که فقط به خودش و بالاسری‌های خودش نگاه می‌کند، تصور می‌کند که نسبت کسانی که جایزه گرفته‌اند برابر $۱-\frac{۳}{۱۸}=۰/۸۳$ یعنی ۸۳ درصد است؛ در حالی که در واقع این نسبت تقریباً همان ۱۲/۵ درصد است!

این شرکت‌ها، اگر از طریق قانون، متوقف نشوند، آن‌قدر رشد می‌کنند که دیگر ادامهٔ کار برای اعضا به‌صرفه نیست و در آن مقطع مشخص می‌شود که مثلاً از حدود یک میلیون عضو، ۸۷۵ هزار نفر ضرر کرده‌اند! از آن بدتر وضعیت کسانی است که جایزه‌ای از شرکت گرفته‌اند، ولی زیرشاخه‌های آنها که عموماً دوست و فامیلشان هستند ضرر کرده‌اند؛ این افراد آبرو و اعتبار خود را از دست داده‌اند.

فعالیت

می‌خواهیم طول قد دانش‌آموزان یک مدرسه را گردآوری کنیم. برای این منظور چه راهی پیشنهاد می‌کنید؟

> **آمارگیری** : گردآوری داده‌ها به یکی از روش‌های ممکن
> **آمارگیر** : کسی که آمارگیری را انجام می‌دهد.

اگر قرار شد آمارگیر باشیم، می‌توانیم جدولی به صورت زیر تکمیل کنیم.
مثالی از جدول طراحی شده برای ثبت داده‌ها

اندازهٔ طول قد	خط‌نشان برای شمارش	تعداد دانش‌آموزان
۱۴۰ > طول قد		
۱۴۹/۵ > طول قد ≥ ۱۳۹/۵		
۱۵۹/۵ > طول قد ≥ ۱۴۹/۵		
۱۶۹/۵ > طول قد ≥ ۱۵۹/۵		
۱۶۹/۵ ≤ طول قد		

آمارگیری زحمت زیادی برای آمارگیر دارد. آیا راه‌حل ساده‌تری برای انجام آن دارید؟ یکی از مرسوم‌ترین روش‌های آمارگیری، استفاده از پرسش‌نامه است. پرسش‌نامه شبیه همان جدولی است که هنگام ثبت‌نام در مدرسه، آن را تکمیل کرده‌اید. واحدهای جامعه یا نمونه می‌توانند پرسش‌نامه تکمیل کنند.

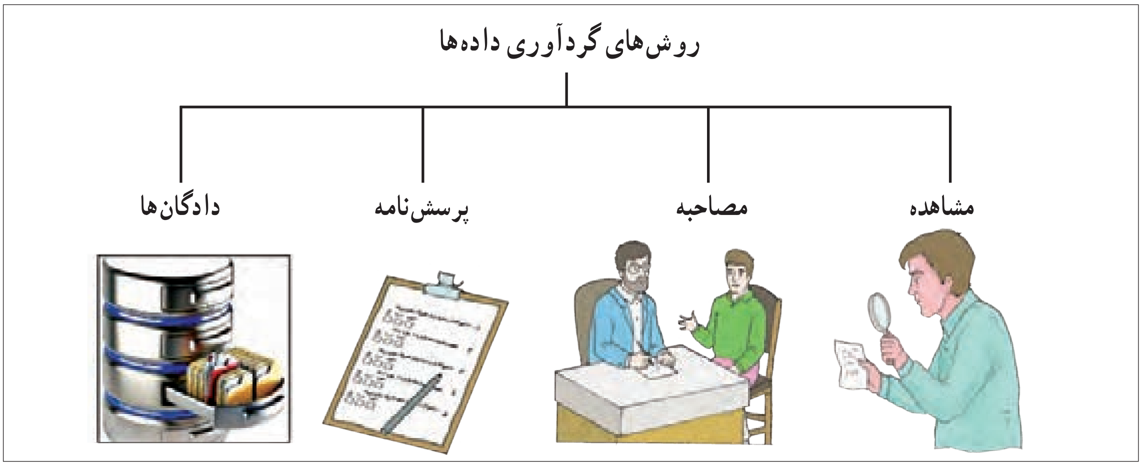
مثالی از پرسش‌نامهٔ طراحی شده

> سلام.
> می‌خواهیم طول قد دانش‌آموزان مدرسه را آمارگیری کنیم.
> لطفاً یکی از گزینه‌ها را انتخاب کنید.
> طول قد شما چقدر است؟
>
> ۱۴۰ > طول قد   [کمتر از ۱۳۹/۵] ☐
> ۱۴۹/۵ > طول قد ≥ ۱۳۹/۵   [۱۳۹/۵ـ۱۴۹/۵] ☐
> ۱۵۹/۵ > طول قد ≥ ۱۴۹/۵   [۱۴۹/۵ـ۱۵۹/۵] ☐
> ۱۶۹/۵ > طول قد ≥ ۱۵۹/۵   [۱۵۹/۵ـ۱۶۹/۵] ☐
> ۱۶۹/۵ ≤ طول قد   [۱۶۹/۵ و بیشتر] ☐

کار در کلاس

۱ چه راه دیگری برای آمارگیری طول قد دانش‌آموزان یک مدرسه پیشنهاد می‌کنید؟

۲ فرض کنید زمان لازم را برای گردآوری همهٔ داده‌های دانش‌آموزان در اختیار نداشته باشید. اگر بخواهیم نمونه‌ای را انتخاب و آمارگیری کنیم، چه راهی پیشنهاد می‌کنید که نمونه به صورت تصادفی انتخاب شود؟



۱ **مشاهده**[1] : گردآوری داده‌ها بدون نیاز به فرد پاسخگو، مانند شمارش تعداد وسایل نقلیهٔ عبوری از یک تقاطع در هر ساعت یا اندازه‌گیری وزن محصولات یک باغ میوه.

۲ **پرسش‌نامه**[2] : مجموعهٔ سؤالات از پیش تعیین‌شده که توسط تعدادی پاسخگو تکمیل می‌شود. این روش مرسوم‌ترین ابزار گرفتن اطلاعات از مردم است. مرکز آمار ایران هر ۱۰سال یک‌بار با استفاده از پرسش‌نامه اطلاعات همهٔ خانوارهای ساکن در ایران را گردآوری می‌کند. به این فرایند، سرشماری نفوس و مسکن می‌گوییم.

۳ **مصاحبه**[3] : معمولاً بین دو نفر صورت می‌گیرد : یکی مصاحبه‌گر (همان آمارگیر) و دیگری مصاحبه‌شونده، یا پاسخگو است. مثلاً اگر بخواهیم دربارهٔ مسائل فرهنگی کاهش شدآمد(ترافیک) پژوهش کنیم، مصاحبه از صاحب‌نظران راه‌حلّ مناسبی برای گردآوری داده‌هاست. از این روش، بیشتر زمانی استفاده می‌شود که آمارگیر از همهٔ پاسخ‌های ممکن اطلاع کافی ندارد.

۴ **دادگان**[4] : شامل مجموعه‌ای از اطلاعات ذخیره شده است. در بسیاری از موارد، داده‌ها را می‌توان از اطلاعاتی که قبلاً ذخیره شده است، به دست آورد. اگر قرار است تحقیقی در مورد نمره‌های دروس ریاضی استان‌ها انجام شود، اطلاعات ثبتی اداره کل آموزش و پرورش راه‌گشا خواهد بود. از سوی دیگر به دلیل تولید داده‌ها به‌صورت خودکار، در بسیاری از مؤسسات و سامانه‌ها، استفاده از این روش برای گردآوری داده‌ها به سرعت رواج یافته است.

۱ـ Observation
۲ـ Questionnaire
۳ـ Interview
۴ـ Database

کار در کلاس

الف) کدام روش برای گردآوری هر یک از داده‌ها مناسب است؟

۱ تعداد قلم‌های هر دانش‌آموز در یک کلاس.

۲ ساعات خواب دانش آموزان کلاس درس شما در شب گذشته.

۳ طول قدّ دانش آموزان یک کلاس.

ب) می‌خواهیم طول قدّ دانش‌آموزان یک کلاس یا مدرسه را به یکی از سه روش زیر **آمارگیری** کنیم. هریک از این روش‌ها محدودیت‌هایی دارند. چگونه می‌توان این محدودیت‌ها را از بین برد؟

پرسش‌نامه : اگر تعداد واحدهای نمونه زیاد باشد، این روش زمان‌بر است.

مشاهده : اگر به‌دقت زیادی نیاز داشته باشیم، مناسب نیست.

دادگان‌ها : همیشه اطلاعات ثبتی در اختیار نیست.

خواندنی

آمارگیری را می‌توان به روش‌هایی بسیار سریع‌تر یا کم‌هزینه‌تر مانند آمارگیری پستی، تلفنی، اینترنتی یا پیامکی انجام داد. همچنین می‌توان با ابزاری نظیر «**گوگل فُرم**» یک پرسش‌نامه طراحی کرد و آن را به نشانی نمونهٔ انتخابی ارسال کرد و نتایج را از «گوگل فُرم» بازیابی کرد.

فعالیت

قرار است دربارهٔ افرادی که از کوه دنا بالا رفته‌اند، پژوهشی آماری انجام دهیم. واحدهای آماری این پژوهش، همهٔ افرادی هستند که توانسته‌اند به قلّه برسند. هدف از این پژوهش می‌تواند فرهنگی، یا علمی باشد. بسته به نوع پژوهش، یک یا چند ویژگی این افراد (مانند طول قد یا جنسیت) مورد نیاز است. به هر یک از این ویژگی‌ها که مورد پژوهش قرار می‌گیرد، متغیّر می‌گویند. سایر متغیّرها می‌توانند مواردی مانند : سن، وزن، ملیّت، میزان تحصیلات و درآمد باشند. متغیّرهای مورد بررسی در یک پژوهش ممکن است کمّی یا کیفی باشند.

یادآوری

متغیّر : هر ویژگی از اشخاص یا اشیا که قرار است بررسی شود.

متغیّر کمّی : متغیّری است که مقادیر عددی می‌گیرد و برای آن عملیات ریاضی از قبیل جمع، تفریق و معدل‌گیری قابل انجام است.

متغیّر کیفی : متغیّری است که صرفاً برای دسته‌بندی افراد یا اشیا در گروه‌ها به‌کار می‌رود و لزوماً مقدار عددی نمی‌گیرد.

در مثال کوهنوردان دنا، سن، وزن، قد و درآمد یک کوهنورد، متغیرهای کمّی‌اند. متغیّرهای کیفی معمولاً از نوع مشاهدات غیر عددی‌اند و در مثال کوه‌نوردان دنا ، جنسیت و ملیّت را در بر می‌گیرند. به‌عنوان مثال، جنسیت برای دسته‌بندی افراد به مرد و زن استفاده می‌شود.

پارامتر یا پارامتر جامعه : یک مشخصهٔ عددی است که توصیف‌کنندهٔ جنبه‌ای خاص از جامعه است و در صورتی‌که داده‌های کل جامعه در اختیار باشند، قابل محاسبه است.

مثلاً اگر داده‌های مربوط به تک‌تک کوهنوردان را داشته باشیم؛ یعنی به داده‌های جامعه دسترسی داریم. نسبت مردان در کل جامعهٔ کوهنوردان، معرّف یک **پارامتر** است.

اگر داده‌های بعضی از کوهنوردان را داشته باشیم؛ یعنی داده‌های نمونه را در اختیار داریم. نسبت مردانِ کوهنورد به این داده‌های نمونه‌ای را، آماره (مقدار آماره) گویند. آماره ها از نمونه‌ای به نمونهٔ دیگر تغییر می‌کنند؛ این در حالی است که پارامترهای جامعه همیشه ثابت‌اند. چرا؟

در بسیاری از موارد، آمارگیری از کلّ جامعه امکان پذیر نیست. بنابراین، به‌رغم اینکه پارامتر مقدار ثابتی دارد، این مقدار مجهول است و به همین دلیل از آماره‌ها برای تخمین پارامترها استفاده می‌کنند.

آماره[1] یا آمارهٔ نمونه : مشخصه‌ای عددی که توصیف‌کنندهٔ جنبه‌ای خاص از نمونه است و از داده‌های نمونه به دست می‌آید.

مثال : ادارهٔ کشاورزی استان خوزستان در حال ارزیابی هندوانه‌های آمادهٔ برداشت است. در این بررسی، هندوانه‌ها همان واحدهای آماری‌اند. اگر پژوهشگران وزن هندوانه‌ها را مورد بررسی قرار دهند، متغیّر، «وزن» آنهاست. وزن یک متغیّر کمّی است؛ زیرا با مقادیر عددی ارائه می‌شود. اگر وزن تک‌تک هندوانه‌های این زمین بررسی شود، سرشماری از جامعه انجام داده‌ایم (که امکان پذیر نیست). متوسط وزنِ همهٔ هندوانه‌های قابل برداشت در این زمین، «پارامتر» است.

حال فرض کنیم پژوهشگران تصمیم دارند بر اساس معیار «مزه» هندوانه‌ها را مورد بررسی قرار دهند. در این حالت، مزهٔ هندوانه‌ها را می‌توان به سه دسته تقسیم کرد : بد، قابل قبول و خوب. حال که می‌خواهیم مزهٔ هندوانه‌ها را امتحان کنیم، مطالعه به بخشی از کلّ هندوانه‌ها محدود می‌شود. در اینجا «مزه» متغیری کیفی است؛ زیرا نمی‌توانیم همهٔ هندوانه‌ها را مزه مزه کنیم، فقط بخشی از هندوانه‌ها مورد مطالعه قرار می‌گیرند؛ پس باید «نمونه» بگیریم. نسبت تعداد هندوانه‌های دارای مزهٔ «خوب» در نمونه، یک «آماره» است.

فرایند نتیجه‌گیری دربارهٔ پارامترهای جامعه بر اساس نمونه، **آمار استنباطی**[2] است.

۱ــ Statistic

۲ــ Inferential Statistics

خواندنی

روش‌های تولید ارقام (اعداد) تصادفی

سال‌ها پیش، اعداد تصادفی به‌صورت دستی و پس از آن به کمک الگوریتم‌های ریاضی ارقام شبه تصادفی تولید شده است و در کتاب‌هایی با همین عنوان، در اختیار محققان قرار می‌گرفت. امروزه ماشین‌حساب‌های علمی و نرم‌افزارهای رایانه‌ای این اعداد را در کسری از ثانیه تولید می‌کنند. از رقم‌های عدد پی نیز می‌توان به‌عنوان ارقام و اعداد تصادفی طبیعی استفاده کرد. خروجی تمامی روش‌های یادشده به‌صورت زیر است :

۳۴۳۴۲۶۹۴۹ ۲۳۶۲۰۳۶۴۷ ۹۴۱۷۳۶۷۴۳ ۶۱۱۵۷۳۱۳۹ ۶۴۸۱۶۲۹۹۷ ۸۲۶۵۸۰۲۵۴ ۴۶۹۱۴۳۹۳۲

تمرین

۱ در نمونه‌گیری تصادفی ساده، احتمال اینکه فرد به‌خصوصی در اوّلین انتخاب عضو نمونه باشد، چقدر است؟ اگر مسئله با جای‌گذاری باشد، احتمال اینکه او در دومین انتخاب عضو نمونه باشد، چقدراست؟ اگر مسئله بدون جای‌گذاری باشد، و از نتیجه انتخاب اوّل اطلاع نداشته باشیم، احتمال اینکه او در دومین انتخاب عضو نمونه باشد، چقدر است؟

۲ آیا در نمونه‌گیری خوشه‌ای احتمال انتخاب واحدهای آماری برابر است؟ چرا؟ احتمال انتخاب خوشه‌ها چطور؟ آیا این روش نمونه‌گیری احتمالی است؟

۳ روش‌های نمونه‌گیری احتمالی چه مزیتی بر نمونه‌گیری‌های غیر احتمالی دارند؟

۴ برای هریک از روش‌های نمونه‌گیری احتمالی دو مثال واقعی بیاورید.

۵ اگر اندازهٔ جامعه بزرگ باشد، نمونه‌گیری با جای‌گذاری و بدون جای‌گذاری تقریباً مثل هم هستند. در این صورت، آیا می‌توانید راه حل کلی برای انتخاب تصادفی n نمونه از یک فهرست N تایی ارائه کنید؟

۶ آیا احتمال انتخاب واحدهای آماری در نمونه‌گیری طبقه‌ای برابر است؟ در هر طبقه چطور؟

۷ فرق بین داده و متغیّر چیست؟

۸ فرق بین آماره با پارامتر چیست؟

۹ در یک جامعهٔ آماری، آیا ممکن است که یک پارامتر تغییر کند؟ اگر سه نمونه با اندازهٔ یکسان از یک جامعه داشته باشیم، می‌توان سه مقدار متفاوت از یک آماره به دست آورد؟

۱۰ در یک مطالعه از ۱۲۶۱ مشتری غذاهای گیاهی، سؤال شده است که برای کدام وعده غذایی (ناهار یا شام) سفارش داده‌اند؟

الف) متغیّر را مشخص کنید. این متغیّر کمّی است یا کیفی؟

ب) کدام روش گردآوری داده‌ها برای مطالعه مناسب است؟

پ) جامعهٔ آماری در اینجا چیست؟ در این مطالعه پارامتر و آماره چه چیزی می‌توانند باشند؟

۱۱ کدام روش گردآوری داده‌ها برای موارد زیر مناسب است؟ یک دلیل برای انتخاب خود ذکر کنید.

- میزان رضایت مشتریان بانک از نحوهٔ برخورد و رسیدگی به درخواست‌های آنها.
- سنّ همهٔ دانش‌آموزان مدرسه بر حسب ماه در پایهٔ دهم.
- تعداد سرنشینان خودروهای سواری در یکی از محورهای خروجی شهر.

۱۲ فرض کنید جامعه‌ای از $N=۱۰۰$ عضو تشکیل‌شده و می‌خواهیم نمونه‌ای به‌اندازهٔ $n=۲۰$ از آن انتخاب کنیم. در هر یک از حالت‌های زیر احتمال انتخاب هر عضو جامعه به‌عنوان نمونه چقدر است؟ نام هر روش نمونه‌گیری را بگویید.

الف) اگر جامعه به دو قسمت ۵۰ تایی تقسیم شود و بخواهیم از هر قسمت نمونهٔ تصادفی ۱۰ تایی انتخاب کنیم.

ب) اگر جامعه به‌تصادف به ۱۰ قسمت مساوی تقسیم شود و دو قسمت را به‌عنوان نمونه انتخاب کنیم.

پ) اگر جامعه به‌تصادف به ۲۰ قسمت مساوی تقسیم شود، و از قسمت اوّل یک عضو به‌تصادف انتخاب شود. فرض کنید عضو انتخابی دومین عضو باشد و از قسمت‌های بعدی نیز دومین عضو انتخاب شود.

۱۳ دلایل اریبی در نمونه‌گیری‌های زیر را ذکر کنید. کدام روش گردآوری داده‌ها برای آنها مناسب‌تر است؟

الف) نمونه‌گیری راحت : افراد در دسترس را به‌عنوان نمونه انتخاب می‌کنیم.

ب) نمونهٔ غیر تصادفی : عامل شانس در انتخاب نمونه نقشی ندارد.

پ) نمونه‌گیری ایمیلی (رایانامه‌ای) : پرسش‌نامه‌ای به ایمیل‌های انتخاب شده ارسال می‌شود.

ت) نمونه‌گیری تلفنی : از دفترچهٔ راهنمای تلفن تعدادی شماره به‌تصادف انتخاب می‌شود.

ث) برخی از اعضای انتخاب شده در نمونه حاضر به پاسخگویی نمی‌باشند.

۱۴ نوع روش نمونه‌گیری مناسب‌تر را انتخاب کنید.

الف) شرکت واردکنندهٔ خودروهای سنگین برای بررسی عملکرد سامانه ترمز آنها می‌خواهد ده درصد از خودروهایی را که به‌مرور زمان وارد کشور می‌شوند بازرسی کند.

ب) مدیر مدرسهٔ ۶۰۰ نفری می‌خواهد نظر دانش‌آموزان را برای تغییر ساعت تعطیلی مدرسه براساس یک نمونهٔ ۱۲ تایی بداند.

پ) در قسمت قبل اگر مدرسه، شش پایه داشته باشد و ما حدس بزنیم که نظر ۶ پایه باهم تفاوت دارد (با فرض برابر بودن تعداد دانش آموزان در پایه‌های مختلف).

۱۵ چگونه از ارقام ۰ تا ۹ عدد تصادفی انتخاب می‌کنید؟ آیا با روش پیشنهادی شما می‌توان عدد تصادفی بین اعداد ۰ تا ۹۹ انتخاب کرد؟ آیا امکان توسعهٔ روش پیشنهادی شما به انتخاب تصادفی از فهرستی ۱۰۰۰ تایی امکان‌پذیر است؟

درس ۲ برآورد

فعالیت

یک شرکت تولید لیوان شیشه‌ای می‌خواهد تعداد لیوان‌هایی را که در یک بسته قرار می‌دهد مشخص کند. تعداد لیوان‌ها در هر بسته به میانگین تعداد اعضای خانوارهای کشور بستگی دارد که بُعد خانوار نام دارد. مثلاً در ۷ سال پیش بُعد خانوار (میانگین تعداد اعضای خانواده‌ها) ۴ بوده است. لذا بسته‌بندی لیوان‌ها از ۶ به ۴ کاهش داده شد. از آنجا که فروش شرکت کم شده، به نظر کارشناسان، دلیل آن تغییر بُعد خانوار در کشور است. بُعد خانوار هر کشور از اطلاعات سرشماری قابل دسترسی است که ۷ سال پیش انجام شده است. سرشماری یکی از مهم‌ترین طرح‌های آمارگیری در هر کشوری است، که در ایران هر ۱۰ سال یک بار انجام می‌شود، لذا داده‌های جدید آن تا ۳ سال آینده در دسترس نیست. از آنجا که سرشماری روش مقرون به‌صرفه‌ای برای گردآوری داده‌ها به‌منظور پاسخگویی به این سؤال نیست، شرکت تصمیم می‌گیرد که بُعد خانوار خریدارهای محصول این شرکت را به‌وسیلهٔ نمونه‌گیری انجام دهد.

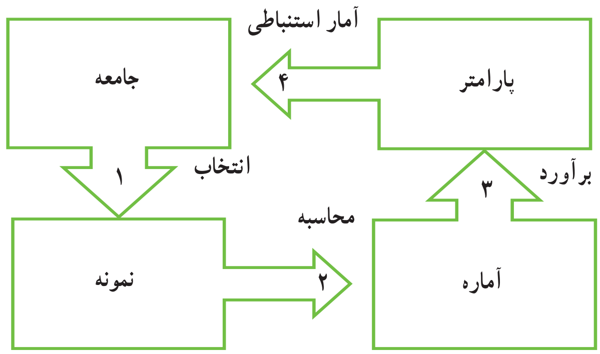
در اینجا صورت ساده‌تر آن را در نظر می‌گیریم. فرض کنید، بُعد خانوار ۹ خریدار محصول به‌صورت زیر باشد. میانگین بُعد این نمونه چقدر است؟

۳	۲	۷	۲	۵	۳	۳	۱	۴

برآورد نقطه‌ای[1] پارامتر جامعه برابر است با مقدار عددی حاصل از جای‌گذاری اعداد نمونه تصادفی در آمارهٔ نظیر آن پارامتر. به بیان دیگر مقدار عددی آماره را برآورد یا برآورد نقطه‌ای می‌نامند.

در این فعالیت میانگین تعداد اعضای خانوار پارامتر است. آماره، ....؛ و برآورد نقطه‌ای پارامتر ...... است.

۱ــ Point Estimation



کار در کلاس

فرض کنید، جامعه از ۶ نفر تشکیل شده باشد با درآمد ماهیانه برحسب میلیون تومان به‌صورت زیر :

۲	۵	۳	۰	۱	۴

می‌خواهیم بر اساس نمونه‌ای به‌اندازهٔ ۱، **میانگین** این جامعهٔ ۶ عضوی را برآورد کنیم. در واقع باید از بین ۶ نفر، یکی را به‌تصادف انتخاب کنیم. اگر شخصی انتخاب شود که درآمدش ۵ باشد، این عدد برآورد میانگین درآمد همهٔ افراد است. ممکن است فرد انتخابی درآمدی نداشته باشد. آن‌گاه صفر به‌عنوان نمونهٔ انتخاب شده و برآورد میانگین درآمد این افراد برابر ۰ می‌شود. نمونه‌های مختلف منجر به برآوردهای متفاوتی می‌شوند.

- در این مثال، پارامتر جامعه چیست و مقدار آن چقدر است؟
- آیا بر اساس هر یک از نمونه‌ها برآورد به مقدار پارامتر نزدیک است؟
- چه راه‌حلی پیشنهاد می‌کنید که برآورد به پارامتر نزدیک‌تر شود؟

درست حدس زده‌اید! اگر اندازهٔ نمونه را بیشتر کنیم امکان نزدیک شدن برآورد به پارامتر بیشتر می‌شود. اندازهٔ نمونه را به ۲ افزایش می‌دهیم. به‌عنوان مثال، اگر نمونه‌گیری تصادفی انجام شده شامل درآمدهای ۰ و ۴ باشد، آن‌گاه برآورد میانگین جامعه عدد ۲ است؛ یعنی پارامتر جامعه که مقدار آن ۲/۵ بوده است را ۲ برآورد کرده‌ایم.

- آیا نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ ۲ وجود دارد که مقدار پارامتر را دقیقاً ۲/۵ برآورد کند؟
- آیا امکان دارد با نمونه‌های مختلف برآوردهای برابر به دست آوریم؟
- بدون شمارش بگویید امکان مشاهده چند نمونهٔ دوتایی داریم؟

در جدول زیر، احتمال مشاهده هریک از مقادیر برآورد میانگین برای نمونه‌های دوتایی آمده است.

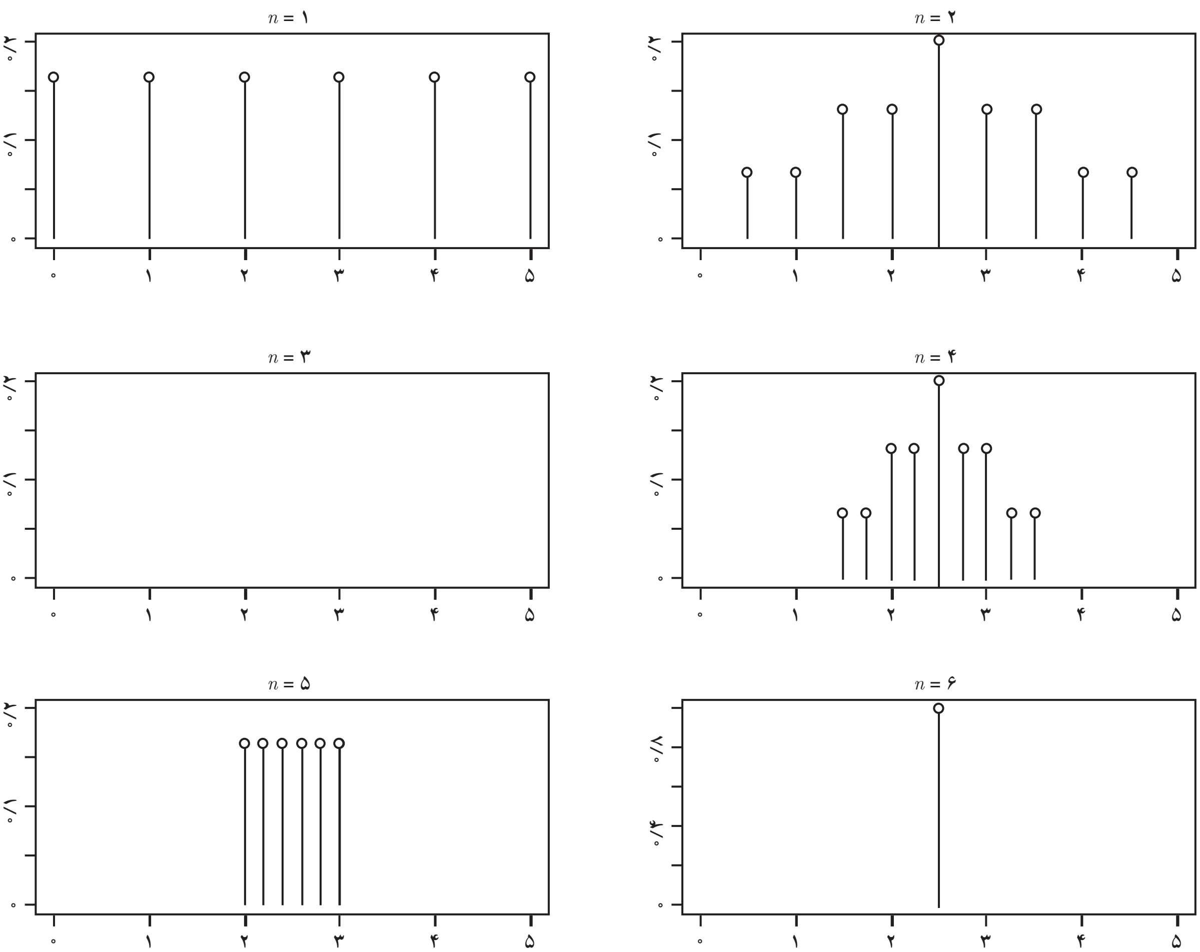
نمونه	{۴,۵}	{۳,۵}	{۲,۵}{۳,۴}	{۱,۵}{۲,۴}	{۰,۵}{۱,۴}{۲,۳}	{۰,۴}{۱,۳}	{۰,۳}{۱,۲}	{۰,۲}	{۰,۱}
$\overline{x}$	۴/۵	۴	۳/۵	۳	۲/۵	۲	۱/۵	۱	۰/۵
احتمال	$\frac{۱}{۱۵}$	$\frac{۱}{۱۵}$	$\frac{۲}{۱۵}$	$\frac{۲}{۱۵}$	$\frac{۳}{۱۵}$	$\frac{۲}{۱۵}$	$\frac{۲}{۱۵}$	$\frac{۱}{۱۵}$	$\frac{۱}{۱۵}$

اگر نمونه‌گیری تصادفی ساده به‌اندازهٔ $n = ۳$ از این ۶ عضو جامعه انجام دهیم، همانند جدول قبل مقادیر $\bar{x}$ و احتمال مشاهده هر مقدار را محاسبه و در جدول بنویسید.

نمونه	{۰,۱,۲}	{۰,۱,۳}	{۰,۱,۴}	{۰,۱,۵} {۰,۲,۴} {۱,۲,۳}	{۰,۲,۵} {۰,۳,۴} {۱,۲,۴}					
$\bar{x}$	$\frac{۳}{۳}$	$\frac{۴}{۳}$	$\frac{۵}{۳}$	$\frac{۶}{۳}$						
احتمال										

فعالیت

جدول به‌دست آمده از کار در کلاس قبل را برای $n = ۳$ رسم کنید. برای این منظور، بر روی محور طول‌ها مقادیر برآورد میانگین جامعه، یعنی $\bar{x}$ را مشخص کنید. حال احتمال مشاهده هریک از مقادیر را در نمودار علامت بزنید. این کار برای اندازهٔ نمونه‌های مختلف انجام شده است. هر نمودار مربوط به‌اندازه نمونهٔ به‌خصوص، $n = ۱,۲,۳,۴,۵,۶$ است.



اگر برآورد را بر اساس نمونه‌ای به‌اندازهٔ ۳ محاسبه کنیم، احتمال اینکه برآورد به پارامتر نزدیک‌تر باشد، نسبت به $n =$ ۱٫۲ بیشتر است. آیا اگر اندازهٔ نمونه از ۳بیشتر شود، احتمال اینکه برآورد به پارامتر نزدیک‌تر شود، باز هم بیشتر می‌شود؟ زمانی که اندازهٔ نمونه به ۶ می‌رسد، برآورد برابر .... می‌شود.

همان‌طور که در نمودارها دیده‌اید با افزایش اندازهٔ نمونه برآوردها به میانگین جامعه، که پارامتر است، نزدیک‌تر می‌شوند. به بیان دیگر در هر نمودار با زیاد شدن اندازهٔ نمونهٔ انحراف معیار برآوردهای پارامتر کمتر می‌شود. پس هرقدر انحراف معیار برآورد کمتر باشد، آن برآورد بهتر است.

سؤال اساسی آن است که انحراف معیارِ برآورد میانگین جامعه چقدر است؟ خوشبختانه آمارشناسان پاسخ این سؤال را با رابطهٔ زیر داده‌اند. البته برای سادگی محاسبات، فرض شده که جامعه نامتناهی است.

$$\sigma_{\bar{x}} = \sigma / \sqrt{n}$$

انحراف معیار جامعه تقسیم بر جذر اندازهٔ نمونه = انحراف معیار میانگین

هرچند که انحراف معیار جامعه معمولاً معلوم نیست، ولی این رابطه حدس ما را اثبات کرده است. با افزایش اندازهٔ نمونهٔ انحراف معیار برآورد کاهش می‌یابد. به عبارتی دیگر برآورد دقیق‌تر یا خطای کمتری برای برآورد میانگین جامعه داریم.

کار در کلاس

به فعالیت ابتدای درس باز می‌گردیم. اگر از مطالعات سال‌های گذشته بدانیم که انحراف معیار درآمد هر فرد در کشور ۲میلیون تومان است انحراف معیار برآورد میانگین درآمد افراد جامعه را برای اندازهٔ نمونه‌های ذکر شده محاسبه کنید.

n	۲۵	۱۰۰	۱۰۰۰۰
$\sigma_{\bar{x}}$			

- انحراف معیار برآورد میانگین درآمد افراد جامعه با نمونهٔ ۱۰۰ نفری چند برابر انحراف معیار با نمونهٔ ۱۰۰۰۰ نفری است؟
- اگر اندازهٔ نمونه ۱۰ برابر شود، انحراف معیار برآورد میانگین چند برابر می‌شود؟

برآورد بازه‌ای

اگر بعد از یک آزمون ساده از شما سؤال شود نمرهٔ شما چند می‌شود، حتماً بدون تردید نمره‌ای که انتظار آن را دارید می‌گویید. این یک برآورد ذهنی است (که مرتبط به درس فعلی ما نمی‌شود، ولی برای درک ادامهٔ درس مفید است). حال فرض کنید آزمون ساده نبوده و به صحیح بودن برخی پاسخ‌های خود شک دارید. بازهم به‌صورت ذهنی پاسخ می‌دهید، ولی پاسخ شما با شک و تردید همراه است. معمولاً ترجیح می‌دهید به‌جای ذکر یک نمره، بازه‌ای که برای نمرهٔ خود به‌صورت ذهنی ترسیم کرده‌اید بیان کنید. به خاطر اینکه اطمینان خود را نیز از بازه ذکر شده بیان کنید، به ذکر یک درصد اطمینان اکتفا می‌کنید. مثلاً می‌گویید نمرهٔ من بین ۱۶ تا ۱۹ است، با اطمینان ۹۰ درصد. هرچه فاصلهٔ دو عدد بازه کمتر باشد و درصد اطمینان ذکر شده بیشتر، برآورد دقیق‌تر است.

برآورد بازه‌ای یا بازه اطمینان[1] **پارامتر جامعه** عبارت است از بازه‌ای عددی برای پارامتر به همراه یک درصد اطمینان که به **ضریب اطمینان**[2] شهرت دارد.

فعالیت

در فعالیت قبل میانگین داده‌ها ۲/۵ محاسبه می‌شود؛ یعنی برآورد میانگین جامعه ۲/۵ به دست آمده است. چقدر به این برآورد اطمینان داریم؟ برای یافتن پاسخ سؤال به یاد آورید که دقت برآورد میانگین جامعه به ...... و .... بستگی داشت. اگر .... زیاد می‌شد، یا .... کم بود، دقت برآورد میانگین بیشتر می‌گردید. بر اساس این دو کمیت پاسخ این سؤال را با رابطهٔ زیر داده‌اند.

برآورد بازه‌ای برای میانگین جامعه : اگر نمونه‌ای تصادفی به‌اندازهٔ n در اختیار داشته باشیم، با اطمینان بیش از ۹۵٪ می‌توانیم بگوییم :

$$\overline{x} - ۲\sigma / \sqrt{n} \leq \mu \leq \overline{x} + ۲\sigma / \sqrt{n}$$

که μ میانگین جامعه و σ انحراف معیار جامعه است.

اگر یک نمونه به اندازهٔ چهار داشته باشیم یک فاصله اطمینان برای میانگین جامعه محاسبه کنید.

مشاهدات ۵،۲،۱،۰

میانگین نمونه $\overline{x} = ...$

انحراف معیار نمونه $\sigma = ۱/۸۷$

$....... < \mu < ....$

کار در کلاس

خط فقر حداقل درآمدی است که برای زندگی در یک ماه به ازای هر نفر موردنیاز است. خط فقر برابر است با نصف میانگین درآمد افراد جامعه. بر اساس داده‌های فعالیت اوّل خط فقر را برآورد کنید. انحراف معیار جامعه را برآورد کنید. اگر فرض کنیم که انحراف معیار به دست آمده انحراف معیار جامعه است، یک برآورد فاصله‌ای برای خط فقر محاسبه کنید.

خواندنی

از جمله ساده‌ترین مسائل در آمار استنباطی، برآورد کردن یک نسبت در جامعه است :

- چند درصد از مردم تصمیم دارند در تعطیلات نوروز سال آینده به مسافرت بروند؟
- چند درصد از کشاورزان در سال گذشته از آبیاری قطره‌ای در مزارع خود استفاده کردند؟
- چند درصد از درختان یک باغ آلوده به شته شده‌اند؟
- چند درصد مشتریان یک فروشگاه از برخورد کارمندان راضی هستند؟

۱ــ Confidence Interval
۲ــ Confidence Coefficient

فرض کنید برای به‌دست آوردن نسبتی از اعضای جامعه که ویژگی خاصی را دارند، نمونه‌ای n تایی را به تصادف از جامعه انتخاب می‌کنیم. اگر m تا از نمونه‌ها ویژگی مورد مطالعه را داشته باشند، آن‌گاه می‌توانیم بگوییم:

«تقریباً به نسبت $\frac{m}{n}$ از افراد جامعه آن ویژگی را دارند.»

ولی این گزاره چه معنایی می‌دهد؟

در این تقریب، مقدار خطا چقدر است؟ آمارشناسان در پاسخ به سؤال فرمول زیر را ارائه کرده‌اند:

برآورد بازه‌ای نسبت، با اطمینان ۹۵ درصد:

اگر از جامعه‌ای نسبتاً بزرگ، n نمونهٔ تصادفی ساده انتخاب کنیم و m تا از آنها ویژگی مورد مطالعه ما را داشته باشند، آن‌گاه نسبت واقعی افرادی از جامعه (پارامتر نسبت) که آن ویژگی را دارند، با اطمینان ۹۵ درصد، در بازهٔ زیر است:

$$p-۲\sqrt{\frac{p(۱-p)}{n}} \leq \text{نسبت واقعی} \leq p+۲\sqrt{\frac{p(۱-p)}{n}}$$

که در آن $p=\frac{m}{n}$ برآورد پارامتر نسبت ویژگی در جامعه است.

توجه داشته باشید که اندازهٔ بازه اطمینان وابسته به تعداد نمونه، یعنی عدد n، است، ولی ارتباطی با تعداد اعضای جامعه ندارد. اگر بخواهیم بدون تغییر تعداد نمونه با اطمینانی بیش از ۹۵ درصد نسبت را برآورد کنیم، لازم است که به‌جای عدد ۲ ضریبی بزرگ‌تر گذاشته شود.

مثال: فرض کنید از ۴۸ دانش‌آموز مدرسه پرسیده‌ایم که «آیا برای آمدن به مدرسه از وسایل نقلیهٔ عمومی استفاده می‌کنید؟» ۳۶ نفر به سؤال ما جواب مثبت داده‌اند. در این صورت، چند درصد از دانش‌آموزان مدرسه جوابشان به این سؤال مثبت خواهد بود؟ پاسخی با اطمینان ۹۵ درصد مدّ نظر است.

حل: طبق فرض‌های مسئله تعداد نمونه ۴۸ است و ۳۶ نفر ویژگی مورد نظر را داشته‌اند. پس قرار می‌دهیم:

$n=۴۸ , m=۳۶$

پس $p=\frac{۳۶}{۴۸}=۰/۷۵$. طبق فرمول اخیر باید عبارت زیر را هم محاسبه کنیم:

$$۲\sqrt{\frac{p(۱-p)}{n}}=۲\sqrt{\frac{۰/۷۵(۱-۰/۷۵)}{۴۸}}=۲\sqrt{\frac{۱}{۴۸}\times\frac{۳}{۴}\times\frac{۱}{۴}}=۲\times\frac{۱}{۱۶}=۰/۱۲۵$$

پس با اطمینان ۹۵ درصد می‌توان گفت، نسبت مورد نظر بین ۶۳ درصد و ۸۸ درصد است. طول این بازه ۲۵ درصد است. اگر بخواهیم به‌دقت بهتری برسیم باید تعداد داده‌ها را زیاد کنیم.

با توجه به اینکه در فرمول بازه اطمینان جمله $\sqrt{n}$ در مخرج آمده است، به حقیقت زیر می‌رسیم:

اگر در محاسبهٔ بازه اطمینان نسبت تعداد نمونه‌ها را k برابر کنیم، طول بازهٔ اطمینان تقسیم بر $\sqrt{k}$ می‌شود. پس اگر تعداد نمونه‌ها را ۴ برابر کنیم طول بازهٔ اطمینان نصف می‌شود و اگر تعداد نمونه‌ها را صد برابر کنیم، دقت محاسبه نسبت، یک رقم اعشار بهتر خواهد شد.

یک مؤسسه نظرسنجی معتبر، یک روز قبل از برگزاری انتخابات ریاست‌جمهوری، از یک نمونهٔ ۱۰۰۰ نفری از واجدان شرایط، که به‌طور تصادفی از کلّ کشور انتخاب شده‌اند، پرسیده است که «آیا در انتخابات شرکت خواهید کرد؟»

اگر جواب ۷۰۰ نفر مثبت بوده باشد، یک بازهٔ اطمینان ۹۵ درصدی برای درصد شرکت‌کنندگان در انتخابات به دست آورید.

حل : در این مسئله $n=۱۰۰۰$ و $p=\frac{\cdots}{\cdots}=\ldots$. باید عبارت زیر را نیز محاسبه کنیم :

$$۲\sqrt{\frac{p(۱-p)}{n}}=۲\sqrt{\frac{\cdots(۱-\cdots)}{\cdots}}=۰/۰۲۹$$

پس با اطمینان ۹۵ درصد مشارکت در انتخابات بین .... درصد و .... درصد خواهد بود.

مثال : همان‌طور که می‌دانید در انتخابات ریاست‌جمهوری اگر نامزدی موفق به کسب بیش از نیمی از آرای رأی‌دهندگان شود، رئیس‌جمهور خواهد شد، ولی اگر هیچ نامزدی این میزان رأی نیاورد دو نامزدی که بیشترین تعداد رأی را دارند به دور دوم خواهند رفت. در برخی سال‌ها رقابت بین نامزدها به شکلی شدید است که از پیش به‌سختی می‌توان حدس زد که نامزد پیشرو آیا در دور اوّل انتخاب خواهد شد یا خیر. در این صورت، نظرسنجی‌ها باید بسیار دقیق‌تر باشد. فرض کنید از پیش بدانیم که آرای یکی از نامزدها نزدیک به ۵۰ درصد است. اگر بخواهیم طول بازهٔ اطمینان ۹۵ درصدی، کمتر از یک درصد باشد نمونهٔ ما باید شامل چند نفر باشد؟

حل : طول بازهٔ اطمینان برابر است با :

$$۲\times ۲\sqrt{\frac{p(۱-p)}{n}}$$

و با توجه به اینکه می‌دانیم $p\cong ۰/۵$ پس طول بازهٔ اطمینان تقریباً برابر است با :

$$۲\times ۲\sqrt{\frac{۰/۵(۱-۰/۵)}{n}}=\frac{۲}{\sqrt{n}}$$

پس اگر بخواهیم طول بازه اطمینان ۹۵ درصدی، برابر یک درصد باشد باید n را آن‌قدر بزرگ بگیریم که $\frac{۲}{\sqrt{n}}$ از ۰/۰۱ کمتر شود؛ یعنی $\frac{۲}{\sqrt{n}}\cong ۰/۰۱$ و این یعنی $n=۲۰۰^۲=۴۰۰۰۰$.

در حالت کلی، قبل از آمارگیری برآوردی از نسبت مورد مطالعه نداریم. پس اگر بخواهیم به‌دقت خاصی برسیم، چگونه باید از پیش بفهمیم که به چند نمونه احتیاج داریم؟ برای پاسخ به این سؤال به این نکته توجه کنید که عبارت $p(۱-p)$ یک چندجمله‌ای درجه دو است و بیشترین مقدار خود را در $p=۰/۵$ می‌گیرد؛ یعنی

$p(۱-p)\leq ۰/۵\,(۱-۰/۵)=۰/۵^۲$

لذا به این نتیجه می‌رسیم :

در برآورد بازه‌ای نسبت، بازهٔ زیر شامل بازهٔ اطمینان ۹۵ درصدی است :

$$p-\frac{۱}{\sqrt{n}}\leq \text{پارامتر نسبت}\leq p+\frac{۱}{\sqrt{n}}$$

که در آن $p=\frac{m}{n}$. به بیان دیگر «با اطمینان بیشتر از ۹۵ درصد»، نسبت مورد نظر در این بازه است.

تمرین

۱ در اوّلین کار در کلاس، جداول را برای نمونه‌گیری تصادفی ساده به‌اندازهٔ ۴ و ۵ تشکیل داده و مقادیر $\bar{x}$ را در مقابل احتمال مشاهدهٔ هر مقدار، محاسبه و در جدولی بنویسید.

۲ از اعداد ۰ تا N، ۱۰ عدد به‌تصادف انتخاب شده است. اگر اعداد انتخابی به‌صورت زیر باشند با دو روش مختلف N را برآورد کنید.

۹	۲	۵	۷	۳	۱۲	۱۱	۹	۸	۵

۳ رئیس یک دانشگاه علاقه‌مند است متوسط سنّ دانشجویانی که در سال جاری ثبت نام کرده‌اند را بداند. برای این منظور، او یک نمونهٔ تصادفی از سنّ ۲۵ دانشجو را انتخاب می‌کند. میانگین سنّ آنها برابر ۲۲ سال برآورد شده است. اگر در بررسی‌های گذشته انحراف معیار طول قد دانشجویان این دانشگاه برابر ۱/۹ سال باشد، بازهٔ اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین سنّ جامعه را محاسبه کنید.

۴ طول فاصلهٔ اطمینان، برابر تفاضل حدّ بالا و پایین بازهٔ اطمینان است.

الف) اگر در فرمول بازه اطمینان اندازهٔ نمونه افزایش یابد، طول فاصلهٔ اطمینان .... می‌یابد. چرا؟

ب) اگر در فرمول بازه اطمینان انحراف معیار جامعه افزایش یابد، طول فاصله اطمینان .... می‌یابد. چرا؟

۵ داده‌های زیر نمرات ۲۴ دانش‌آموز از ۱۰۰ است.

۷۵ ۷۴ ۷۳ ۷۱ ۷۱ ۷۰ ۶۷ ۷۵

۷۹ ۷۸ ۷۸ ۷۸ ۷۸ ۷۷ ۷۵ ۸۰

۸۷ ۸۶ ۸۶ ۸۳ ۸۲ ۸۲ ۸۱ ۹۱

الف) میانگین و انحراف معیار نمرات را محاسبه کنید.

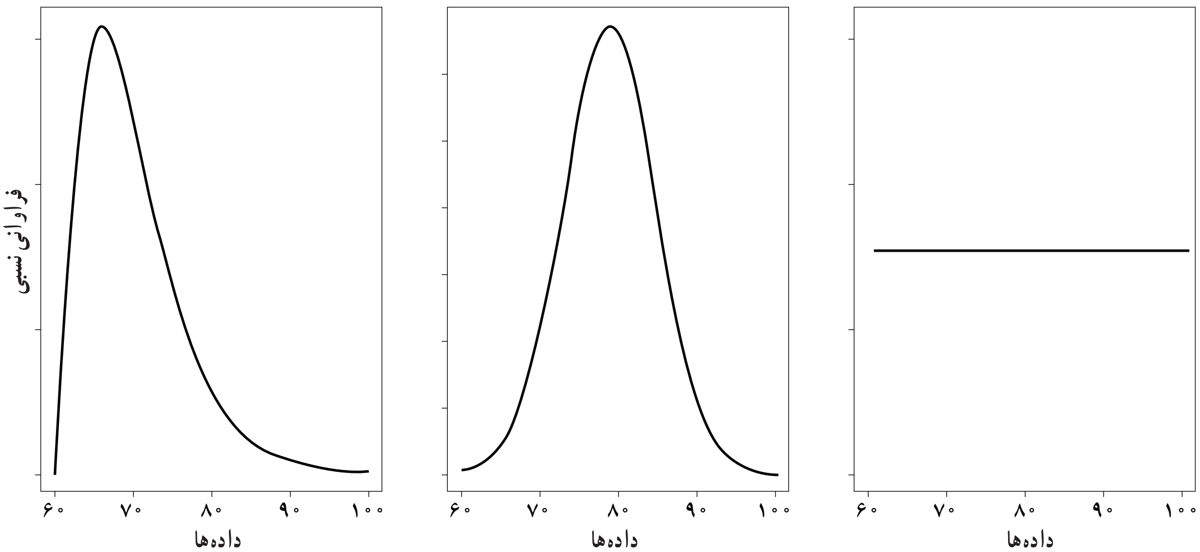
ب) اگر انحراف معیار جامعه ۶ باشد بازه اطمینان ۹۵ درصد برای میانگین نمرات جامعه محاسبه کنید.

پ) چند درصد داده‌ها داخل این بازه قرار می‌گیرند؟

ت) بافت نگاشت فراوانی داده‌ها را رسم کنید. (در فواصل [۶۷,۷۱] و [۷۱,۷۵] و ...)

ث) چندبر فراوانی بافت نگاشت را رسم کنید (وسط مستطیل‌ها را با پاره‌خط به هم متصل کرده و به محور طول‌ها وصل کنید).

ج) اگر داده‌ها زیاد شوند، به نظر شما شکل چندبر فراوانی بافت نگاشت به کدام‌یک از نمودارهای صفحهٔ بعد شباهت بیشتری خواهد داشت؟ (نام نمودارها به ترتیب : یکنواخت، نرمال، نامتقارن یا چوله است)



۶ اگر در سؤال قبل ۱۰۰ بار نمونه‌گیری را تکرار کنیم؛ یعنی ۱۰۰ دفعه نمونه‌ای به‌اندازهٔ ۲۴ بگیریم و چند بر فراوانی بافت نگاشت ۱۰۰ میانگین را رسم کنیم می‌توان نشان داد که تقریباً به صورت یک منحنی به شکل زیر است (توجه کنید منظور از ۱۰۰ عددی بزرگ است، ۱۰۰ یک مثال است). در این شکل μ نشان دهندهٔ میانگین جامعه است، که در اینجا میانگین نمرات همهٔ دانش‌آموزان است، که مجهول است. حال فرض کنید برای ۱۰۰ نمونهٔ ۲۴ تایی، ۱۰۰ بازهٔ اطمینان ۹۵ درصدی محاسبه کرده‌ایم. در زیر نمودار نرمال ۲۰ تا از آنها رسم شده است. نقاط قرمز رنگ نشان‌دهندهٔ میانگین نمونه و پاره‌خط‌های افقی آبی معرف فاصلهٔ اطمینان مربوطه‌اند. خط سیاه عمودی میانگین جامعه را مشخص کرده است.

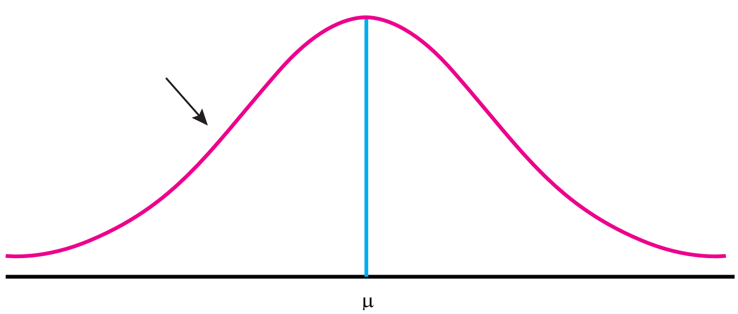
الف) اگر پاره‌خط آبی، خط سیاه را قطع نکند، چه نتیجه‌ای باید گرفت؟

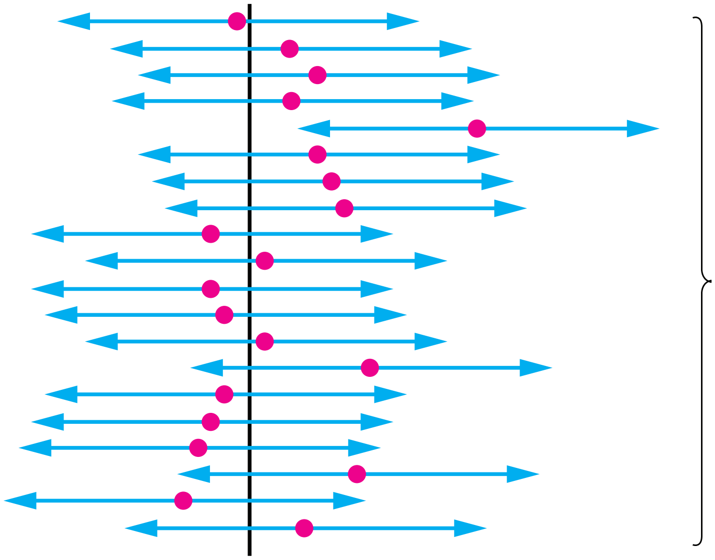
ب) چند درصد از ۲۰ پاره‌خط آبی، خط سیاه را قطع کرده‌اند؟

پ) اگر ۱۰۰ پاره‌خط آبی را رسم می‌کردیم، انتظار داشتید چند تا از آنها خط سیاه را قطع نکنند؟

ت) نتیجه این تمرین تعبیر یک بازهٔ اطمینان ۹۵ درصد است. اگر ۱۰۰ بار نمونه‌گیری را تکرار کنیم و ۱۰۰ بازهٔ اطمینان محاسبه کنیم انتظار داریم .... از آنها پارامتر میانگین جامعه را در بر گیرند.

چند بر بافت نگاشت فراوانی میانگین‌ها





۷ شاخص پوسیدگی دندان ($DMFT$) در ایران برای سال ۱۳۶۰ برابر ۳ بوده است؛ یعنی به‌طور متوسط هر ایرانی دارای یک دندان کشیده شده، یک دندان پوسیده و یک دندان پرشده است. براساس نمونه‌ای به اندازهٔ ۴۰۰، این شاخص در سال ۱۳۹۵ برابر ۶ شده است ($\overline{x} =$ ۲) . اگر انحراف معیار دندان‌های کشیده شده، پوسیده و پرشده به ترتیب برابر ۱ ، ۲ و ۱/۶ باشد، بازهٔ اطمینان ۹۵ درصدی برای میانگین دندان‌های کشیده شده، پوسیده و پرشده محاسبه کنید.

۸ پارامتر میانگین جامعه را با چه آماره‌هایی می‌توان برآورد کرد؟ (۵ آماره نام ببرید)

۹ پارامتر واریانس و انحراف معیار جامعه را با چه آمارهایی می‌توان برآورد کرد؟

۱۰ در فصل قبل با چه آماره‌هایی آشنا شده‌اید؟ آنها چه پارامترهایی را برآورد می‌کردند؟

۱۱ مثال‌های این درس را با اندازهٔ نمونه‌های مختلف حل کنید. چه نتیجه‌هایی می‌توان گرفت؟ (مقدار برآورد تغییر نمی‌کند.)

منابع

۱ گزارش سالانه کیفیت هوای تهران در سال ۱۳۹۳/ سولماز احدی و همکاران/ مرکز نشر شهر
۲ آمار و احتمال مهندسی/ نادر نعمت‌الهی/ ققنوس
۳ آمار و احتمال مقدماتی/ جواد بهبودیان/ آستان قدس
۴ آمار و احتمال مقدماتی/ مجتبی گنجعلی، احسان بهرامی سامانی/ نگارندهٔ دانش
۵ مبانی احتمال/ سعید قهرمانی/ ترجمهٔ غلامحسین شاهکار، ابوالقاسم بزرگ‌نیا / دانشگاه صنعتی شریف
۶ مبانی احتمال/ شلدون راس/ ترجمهٔ احمد پارسیان، علی زینل همدانی/ شیخ‌بهایی
۷ مبانی ریاضیات گسسته/ حمیدرضا امیری و یدالله ایلخانی‌پور/ انتشارات مدرسه
۸ دانشنامهٔ ریاضی/ پرویز شهریاری و همکاران/ کانون فرهنگی آموزش
۹ ورودی به نظریهٔ احتمال/ عین‌الله پاشا/ انتشارات مدرسه
۱۰ آنالیز ریاضی ــ جلد اوّل/ غلامحسین مصاحب/ امیرکبیر
۱۱ منطق ریاضی/ محمد اردشیر/ هرمس
۱۲ منطق و استدلال ریاضی/ عبدالحسین مصحفی/ فاطمی
۱۳ منطق، برهان و مجموعه‌ها/ مار وین آل. بیتینگر/ ترجمهٔ محمود محمدی و میثم خطیبی/ مبتکران
۱۴ Elementary Statistics / Allan G Bluman / Higher Education
۱۵ Detecting activation in / MRI dat/ KJ Worsley
۱۶ H.Baxter et al. (2006) GCSE Mathematics for OCR , Hodder Murray

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی جهت ایفای نقش خطیر خود در اجرای سند تحول بنیادین در آموزش و پرورش و برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران، مشارکت معلمان را به‌عنوان یک سیاست اجرایی مهم دنبال می‌کند. برای تحقق این امر در اقدامی نوآورانه سامانه تعاملی بر خط اعتبارسنجی کتاب‌های درسی راه‌اندازی شد تا با دریافت نظرات معلمان دربارهٔ کتاب‌های درسی نونگاشت، کتاب‌های درسی را در اولین سال چاپ، با کمترین اشکال به دانش‌آموزان و معلمان ارجمند تقدیم نماید. در انجام مطلوب این فرایند، همکاران گروه تحلیل محتوای آموزشی و پرورشی استان‌ها، گروه‌های آموزشی و دبیرخانهٔ راهبری دروس نقش سازنده‌ای را بر عهده داشتند. ضمن ارج نهادن به تلاش تمامی این همکاران، اسامی دبیران و هنرآموزانی که تلاش مضاعفی را در این زمینه داشته و با ارائهٔ نظرات خود سازمان را در بهبود محتوای این کتاب یاری کرده‌اند به شرح زیر اعلام می‌شود.

کتاب آمار و احتمال ــ کد ۱۱۱۲۱۵

ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت	ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت
۱	فرزانه کدخدایی	لرستان	۲۲	حمیده محمدزاده	خراسان‌شمالی
۲	علیرضا رافعی‌بروجنی	چهارمحال وبختیاری	۲۳	حمیده شریفی	هرمزگان
۳	نادر بلال‌زاده	آذربایجان‌شرقی	۲۴	عزیز اسدی	کردستان
۴	حجت‌الله ضیایی‌بروجنی	چهارمحال وبختیاری	۲۵	حمید حسینخانی	کرمان
۵	پژمان شعبانی‌نژاد ناورود	گیلان	۲۶	محمد عادلی	کرمان
۶	سمیه بهرامی	شهرتهران	۲۷	جواد ابراهیم‌نژاد	سیستان وبلوچستان
۷	سکینه عله‌زاده	ایلام	۲۸	رضا قلاسی	خراسان‌جنوبی
۸	ایرج نوری	ایلام	۲۹	مهدی قسوره	خراسان‌جنوبی
۹	مجتبی رفیعی	شهرستان‌های تهران	۳۰	شجاع‌علی گرجیان‌مهلبانی	مازندران
۱۰	عصمت چاهکی	مرکزی	۳۱	علی‌رضا بیات	همدان
۱۱	جبار منبری	کردستان	۳۲	علی خالقی	فارس
۱۲	ژاله اخوان	شهرستان‌های تهران	۳۳	ابوذر نخعی‌مطلق	سیستان و بلوچستان
۱۳	حجت رنگین	قزوین	۳۴	جلال سرحدی	مازندران
۱۴	مریم امیدیان	سمنان	۳۵	جمیله یوسف‌زاده	گیلان
۱۵	رقیه عاصفی	شهرتهران	۳۶	جمال نوین	یزد
۱۶	ام البنین ربیعی	سمنان	۳۷	مسعودرضا عرب‌یارمحمدی	گلستان
۱۷	افشین خاصه‌خان	آذربایجان‌شرقی	۳۸	سیما مهرجویا	آذربایجان‌غربی
۱۸	مهناز رضایی	خراسان‌شمالی	۳۹	حسین بهنامی	خراسان‌رضوی
۱۹	امین زارعی	هرمزگان	۴۰	مینا عظیمی	همدان
۲۰	مریم مددی	اصفهان	۴۱	فرخ حسن‌زاده	کهگیلویه و بویراحمد
۲۱	غلامرضا روئین‌تن	فارس			