بسم الله الرحمن الرحیم

اَللّٰهُمَّ صَلِّ عَلیٰ مُحَمَّدٍ وَ آلِ مُحَمَّدٍ وَ عَجِّلْ فَرَجَهُمْ

حسابان (۱)

رشتهٔ ریاضی و فیزیک

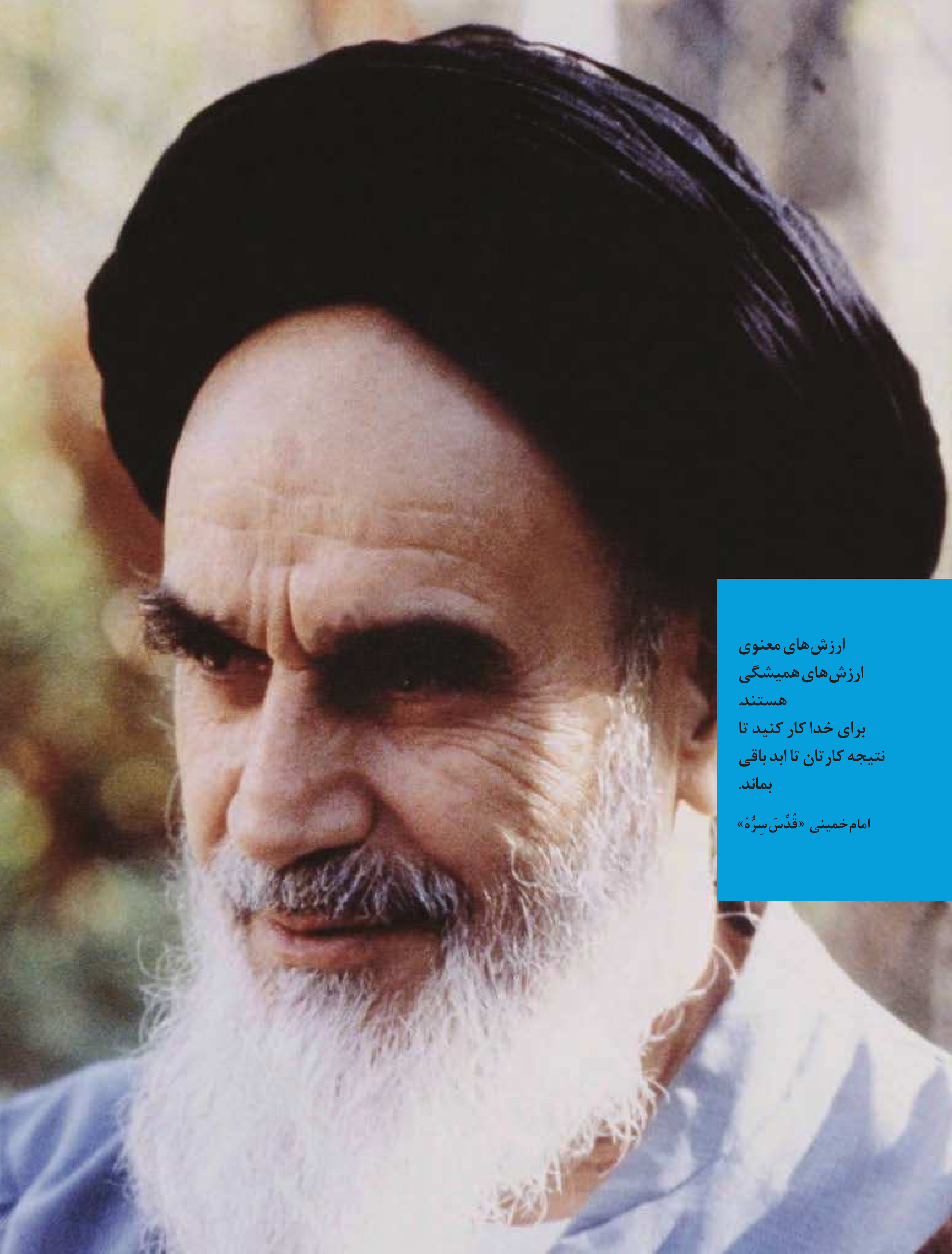
پایهٔ یازدهم

دورهٔ دوم متوسطه

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب: حسابان (۱) ـ پایهٔ یازدهم دورهٔ دوم متوسطه ـ ۱۱۱۲۱۴
پدیدآورنده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری
شناسه افزوده برنامه‌ریزی و تألیف: حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، ناصر بروجردیان، محمدحسن بیژن‌زاده، خسرو داودی، زهرا رحیمی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیّدصالحی، میرشهرام صدر، اکرم قابل‌رحمت، طاهر قاسمی هنری و عادل محمدپور (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
محمدباقر اسدی، علی رنجبری، ابراهیم ریحانی، محمدتقی طاهری‌تنجانی، مجتبی قربانی‌آرانی و هادی مین‌باشیان (اعضای گروه تألیف) ـ جعفر ربانی (ویراستار ادبی)
مدیریت آماده‌سازی هنری: ادارهٔ کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
شناسه افزوده آماده‌سازی: احمدرضا امینی (مدیر امور فنی و چاپ) ـ جواد صفری (مدیر هنری) ـ شهرزاد قنبری (صفحه‌آرا) ـ فاطمه رئیسیان‌فیروزآباد (رسام) ـ بهناز بهبود، سوروش سعادتمندی، علی نجمی، سیف‌الله بیک‌محمد دلیوند و فاطمه پزشکی (امور آماده‌سازی)
نشانی سازمان: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)
تلفن: ۹ـ ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
وبگاه: www.chap.sch.ir و www.irtextbook.ir
ناشر: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران تهران: کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۵ـ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۱۳۹ـ۳۷۵۱۵
چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»
سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ هشتم ۱۴۰۳

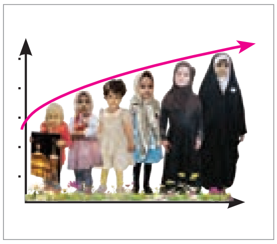
شابک: ۰ـ۲۷۸۷ـ۰۵ـ۹۶۴ـ۹۷۸
ISBN: 978-964-05-2787-0



ارزش‌های معنوی
ارزش‌های همیشگی
هستند
برای خدا کار کنید تا
نتیجه کارتان تا ابد باقی
بماند.

امام خمینی «قُدِّسَ سِرُّهُ»

فهرست



مقدمه

کتاب حاضر در راستای برنامهٔ درسی ملی و در ادامهٔ تغییر کتاب‌های ریاضی دورهٔ دوم متوسطه تألیف شده است. همانند پایه‌های قبلی، ساختار کتاب براساس سه محور اساسی فعالیت، کار در کلاس و تمرین قرار گرفته است. از این میان، «فعالیت‌ها» موقعیت‌هایی برای یادگیری و ارائهٔ مفاهیم جدید ریاضی فراهم می‌کنند و این امر مستلزم مشارکت جدی دانش‌آموزان است. البته معلم هم در این میان نقشی مهم برای راهنمایی و هدایت کلی فعالیت‌ها به‌عهده دارد. با توجه به این که کتاب برای دانش‌آموزان سطح متوسط طراحی شده است، با درنظر گرفتن شرایط مختلف، امکان غنی‌سازی فعالیت‌ها و یا ساده‌سازی آنها به‌وسیلهٔ معلم وجود دارد. در هر حال تأکید اساسی مؤلفان، محور قرار دادن کتاب درسی در فرایند آموزش است. در همین راستا توجه به انجام فعالیت‌ها در کلاس درس و ایجاد فضای بحث و گفت‌وگو و دادن مجال به دانش‌آموز برای کشف مفاهیم به‌طور جدی توصیه می‌شود.

زمان کلاس درس نباید به مباحثی خارج از اهداف کتاب درسی اختصاص یابد. همچنین نباید آزمون‌های مختلف خارج از مدرسه مبنای آموزش مفاهیم در کلاس درس واقع شوند، بلکه این کتاب درسی است که سطح و سبک آزمون‌ها را مشخص می‌کند. در بسیاری از موارد دربارهٔ یک مفهوم، حد و مرزهایی در کتاب رعایت شده است که باید به این موضوع در ارزشیابی‌ها و آزمون‌های رسمی توجه شود. رعایت این محدودیت‌ها موجب افزایش تناسب بین زمان اختصاص یافته به کتاب و محتوای آن خواهد شد. روند کتاب نشان می‌دهد که ارزشیابی باید در خدمت آموزش باشد. در واقع ارزشیابی باید براساس اهداف کتاب باشد و نه موضوعاتی که احیاناً پیش از این، سال‌ها به‌صورت سنتی ارائه شده‌اند.

ارتباط بین ریاضیات مدرسه‌ای و محیط پیرامون و کاربردهای این دانش در زندگی روزمره، که به وضوح در اسناد بالا دستی مورد تأکید قرار گرفته است، به صورت تدریجی خود را در کتاب‌های درسی نشان می‌دهد. تلاش برای برقراری این ارتباط در تصاویر کتاب نیز قابل مشاهده است که امید است مورد توجه معلمان و دانش‌آموزان عزیز قرار گیرد.

اگر مهم‌ترین هدف آموزش ریاضی را پرورش تفکر ریاضی بدانیم، دیگر استفادهٔ افراطی از فرمول‌ها، الگوریتم‌ها، قواعد و دستورها بدون آگاهی از چگونگی و چرایی عملکرد آنها، جایگاهی در آموزش ریاضی مدرسه‌ای نخواهد داشت. فرصت حضور دانش‌آموز در کلاس درس را نباید به سادگی از دست داد. فرایندهایی مانند استدلال، تعمیم، حل مسئله، طرح مسئله و موضوعاتی نظیر مسائل باز پاسخ، بازنمایی‌های چندگانه و گفتمان ریاضی نقش مهمی در پرورش تفکر ریاضی دانش‌آموزان دارد.

مؤلفان از کلیهٔ امکانات موجود نظیر سامانهٔ اعتبارسنجی، وبگاه گروه ریاضی دفتر تألیف، پیام نگار(ایمیل)، دعوت از دبیران مجرّب برای حضور در جلسات نقد و بررسی کتاب و دیگر رسانه‌های در دسترس برای دریافت دیدگاه‌ها، نقدها و نظرات دبیران محترم سراسر کشور بهره گرفته‌اند. پاره‌ای از تصاویر و عکس‌های مورد استفاده در کتاب را نیز دبیران ریاضی استان‌های مختلف کشور به گروه ریاضی ارسال کرده‌اند که لازم است از زحمات تمامی عزیزان همراه تشکر و قدردانی شود. اعضای تیم تألیف به حضور و مشارکت جدی همکاران ارجمند در امر نقد و بررسی کتاب افتخار می‌کنند. امید که همچنان شاهد این تعامل و ارتباط مؤثر باشیم. گروه تألیف آمادگی دریافت نظرات و دیدگاه‌های تمامی همکاران و اساتید را از طریق رمزینه سریع پاسخ نظرسنجی کتاب‌های درسی دارد.

مؤلفان

نظرسنجی کتاب درسی

فصل ۱

جبر و معادله

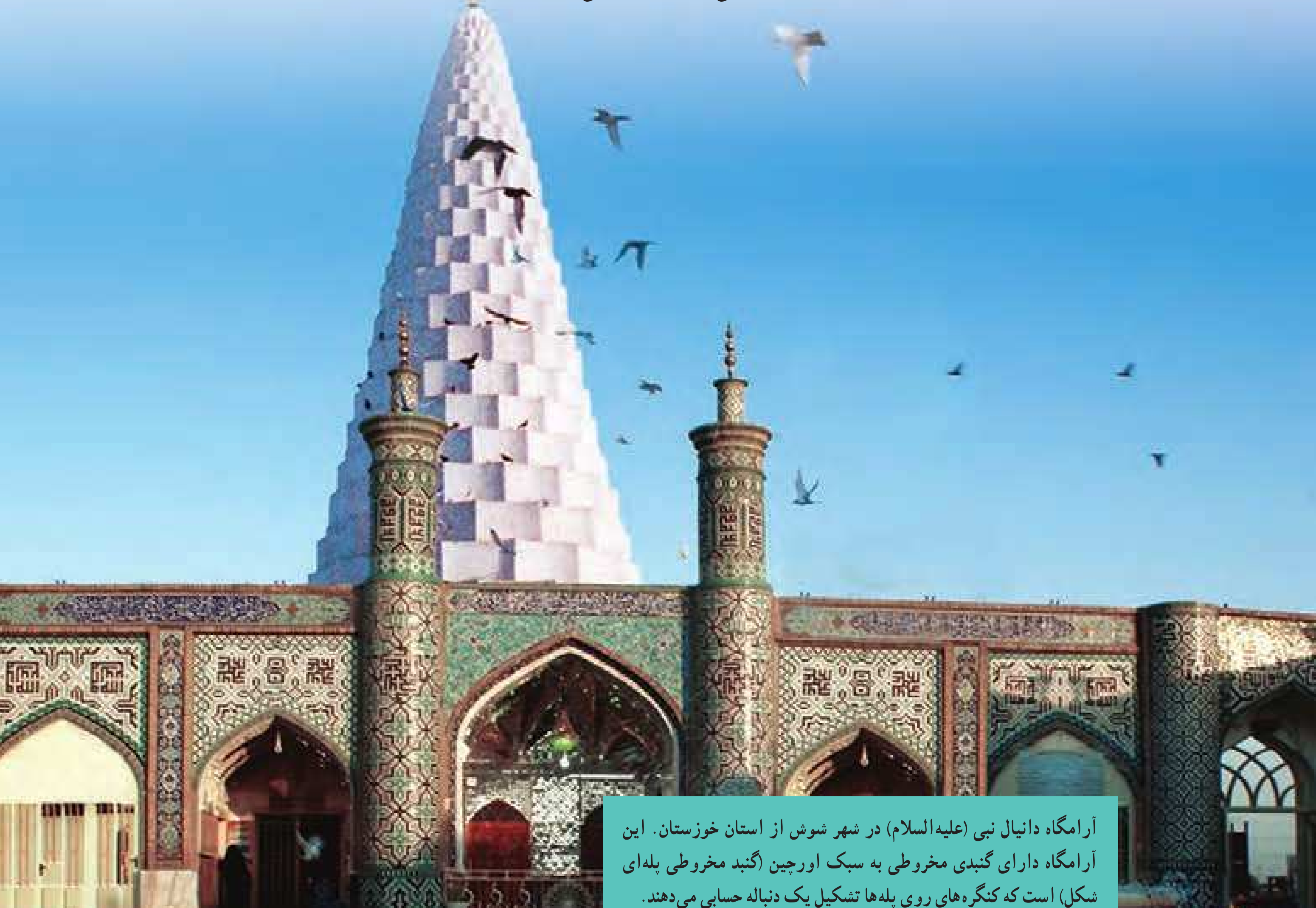
۱ مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

۲ معادلات درجه دوم

۳ معادلات گویا و گنگ

۴ قدر مطلق و ویژگی‌های آن

۵ آشنایی با هندسه تحلیلی



آرامگاه دانیال نبی (علیه‌السلام) در شهر شوش از استان خوزستان. این آرامگاه دارای گنبدی مخروطی به سبک اورچین (گنبد مخروطی پله‌ای شکل) است که کنگره‌های روی پله‌ها تشکیل یک دنباله حسابی می‌دهند.

درس ۱

مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی

در سال قبل با مفهوم دنباله و دنباله‌های حسابی و هندسی آشنا شدید و می‌دانید که مجموعهٔ اعداد طبیعی ... , ۳ , ۲ , ۱ یک دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت یک می‌باشد. چگونگی به‌دست آوردن مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n می‌تواند الگوی مناسبی باشد تا به یک دستور برای محاسبهٔ مجموع جملات هر دنبالهٔ حسابی برسیم.

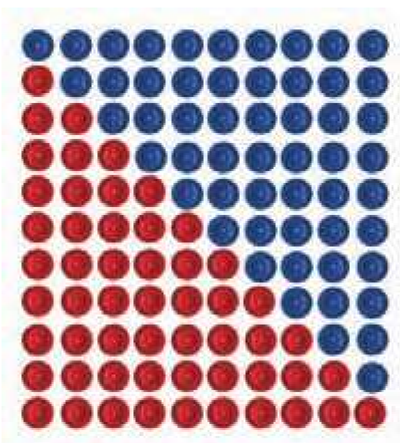
فعالیت

تعدادی دگمه داریم که به شکل روبه‌رو آرایش شده‌اند. تعداد این دگمه‌ها چندتاست؟

۱ یکی از راه‌ها، شمارش تعداد دگمه‌ها در هر ردیف است که مجموع آن برابر است با :

$$۱+۲+۳+۴+۵+۶+۷+۸+۹+۱۰=\cdots$$

۲ راه دیگر استفاده از شهود و تجسم، با استفاده از شکل پایین، است.



در این شکل تعداد ردیف‌ها ... و تعداد دگمه‌ها در هر ردیف ... است، پس تعداد کل دگمه‌ها برابر ... است و چون تعداد دگمه‌های آبی و قرمز برابر است پس :

$$\text{تعداد دگمه‌های قرمز} = \frac{\text{تعداد کل دگمه‌ها}}{۲} = \cdots\cdots$$

۳ برای محاسبهٔ مجموع اعداد طبیعی ۱ تا n مراحل زیر را انجام داده‌ایم. چگونگی هر مرحله را توضیح دهید.

$$S = ۱ + ۲ + ۳ + \ldots\ \ldots + (n-۱) + n$$

$$S = n + (n-۱) + \ldots + ۳ + ۲ + ۱$$

$$۲S = \underbrace{(n+۱)+(n+۱)+\ldots+(n+۱)+(n+۱)}_{n \text{ تا}}$$

$$۲S = n(n+۱)$$

$$S = \frac{n(n+۱)}{۲}$$

$$۱+۲+۳+.....+n=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

مثال : روی محیط دایره‌ای ۲۰ نقطه متمایز قرار دارد. از هر نقطه به نقاط دیگر وصل می‌کنیم. تعداد کل وترهای تشکیل شده را به‌دست آورید.

حل : نقطه اول را به هر یک از نقاط دیگر وصل می‌کنیم در این صورت ۱۹ وتر پدید می‌آید. با وصل نقطه دوم به نقاط دیگر (به‌غیر از نقطه اول) ۱۸ وتر به‌دست می‌آید. سپس نقطه سوم را به نقاط دیگر غیر از نقاط اول و دوم وصل می‌کنیم. ۱۷ وتر حاصل می‌شود. با ادامه این عمل تعداد وترهای حاصل برابر است با :

$$۱۹+۱۸+۱۷+...+۲+۱=\frac{۱۹}{۲}(۱+۱۹)=۱۹۰$$

تذکر : این مسئله را با استفاده از ترکیبیات نیز می‌توان حل کرد. آن را حل کرده و دو روش را با هم مقایسه کنید.

فعالیت

دنبالهٔ حسابی زیر را، که در آن a جمله اول، d قدر نسبت و n تعداد جملات آن است، در نظر بگیرید.

$$a\,,\,a+d\,,\,a+۲d\,,\,...\,,\,a+(n-۲)d\,,\,a+(n-۱)d$$

مجموع جملات این دنباله را S_n می‌نامیم و می‌نویسیم :

$$S_n=a+(a+d)+(a+۲d)+...+(a+(n-۲)d)+(a+(n-۱)d)$$

حال، جملات S_n را از آخر به اول بنویسید و با جمع جملات متناظر دو عبارت اخیر، $۲S_n$ را به‌دست آورید. نتیجه خواهید گرفت :

$$S_n=\frac{n}{۲}[۲a+(n-۱)d]$$

مثال : مجموع صد جملهٔ اول دنبالهٔ حسابی ......, ۱۵, ۱۱, ۷, ۳ را به‌دست آورید.

حل : جملهٔ اول ۳، تعداد جمله‌ها ۱۰۰ و قدرنسبت جملات ۴ است. با استفاده از فرمول مجموع جملات دنباله حسابی می‌توان نوشت :

$$S_{۱۰۰}=\frac{۱۰۰}{۲}\left[(۲\times۳)+(۹۹\times۴)\right]=۵۰\times۴۰۲=۲۰۱۰۰$$

خواندنی

در ریاضیات آنچه مهم است فکر کردن، استدلال کردن و نتیجه گرفتن است. ریاضیات راهی برای اندیشیدن و روشی برای استدلال و درست فکر کردن است. استدلال وسیله‌ای است که به کمک آن می‌توان از روی اطلاعاتی که داریم حقایقی را کشف کنیم. البته ریاضیات به تجربه و مشاهده نیز مربوط می‌شود، ولی قسمت اعظم آن همان اندیشیدن، استدلال کردن و نتیجه گرفتن است. زمانی‌که گاوس ریاضیدان آلمانی ده ساله بود، روزی معلم از دانش‌آموزان کلاس خواست مداد و کاغذ بردارند و حاصل جمع اعداد ۱ تا ۱۰۰ را به‌دست آورند. چند دقیقه نگذشته بود که معلم، گاوس را دید که به کار دیگری مشغول است. از او پرسید : چرا مسئله را حل نمی‌کنی؟ او جواب داد : حل شد! معلم با تعجب گفت : این غیر ممکن است. ولی گاوس گفت : خیلی هم آسان بود. سپس گفت : اول چنین نوشتم :

$$۱+۲+۳+...+۹۸+۹۹+۱۰۰$$

و بعد چنین :

$$۱۰۰+۹۹+۹۸+۹۷+...+۳+۲+۱$$

و جفت جفت از اول تا آخر جمع کردم :

$$۱۰۱+۱۰۱+۱۰۱+...+۱۰۱+۱۰۱+۱۰۱$$

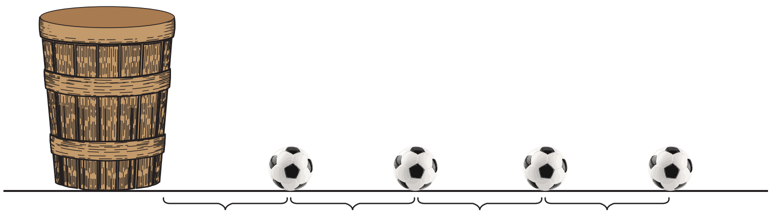
بدین ترتیب ۱۰۰ تا عدد ۱۰۱ به‌دست آوردم که حاصل‌ضرب آنها ۱۰۱۰۰ می‌شود و چون دو بار مجموع ۱ تا صد را حساب کردم عدد ۱۰۱۰۰ را بر دو تقسیم کردم و ۵۰۵۰ به دست آمد. بنابراین حاصل جمع اعداد ۱ تا ۱۰۰ برابر ۵۰۵۰ می‌شود.

کار در کلاس

۱ نشان دهید در یک دنباله حسابی اگر a_1 و a_n به ترتیب جملات اول و آخر باشند آنگاه : $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

۲ مجموع همهٔ عددهای طبیعی دو رقمی مضرب ۴ را به‌دست آورید.

مثال : در یک مسابقه تعداد بسیاری توپ روی یک خط مستقیم و هریک به فاصله ۳ متر از هم قرار دارند. فاصله توپ اول تا سبد نیز ۳ متر است (شکل زیر). دونده‌ای باید از کنار سبد شروع کرده توپ اول را بردارد و آن را تا سبد حمل کند و به سبد بیندازد، سپس به طرف توپ بعدی بدود و آن را بردارد و به داخل سبد بیندازد و این کار را ادامه دهد. اگر این دونده در پایان ۹۱۸ متر دویده باشد؛ حساب کنید او جمعاً چند توپ در سبد انداخته است؟



حل : دونده برای برداشتن توپ اول و قرار دادن آن در سبد باید مسافت ۶=۳+۳ متر را طی کند؛ برای توپ دوم نیز باید ۱۲متر و برای توپ سوم ۱۸ متر و ... طی کند. بنابراین مسافت‌های طی شده در این مراحل، تشکیل یک دنباله حسابی با جمله اول ۶ و قدر نسبت ۶ می‌دهد. اگر n تعداد توپ‌های انداخته شده در سبد باشد از فرمول مجموع جملات دنباله حسابی داریم :

$$S = \frac{n}{2}(2a + (n-1)d)$$

$$918 = \frac{n}{2}(12 + (n-1)6) \Rightarrow 306 = n(n+1) \Rightarrow 17 \times 18 = n(n+1) \Rightarrow n = 17$$

مجموع جملات دنباله هندسی

فعالیت

۱ قدر نسبت و مجموع n جملهٔ اول دنبالهٔ هندسی زیر را به‌دست آورید. $(a \neq 0)$

$$a, a, a, \dots, a$$

۲ دنباله هندسی زیر را در نظر بگیرید. $(q \neq 1)$

$$a, aq, aq^2, \dots$$

الف) جمله nام دنباله چیست؟

ب) فرض می‌کنیم مجموع n جملهٔ اولیه دنباله هندسی S_n باشد :

$$S_n = a + aq + aq^2 + \dots + aq^{n-2} + aq^{n-1}$$

طرفین رابطه را در q ضرب می‌کنیم :

$$S_n q = aq + aq^2 + \dots + aq^{n-1} + aq^n$$

اگر $S_n - S_n q$ را تشکیل دهیم، پس از ساده‌سازی، نتیجه می‌گیریم :

$$S_n = a\frac{1-q^n}{1-q}$$

کار در کلاس

مجموعه ۱۰ جملهٔ اول دنباله هندسی زیر را به دست آورید.

$$\frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \dots$$

مثال : توپی داریم که از هر ارتفاعی رها شود پس از زمین خوردن به اندازه یک چهارم ارتفاع قبلی خود بالا می‌رود. این توپ را از زمین به هوا پرتاب کرده‌ایم تا به ارتفاع ۱۰ متری برسد این توپ پس از چهار بار برخورد با زمین چه مسافتی را طی می‌کند؟

حل : ارتفاع توپ قبل از n امین برخورد با زمین را A_n می‌نامیم. داریم :

$$A_1 = 10\ ,\ A_2 = \frac{10}{4}\ ,\ A_3 = \frac{10}{16}\ ,\ \dots\ ,\ A_n = \frac{10}{4^{n-1}}$$

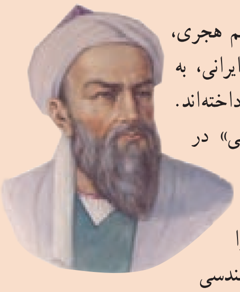
بنابراین مسافت طی شده توسط توپ بین هر دو برخورد متوالی توپ با زمین دنباله زیر را تشکیل می‌دهد.

$$20, \frac{20}{4}, \frac{20}{16}, \dots, \frac{20}{4^{n-1}}$$

دنباله فوق یک دنباله هندسی با مجموع $S_n = 20 \times \dfrac{1-(\frac{1}{4})^n}{1-\frac{1}{4}}$ داریم :

$$S_5 = 20 \times \frac{1-(\frac{1}{4})^5}{\frac{3}{4}} = \frac{80}{3}\left(1-(\tfrac{1}{4})^5\right) = \frac{80}{3}\left(1-\frac{1}{1024}\right) \simeq 26/64 \text{ متر}$$

خواندنی



در سده‌های چهارم و پنجم هجری، بسیاری از ریاضی‌دانان ایرانی، به بررسی دنباله‌های ریاضی پرداخته‌اند. از جمله «ابوریحان بیرونی» در کتاب خود «آثار الباقیه عن‌القرون الخالیه» مسئله معروف صفحه شطرنج را که در واقع یک دنباله هندسی است که جملهٔ اول آن واحد و تعداد جمله‌ها ۶۴ می‌باشد، حل کرده است. او با استدلال دقیق، مجموع جمله‌های این دنباله را عدد ۱۸۴۴۶۷۴۴۰۷۳۷۰۹۵۵۱۶۱۵ به‌دست آورده است. دربارهٔ صفحه شطرنج، داستانی وجود دارد؛ وقتی مخترع شطرنج، بازی خود را به شاه عرضه کرد، شاه از او خواست پاداشی بخواهد. دانشمند پاسخ داد : برای خانه اول شطرنج، یک دانه گندم به من بدهید و برای خانه دوم دو دانهٔ گندم و برای خانه سوم چهار دانهٔ گندم و همین طور برای هر خانه دو برابر خانهٔ پیش از آن گندم بدهید تا به خانه شصت و چهارم برسد. شاه با ساده‌لوحی فرمان داد یک کیسه گندم به این مرد بدهید. ولی او نپذیرفت و تقاضا کرد پس از محاسبهٔ دقیق، گندم را به او بدهند. قبول کردند و پس از محاسبه، عددی را که در بالا آوردیم پیدا کردند. سپس معلوم شد که اگر در تمام سطح کره زمین (یعنی هر جا که خشکی باشد) گندم بکارند این مقدار گندم به‌دست نمی‌آید! ابوریحان بیرونی با استدلال ریاضی به این نتیجه رسید که مقدار گندم‌ها برابر $2^{64}-1$ دانه است. او برای محسوس کردن این عدد می‌گوید : در سطح کره زمین ۲۳۰۵ کوه را در نظر می‌گیریم، اگر از هر کوه ۱۰۰۰۰ رود خارج شود در طول هر رودخانه ۱۰۰۰ قطار قاطر حرکت کنند. و هر قطار شامل ۱۰۰۰ قاطر باشد و همراه هر قاطر ۸ کیسه گندم قرار داده باشیم که در هر کیسه ۱۰۰۰۰ دانه گندم باشد، باز هم عدد همهٔ این گندم‌ها از تعداد گندم‌های صفحه شطرنج کوچک‌تر خواهد بود.

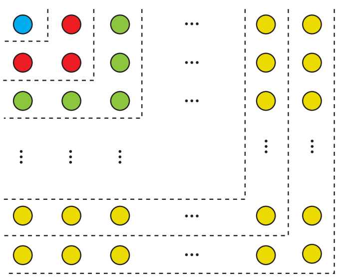
کار در کلاس

در داستان مخترع شطرنج اگر در خانه اول یک دانه گندم و در خانه دوم دو دانه گندم و به همین صورت در هر خانه دوبرابر خانه قبلی گندم قرار دهیم و اگر هر دانه گندم را یک گرم در نظر بگیریم :

الف) این جایزه چند گرم می‌شود؟[۱]

ب) نشان دهید جایزه او بیش از ۱۰۰۰ میلیارد تُن خواهد شد.

تمرین



۱ الف) به کمک شکل روبه‌رو حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$۱+۳+۵+\cdots+(۲n-۱)=$$

ب) اکنون با استفاده از فرمول درستی جواب خود در قسمت الف را بررسی کنید.

۲ مجموع همه اعداد طبیعی سه رقمی که مضرب شش هستند چقدر می‌شود؟

۳ در دنباله حسابی $\ldots, ۱۱, ۸, ۵$ حداقل چند جمله آن را با هم جمع کنیم تا حاصل آن از ۴۹۳ بیشتر شود؟

۴ در ۲۰ جمله اول یک دنباله حسابی مجموع جملات شماره‌های فرد ۱۳۵ و مجموع جملات شماره‌های زوج ۱۵۰ می‌باشد. جمله اول و قدر نسبت دنباله را مشخص کنید.

۵ جمله عمومی یک دنباله به‌صورت $a_n=۲^{n-۱}$ است. چند جمله از این دنباله را با هم جمع کنیم تا مجموع آنها برابر ۲۵۵ شود؟

۶ طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از مساحت مربع را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده از قبل را رنگ می‌کنیم. پس از دست کم چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟

۷ برای عدد حقیقی a $(a\neq ۱)$ و عدد طبیعی n ؛

الف) حاصل عبارت زیر را به‌دست آورید.

$$۱+a+a^۲+\cdots+a^{n-۱}$$

ب) با استفاده از قسمت الف نتیجه بگیرید که :

$$a^n-۱=(a-۱)(a^{n-۱}+\cdots+a^۲+a+۱)$$

۱ــ این مسئله به نام مسئله شطرنج معروف است و ابوریحان بیرونی با روش خاص خود آن را حل کرده است. (ترجمه میزان الحکمة، ص ۷۷)

درس ۲

معادلات درجه دوم

در سال‌های قبل با معادله‌های درجه اول و درجه دوم و حل آنها آشنا شده‌اید. صورت کلی معادلات درجه دوم به‌صورت $ax^2+bx+c=0$ است $(a\neq 0)$ که جواب‌های آن، در صورت وجود، از رابطهٔ $x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ به‌دست می‌آید. اینک، در این بخش، با برخی از انواع معادلات درجه دوم، روابط بین ریشه‌ها و ضرایب این معادلات و دیگر نکات تکمیلی آشنا خواهید شد.

کار در کلاس

۱ معادله $3x^2=5x-2$ را حل کنید.

۲ اگر $x=-1$ یک ریشهٔ معادله $4x^2-mx-7=0$ باشد، ریشه دیگر کدام است؟

پل پارک جزیره (اهواز ـ استان خوزستان)

روابط بین ضرایب و ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم

فعالیت

۱ جدول زیر را مطابق نمونه کامل کنید.

$\frac{c}{a}$	$\frac{-b}{a}$	c	b	a	ضرب ریشه‌ها (P)	جمع ریشه‌ها (S)	مقدار هر ریشه $x_۱$ و $x_۲$		$ax^۲+bx+c=۰$
									$۳x^۲-۵x+۲=۰$
$\frac{-۷}{۴}$	$-$	-۷	-۳	۴	$\frac{-۷}{۴}$	$\frac{۳}{۴}$	$\frac{۷}{۴}$	-۱	$۴x^۲-۳x-۷=۰$
								۱	$x^۲-۲x+۱=۰$
							$\frac{۴}{۵}$		$۵x^۲+۶x-۸=۰$

۲ الف) در جدول بالا بین جمع ریشه‌ها و ضرایب هر معادله چه ارتباطی مشاهده می‌کنید؟

ب) در جدول بالا بین حاصل‌ضرب ریشه‌ها و ضرایب معادله چه ارتباطی وجود دارد؟

۳ اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌ها و S و P به ترتیب حاصل جمع و حاصل‌ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، نشان دهید:

$$S=x_۱+x_۲=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}+\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\dots=\frac{-b}{a}$$

$$P=x_۱\,x_۲=(\qquad\qquad)(\qquad\qquad)=\qquad\qquad=\frac{c}{a}$$

به‌طور کلی در هر معادله درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ اگر جمع ریشه‌ها S و ضرب ریشه‌ها P باشد این روابط برقرار است.

$$S=\frac{-b}{a}\ ,\ P=\frac{c}{a}$$

مثال: اگر $x=-۱$ یک ریشهٔ معادلهٔ $۴x^۲-mx-۷=۰$ باشد ریشه دیگر و مقدار m را با استفاده از روابط بین ضرایب و ریشه‌ها به‌دست آورید.

حل: اگر $x_۱$ و $x_۲$ ریشه‌های این معادله باشند، داریم:

$$P=x_۱x_۲=\frac{c}{a}\Rightarrow(-۱)x_۲=\frac{-۷}{۴}\Rightarrow x_۲=\frac{۷}{۴}$$

از طرفی با استفاده از جمع ریشه‌ها داریم:

$$S=x_۱+x_۲=\frac{-b}{a}\Rightarrow -۱+\frac{۷}{۴}=\frac{m}{۴}\Rightarrow m=۳$$

فعالیت

۱ برای تشکیل معادله درجه دومی که ریشه‌های آن ۲ و ۳- باشند راه حل زیر ارائه شده است.
مراحل حل را توضیح دهید.

$$\begin{cases} x = ۲ \\ x = -۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - ۲ = ۰ \\ x + ۳ = ۰ \end{cases} \Rightarrow (x - ۲)(x + ۳) = ۰ \Rightarrow x^۲ + x - ۶ = ۰$$

۲ اگر $x_۱ = \alpha$ و $x_۲ = \beta$ ریشه‌های یک معادله درجه دوم باشند، با استفاده از روش قسمت قبل معادله را مشخص کنید.

به‌طور کلی اگر α و β دو عدد دلخواه و $S = \alpha + \beta$ و $P = \alpha\beta$ باشند، آنگاه α و β جواب‌های معادله $x^۲ - Sx + P = ۰$ هستند.

کار در کلاس

معادله درجه دومی تشکیل دهید که ریشه‌های آن $۲ + \sqrt{۳}$ و $۲ - \sqrt{۳}$ باشند.

مثال : محیط یک مستطیل ۳۳ سانتی‌متر و مساحت آن ۶۵ سانتی‌متر مربع است. ابعاد مستطیل را به‌دست آورید.

حل : فرض کنید طول و عرض مستطیل به ترتیب $x_۱$ و $x_۲$ باشند، داریم :

$$x_۱ + x_۲ = \frac{۳۳}{۲} \quad , \quad x_۱ x_۲ = ۶۵$$

معادله درجه دومی تشکیل می‌دهیم که در آن $S = \frac{۳۳}{۲}$ و $P = ۶۵$ باشد و آن را حل می‌کنیم.

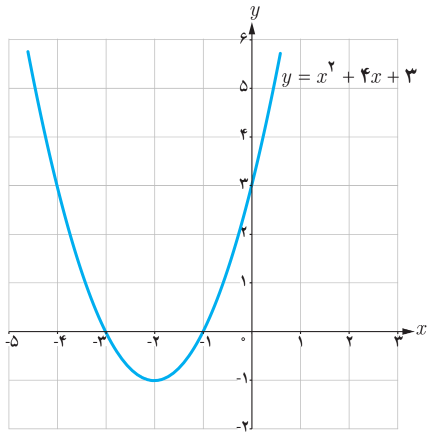
$$x^۲ - Sx + P = ۰ \Rightarrow x^۲ - \frac{۳۳}{۲}x + ۶۵ = ۰ \Rightarrow ۲x^۲ - ۳۳x + ۱۳۰ = ۰$$

از حل معادله اخیر $x_۱ = ۱۰$ یا $x_۲ = \frac{۱۳}{۲}$ به‌دست می‌آید؛ در نتیجه، طول و عرض مستطیل به‌ترتیب ۱۰ و $\frac{۱۳}{۲}$ خواهد بود.

صفرهای تابع

فعالیت

نمودار تابع f با ضابطه $f(x)=x^۲+۴x+۳$ در شکل روبه‌رو رسم شده است.



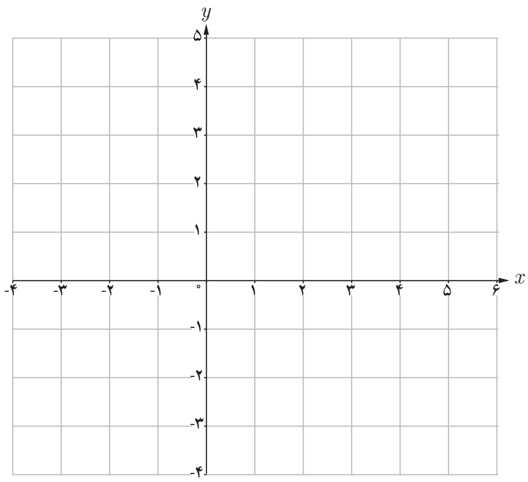
۱ معادله $f(x)=۰$ را حل کنید و جواب‌های آن را به‌دست آورید.

۲ محل تلاقی نمودار تابع f با محور طول‌ها چه رابطه‌ای با جواب‌های معادله $f(x)=۰$ دارد؟

صفرهای تابع

برای هر تابع f جواب‌های معادلهٔ $f(x)=۰$ را (در صورت وجود) صفرهای تابع f می‌نامیم. به عبارت دیگر، صفرهای تابع f آن مقادیری از x (در دامنه f) هستند که به ازای آنها $f(x)$ برابر صفر می‌شود. اگر نمودار $f(x)$ را رسم کنیم صفرهای f طول نقاط تلاقی نمودار با محور xهاست.

کاردرکلاس



۱ نمودار سهمی‌های $f(x)=x^۲-۲x+۱$ و $g(x)=x^۲+۱$ را رسم کنید.

۲ با توجه به نمودارهایی که رسم کردید در مورد جواب‌های معادله‌های $f(x)=۰$ و $g(x)=۰$ چه می‌توان گفت؟

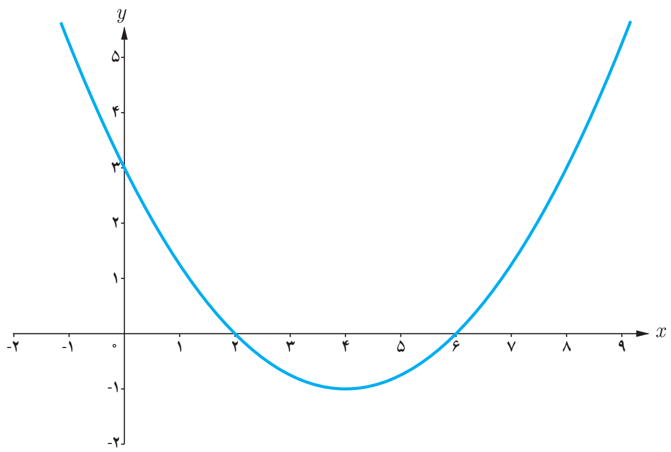
مثال : اگر x' و x'' صفرهای تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ باشند نشان دهید

$$ax^2 + bx + c = a(x - x')(x - x'')$$

حل : از آنجا که x' و x'' صفرهای تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ هستند پس جواب‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ هستند و داریم :

$$a(x - x')(x - x'') = a(x^2 - (x' + x'')x + x'x'')$$
$$= a(x^2 - Sx + p)$$
$$= a[x^2 - (\frac{-b}{a})x + \frac{c}{a}]$$
$$= ax^2 + bx + c$$

مثال : اگر نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ به‌صورت زیر باشد ضابطه سهمی را مشخص کنید.



روش اول : از آنجا که $x' = 2$ و $x'' = 6$ صفرهای تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ هستند با استفاده از رابطه‌ای که درمثال قبل آمده است می توان نوشت :

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - 2)(x - 6)$$

می‌دانیم نمودار تابع از نقطه $(0, 3)$ می گذرد پس مختصات این نقطه در ضابطهٔ تابع صدق می کند و داریم.

$$3 = a(0 - 2)(0 - 6) \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

معادله سهمی به‌صورت $y = \frac{1}{4}(x - 2)(x - 6)$ می‌باشد که پس از ساده‌سازی به‌صورت $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$ نوشته می‌شود.

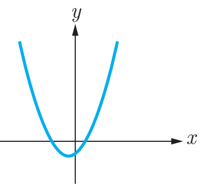
روش دوم : از آنجا که $f(0) = 3$ می‌توان نوشت $f(x) = ax^2 + bx + 3$ ؛ حال از روابط بین صفرهای تابع استفاده می‌کنیم.

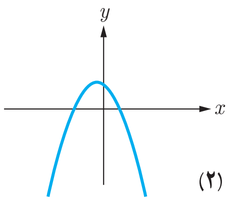
$$\frac{c}{a} = 12 \Rightarrow \frac{3}{a} = 12 \Rightarrow a = \frac{1}{4}$$

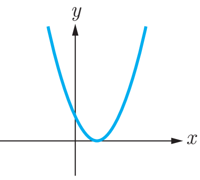
از طرفی از آنجا که $\frac{-b}{a} = 8$ و $a = \frac{1}{4}$ پس $b = -2$ و در نتیجه $y = \frac{1}{4}x^2 - 2x + 3$

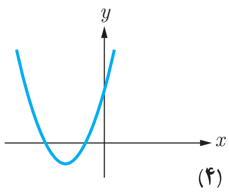
کار در کلاس

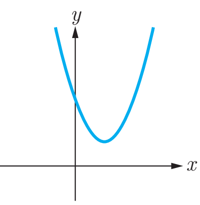
هر یک از شکل‌های زیر نمودار یک سهمی به معادلهٔ کلی $f(x)=ax^2+bx+c$ است.

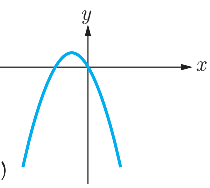

(۱)

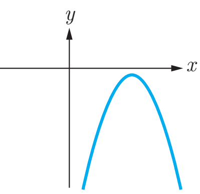

(۲)

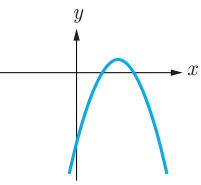

(۳)

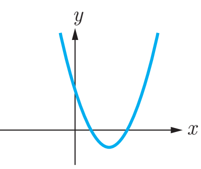

(۴)


(۵)


(۶)


(۷)


(۸)


(۹)

۱ با توجه به معادله $f(x)=0$ نمودار یا نمودارهای متناظر با هر یک از ویژگی‌های زیر را مشخص کنید.

الف) دو ریشهٔ متمایز مثبت دارد. (**شکل‌های ۸ و ۹**)

ب) دو ریشهٔ منفی دارد. (   )

پ) یک ریشهٔ مثبت و یک ریشهٔ منفی دارد. (   )

ت) ریشه ندارد. (   )

ث) ریشه ندارد و دارای ماکزیمم است. (   )

ج) یک ریشه مضاعف دارد. (   )

چ) حاصل جمع ریشه‌های متمایز مثبت است. (   )

ح) حاصل جمع ریشه‌ها منفی است. (   )

۲ با توجه به نمودارهای داده شده مقابل، جدول زیر را مانند نمونه کامل کنید.

ویژگی / شماره شکل	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
تعداد صفر f	۲				۰				
علامت a	+				+			−	
علامت b	+				−	−			
علامت c	−				+		−		

تذکر: ستون نظیر شکل پنجم را با توجه به استدلال زیر کامل کرده‌ایم. از آنجا که منحنی سهمی محور xها را قطع نکرده است پس تعداد صفرهای تابع متناظر آن صفر خواهد بود؛ و چون شاخه‌های منحنی به سمت بالا هستند علامت a مثبت است. از آنجا که منحنی، محور yها را در نقطه با عرض مثبت قطع می‌کند پس $c>0$ و طول نقطه مینیمم تابع، مقداری مثبت است. پس $\frac{-b}{2a}>0$ و از مثبت بودن a و رابطه اخیر نتیجه می‌شود $b<0$.

مثال : اگر $x=۲$ یکی از صفرهای تابع $p(x)=x^۳-x^۲-۴x+۴$ باشد سایر صفرهای تابع را در صورت وجود بیابید.

حل : از آنجا که $x=۲$ یک صفر تابع $p(x)$ است می‌توان نشان داد که $p(x)$ عاملی به‌صورت $x-۲$ دارد، پس با تقسیم $p(x)$ بر $x-۲$ عامل دیگر $p(x)$ را می‌یابیم.
می‌توان نوشت $p(x)=(x-۲)\,(x^۲+x-۲)$. آنگاه از حل معادله $p(x)=۰$ داریم :

$$\begin{array}{l|l} x^۳-x^۲-۴x+۴ & x-۲ \\ \cline{2-2} -\quad - & x^۲+x-۲ \\ \underline{x^۳-۲x^۲} & \\ x^۲-۴x & \\ -\quad - & \\ \underline{x^۲-۲x} & \\ -۲x+۴ & \\ -\quad - & \\ \underline{-۲x+۴} & \\ ۰ & \end{array}$$

$$\begin{cases} x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \\ x^۲+x-۲=۰ \Rightarrow \begin{cases} x=-۲ \\ x=۱ \end{cases} \end{cases}$$

صفرهای تابع p برابر -۲ , ۲ , ۱ می‌باشند.

کار در کلاس

مقدار k را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع $f(x)=x^۳+kx^۲-x-۲$ برابر (-۲) باشد، سپس صفرهای دیگر تابع را به‌دست آورید.

مثال : صفرهای تابع f با ضابطه $f(x)=(x^۲-۱)^۲+(x^۲-۱)-۲$ را به‌دست آورید.

حل : هر چند معادله $f(x)=۰$ از درجهٔ چهار است امّا می‌توان با یک تغییر متغیر مناسب آن را به یک معادله درجه دوم تبدیل کرد. با فرض $t=x^۲-۱$، معادله به‌صورت $t^۲+t-۲=۰$ در می‌آید. اکنون با حل این معادله و یافتن t با استفاده از عبارت $t=x^۲-۱$ مقادیر x را می‌یابیم.

$$t^۲+t-۲=۰ \Rightarrow t=۱ \text{ یا } t=-۲$$

$$\begin{cases} t=۱ \Rightarrow x^۲-۱=۱ \Rightarrow x=\pm\sqrt{۲} \\ t=-۲ \Rightarrow x^۲-۱=-۲ \Rightarrow x^۲=-۱ \quad \text{غیرقابل قبول} \end{cases}$$

پس تنها صفرهای قابل قبول برای تابع f، $\sqrt{۲}$ و $-\sqrt{۲}$ می‌باشد.

برخی از معادلات را می‌توان با یک تغییر متغیر مناسب، به یکی از انواع معادلاتی که می‌شناسیم تبدیل کرد و پس از حل آن و با رجوع به تغییرِ متغیر، مقادیر مجهول اصلی معادله اولیه را یافت.

کار در کلاس

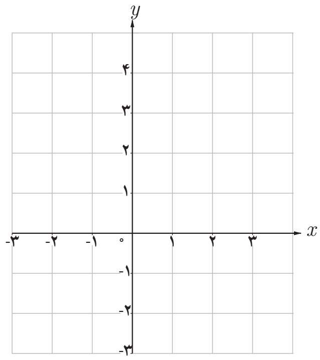
همهٔ صفرهای تابع $f(x)=x^۴-۱۰x^۲+۱۶$ را به‌دست آورید.

روش هندسی حل معادلات

فعالیت

۱ معادله $\frac{۱}{۲}x+۱=(x-۱)^۲$ را حل کنید.

۲ نمودار دو تابع $y=(x-۱)^۲$ و $y=\frac{۱}{۲}x+۱$ را رسم کنید.

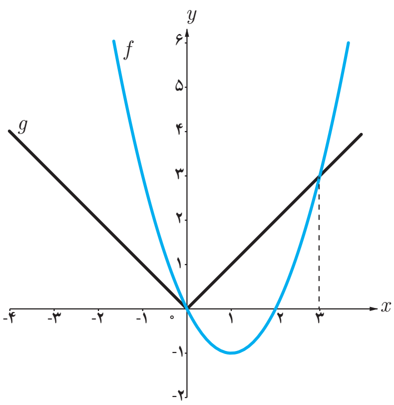


۳ چه ارتباطی بین ریشه‌های معادله $\frac{۱}{۲}x+۱=(x-۱)^۲$ و طول‌های نقاط تلاقی نمودارها وجود دارد؟

اگر $f(x)$ و $g(x)$ دو تابع باشند، طول نقاط تلاقی نمودارهای این دو تابع جواب‌های معادله $f(x)=g(x)$ است و برعکس، هر جواب این معادله طول یکی از نقاط تلاقی این دو نمودار است.
این روش حل معادله را، که از طریق آن تعداد جواب‌ها و مقدار تقریبی (و گاهی دقیق) جواب‌ها قابل تشخیص است، **روش هندسی (نموداری) حل معادلات** می‌نامیم.

مثال : به روش هندسی معادله $|x|=x^۲-۲x$ را حل کنید.

حل : با فرض $f(x)=x^۲-۲x$ و $g(x)=|x|$، نمودار این دو تابع را رسم می‌کنیم :



با توجه به نمودارهای دو تابع طول نقاط تلاقی دو نمودار عبارت‌اند از : $x=۰$, $x=۳$
که جواب‌های معادله $|x|=x^۲-۲x$ می‌باشند.

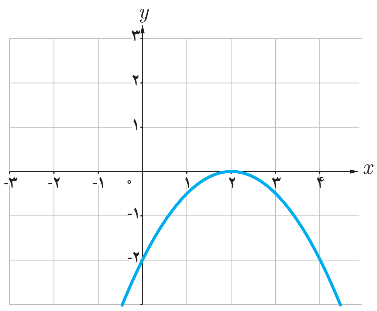
تمرین

۱ معادلهٔ درجه دومی بنویسید که :

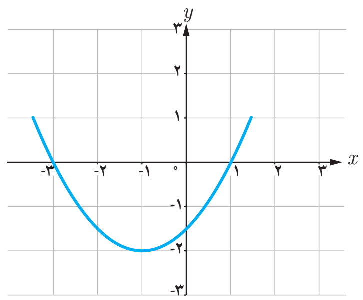
الف) ریشه‌های آن $\frac{۱}{۳}$ و $\frac{۲}{۳}$ باشند.

ب) یکی از ریشه‌های آن دو برابر دیگری باشد (مسئله چند جواب دارد؟).

۲ در هر یک از شکل‌های زیر نمودار سهمی $P(x) = ax^۲+ bx +c$ داده شده است. در هر حالت صفرهای تابع $P(x)$ و ضابطه آن را مشخص کنید.



(الف)

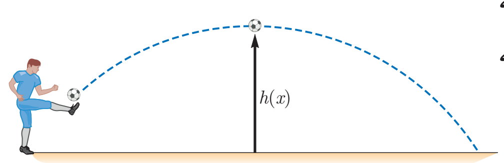


(ب)

۳ یک توپ فوتبال بر اثر ضربه بازیکن طبق شکل روبه‌رو حرکت می‌کند تا دوباره به زمین بخورد. در هر لحظه ارتفاع توپ از سطح زمین را می‌توانیم با رابطهٔ $h(x)=-۰/۰۳x(x-۳۶)$ مدل‌سازی کنیم که x فاصله افقی توپ از نقطه اولیه است (x برحسب متر است)

الف) توپ چند متر افقی را طی می‌کند تا دوباره به زمین بخورد.

ب) توپ حداکثر تا چه ارتفاعی بالا می‌رود.



۴ صفرهای توابع زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

الف) $f(x) = x^۳-۴x$

ب) $g(x) = ۲x^۳ +x^۲ + ۳x$

پ) $h(x) = x^۴ + ۳x^۲+ ۵$

۵ معادلات زیر را حل کنید.

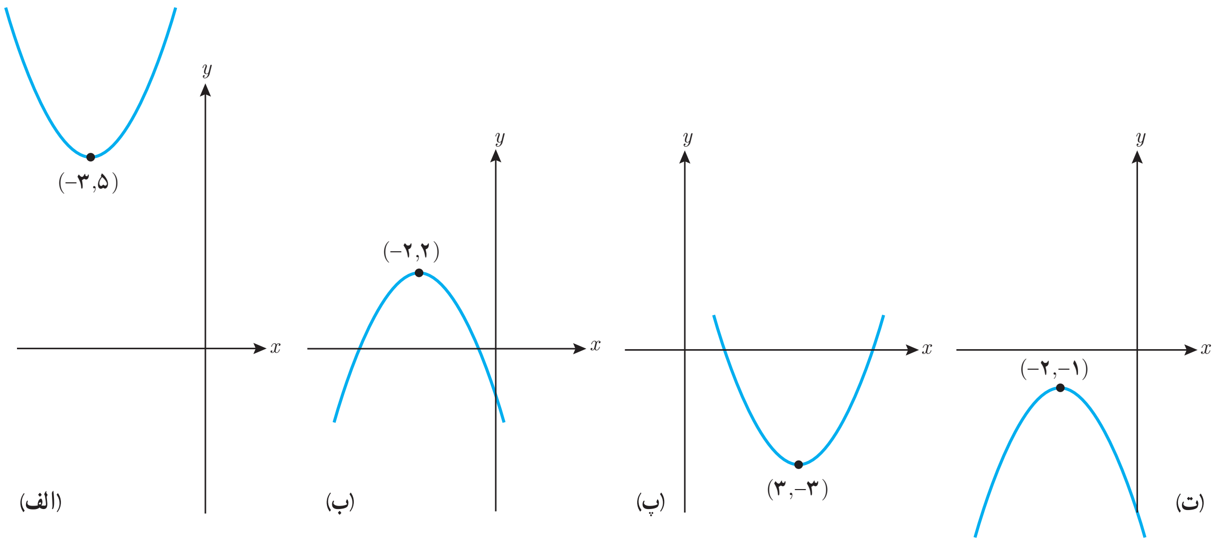
الف) $x^۴- ۳x^۲- ۴ =۰$

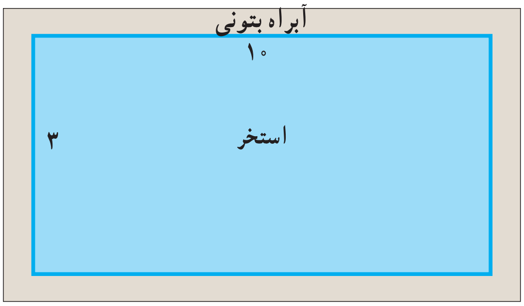
ب) $(\frac{x^۲}{۳}-۲)^۲ -۷(\frac{x^۲}{۳}-۲)+۶ =۰$

پ) $(۴-x^۲)^۲- (۴-x^۲) =۱۲$

۶ تعداد و مقدار تقریبی ریشه‌های معادله $|x-1| = x^2 - x - 1$ را با استفاده از روش هندسی به‌دست آورید.

۷ هر یک از سهمی‌های زیر نمودار حالتی از تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ است که در آن $|a| = 1$ است و نقطهٔ رأس سهمی نیز داده شده است. صفرهای تابع را در صورت وجود به‌دست آورید و ضابطهٔ تابع را مشخص کنید.





۸ یک استخر مستطیل شکل به ابعاد طول ۱۰ و عرض ۳ متر داریم که یک آبراه بتونی در اطرافش است. اگر این آبراه دارای پهنای یکسان و مساحت ۱۴ مترمربع باشد، پهنای آن را محاسبه کنید.

۹ طول یک نوع کاشی یک سانتی‌متر بلندتر از چهار برابر عرض آن است. برای پوشانیدن دیواری به مساحت ۵۲/۸ مترمربع تعداد دو هزار کاشی مصرف شده است. طول هر کاشی چند سانتی‌متر است؟

درس ۳

معادلات گویا و گنگ

معادلاتِ شامل عبارات گویا

حل یک مسئله

در یک مغازهٔ ماهی‌های تزیینی، ماهی‌های آب شور در محلول‌های آب‌نمک ۷ درصدی نگهداری می‌شوند. یک کارگر مبتدی ۲۰۰ کیلوگرم محلول آب‌نمک ۴ درصدی ساخته است. او چگونه باید این محلول را به غلظت مورد نظر برساند؟

برای حل این مسئله سه حالت مختلف فرض می‌کنیم. ممکن است نمک به اندازهٔ کافی وجود داشته باشد و یا نمک در مغازه موجود نباشد و یا نمک به میزان کافی وجود نداشته باشد. در هر حالت می‌توان مسئله را مورد بررسی قرار داد.

حالت اول : فرض کنیم نمک به اندازهٔ کافی موجود باشد.

ابتدا تعیین می‌کنیم در محلول ۴ درصدی چند کیلوگرم نمک وجود دارد : $۲۰۰\times\frac{۴}{۱۰۰}=۸$ کیلوگرم

حالا اگر بخواهیم برای رساندن این محلول به محلول ۷ درصدی x کیلوگرم نمک به محلول بیفزاییم، وزن نمک $x+۸$ و وزن کل محلول $x+۲۰۰$ و نسبت میزان نمک موجود به کل محلول برابر $\frac{۸+x}{۲۰۰+x}$ خواهد بود. از آنجا که این نسبت باید ۷ درصد باشد تناسب زیر برقرار خواهد بود :

$$\frac{x+۸}{۲۰۰+x}=\frac{۷}{۱۰۰}$$

برای حل این معادله که شامل عبارت گویا است، طرفین معادله را در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها یعنی $۱۰۰(۲۰۰+x)$ ضرب می‌کنیم.

$$۱۰۰(x+۸)=۷(۲۰۰+x)$$

از حل این معادله خواهیم داشت : $۹۳x=۶۰۰$ و در نتیجه $x=\frac{۶۰۰}{۹۳}$

بنابراین تقریباً ۶ کیلو و ۴۵۱ گرم نمک باید به محلول اضافه شود تا محلول ۷ درصد نمک به‌دست آید.

حالت دوم : اگر نمک در مغازه موجود نباشد.

در این حالت باید y کیلوگرم از آب محلول را تبخیر کنیم تا درصد نمک محلول خودبه‌خود به ۷ برسد. واضح است که میزان نمک محلول کم نخواهد شد. در این حالت معادله مورد نظر به‌صورت زیر خواهد بود. (چرا؟)

$$\frac{۸}{۲۰۰-y}=\frac{۷}{۱۰۰}$$

از حل این معادله خواهیم داشت $۷(۲۰۰-y)=۸۰۰$ و از آنجا $y=\frac{۶۰۰}{۷}$ و این بدین معنی است که کارگر باید با تبخیر ۸۵ کیلو و ۷۱۴ گرم از آب محلول به غلظت مورد نظر برسد.

کار در کلاس

در مسئله ماهی‌های تزیینی حالت سومی هم وجود داشت که نمک به اندازهٔ کافی موجود نباشد. فرض کنیم در مغازه فقط ۵ کیلوگرم نمک موجود باشد و کارگر ناچار است همان را به محلول بیفزاید. چند کیلوگرم از آب محلول را باید تبخیر کند تا به محلول ۷ درصدی نمک مورد نظر برسد؟

برای حل معادلاتِ شامل عبارات گویا، با ضرب طرفین معادله در کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج کسرها و ساده کردن عبارت جبری به‌دست آمده معادله را حل می‌کنیم. جواب به‌دست آمده نباید مخرج هیچ یک از کسرها را صفر کند (چرا؟)

همچنین ممکن است برخی از جواب‌ها با شرایط مسئله در محیط پیرامونی مطابقت نداشته باشند که این جواب‌ها نیز مورد قبول نیستند.

مثال : معادله $\frac{۴x-۴}{x^۲-۴}=\frac{۲}{x}+\frac{۳}{x+۲}$ را حل کنید.

حل : کوچک‌ترین مضرب مشترک مخرج‌ها برابر $x(x^۲-۴)$ است. (چرا؟)

با ضرب طرفین معادله در این عبارت داریم :

$$۳x(x-۲)+۲(x^۲-۴)=x(۴x-۴)$$

$$۳x^۲-۶x+۲x^۲-۸=۴x^۲-۴x$$

$$x^۲-۲x-۸=۰ \Rightarrow (x-۴)(x+۲)=۰ \Rightarrow x=۴ \text{ یا } x=-۲$$

البته جواب $x=-۲$ مورد قبول نیست. (چرا؟)

کار در کلاس

۱ معادله $\frac{۲}{x-۲}+\frac{۱}{(x-۲)^{۲}}=۳$ را حل کنید.

۲ اگر در یک مستطیل با طول L و عرض w داشته باشیم : $\frac{L}{w}=\frac{w+L}{L}$

آنگاه می‌گوییم در این مستطیل نسبت طلایی برقرار است.

اگر محیط یک زمین ورزشی مستطیل شکل، برابر ۱۴۴ متر و اندازه طول و عرض آن متناسب با نسبت طلایی باشد، طول و عرض زمین چقدر است؟

خواندنی

در ریاضیات هنگامی نسبت طلایی پدید می‌آید که نسبت بخش بزرگ‌تر به بخش کوچک‌تر برابر نسبت مجموع دو بخش به بخش بزرگ‌تر باشد.

مصریان سال‌ها قبل از میلاد از این نسبت آگاه بودند و آن را در ساخت اهرام رعایت کرده‌اند. بسیاری از الگوهای طبیعی در بدن انسان نیز این نسبت را دارا هستند.

روان‌شناسان بر این باورند که زیباترین مستطیل به چشم انسان مستطیلی است که نسبت طول به عرض آن برابر عدد طلایی باشد. دلیل این امر آن است که این نسبت در شبکه چشم انسان رعایت شده و هر مستطیلی که این نسبت را دارا باشد به چشم زیبا می‌آید.

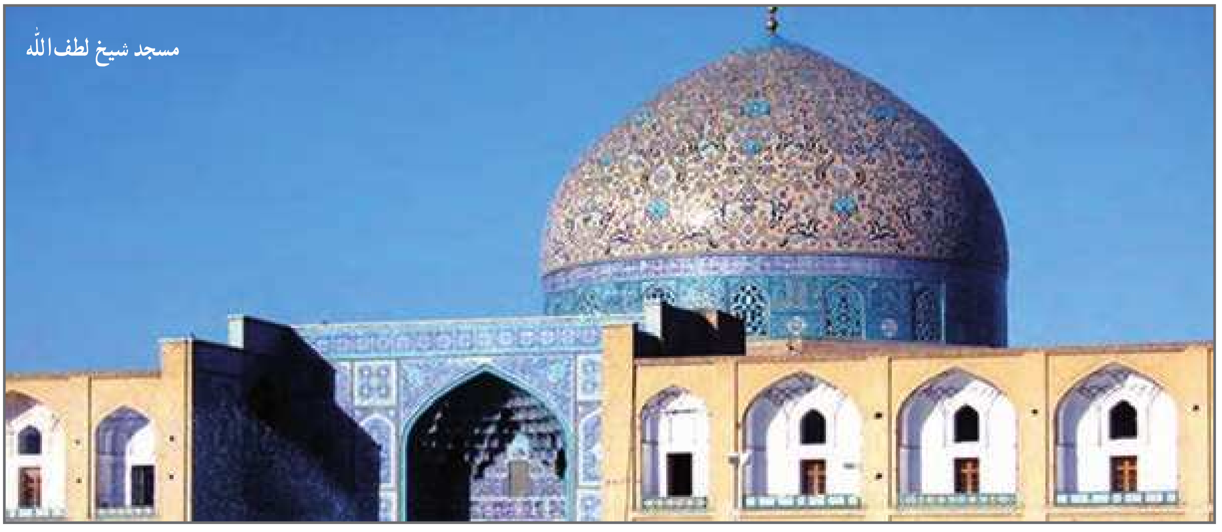
در ساخت برج میدان آزادی تهران به ارتفاع ۶۲ و عرض ۴۲ متر نسبت طلایی تا حد زیادی رعایت شده است.

کتیبهٔ بیستون از دوره هخامنشی در کرمانشاه به طول ۵ و عرض ۳ متر به عدد طلایی نزدیک است.

یکی از هنرهای معماری در تخت جمشید این است که ارتفاع سردرها به عرض آنها و همین‌طور نسبت ارتفاع ستون‌ها به فاصله بین دو ستون نسبت طلایی است.

در پل ورسک، ارگ بم، مقبره ابن‌سینا، میدان نقش جهان، مسجد شیخ لطف‌اللّه و خوشنویسی میرعماد حسنی از نسبت طلایی استفاده شده است. با جست‌وجوی اینترنتی به مطالب خواندنی در این زمینه دست می‌یابید.

منبع : مبانی هنرهای تجسمی، قسمت اول، شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران، ۱۳۸۲

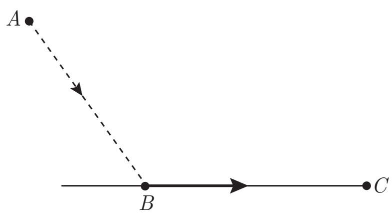


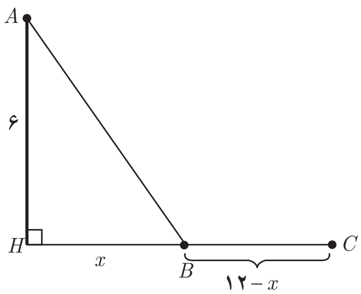
مسجد شیخ لطف‌اللّه

معادلات شامل عبارت‌های گنگ

طرح یک مسئله

معمولاً مرغ‌های دریایی، برای شکار ماهی‌ها، بخشی از مسیر خود را در هوا و بخشی را به موازات سطح آب طی می‌کنند. یک مرغ دریایی در نقطه A به ارتفاع ۶ متر از سطح آب قرار دارد. فاصله تصویر مرغ روی آب از ماهی که در نقطه C قرار دارد ۱۲ متر است. مرغ ابتدا از نقطه A به نقطه B می‌آید سپس در سطح آب از B به C می‌رود و ماهی را شکار می‌کند. اگر مرغ دریایی برای طی هر متر در هوا ۱۴ کیلوکالری و برای طی هر متر در سطح آب ۱۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند، نقطه B در چه فاصله‌ای از C باید باشد تا مرغ دریایی روی هم ۱۸۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند؟





حل : برای درک بهتر صورت‌مسئله شکل روبه‌رو را رسم می‌کنیم. فاصلهٔ B از تصویر مرغ بر روی آب (H) را x می‌گیریم در نتیجه فاصله میان B و C برابر $۱۲-x$ می‌شود. با استفاده از رابطه فیثاغورس طول AB برابر $\sqrt{۳۶+x^۲}$ می‌شود.

میزان انرژی مصرف شده توسط مرغ دریایی برابر است با : $۱۴\sqrt{۳۶+x^۲}+۱۰(۱۲-x)$

برای آنکه مرغ دریایی روی هم ۱۸۰ کیلوکالری انرژی مصرف کند باید داشته باشیم :

$$۱۴\sqrt{۳۶+x^۲}+۱۲۰-۱۰x=۱۸۰ \Rightarrow ۱۴\sqrt{۳۶+x^۲}=۱۰x+۶۰$$
$$۷\sqrt{۳۶+x^۲}=۵x+۳۰$$

با به توان دو رساندن طرفین معادله اخیر و ساده کردن به معادله درجه دوم $۲x^۲-۲۵x+۷۲=۰$ می‌رسیم که از آنجا $x=۸$ یا $x=۴/۵$. در این‌صورت فاصلهٔ B تا C برابر ۴=۸−۱۲ یا ۷/۵ = ۴/۵− ۱۲ خواهد بود.

اگر مرغ دریایی مستقیماً از A به C پرواز می‌کرد چقدر کالری مصرف می‌کرد؟

آیا اقدام مرغ دریایی برای شکار ماهی‌ها هوشمندانه نمی‌باشد؟!

برخی از معادلات که دارای عبارت‌های رادیکالی از مجهول هستند را معادلات گنگ می‌نامند. برای حل آنها با به توان رساندن طرفین معادله (و در صورت لزوم تکرار این عمل) و ساده کردن به معادله‌ای بدون رادیکال می‌رسیم که آن را حل می‌کنیم. جواب‌های به‌دست آمده باید در معادله اصلی آزمایش شوند، زیرا عملیات توان‌رسانی ممکن است جواب‌های اضافی تولید کند.

مثال : معادله $\sqrt{x+۲}=x-۴$ را حل کنید.

حل :

$$(\sqrt{x+۲})^۲=(x-۴)^۲$$
$$x+۲=x^۲-۸x+۱۶$$
$$x^۲-۹x+۱۴=۰$$
$$(x-۲)(x-۷)=۰ \Rightarrow x=۲ \text{ و } x=۷$$

آزمایش جواب‌ها

$$x_۲=۷ : \sqrt{۷+۲}\overset{?}{=}۷-۴$$
$$۳=۳ \quad \checkmark$$

جواب معادله است

$$x_۱=۲ : \sqrt{۲+۲}\overset{?}{=}۲-۴$$
$$۲\neq-۲ \quad \times$$

جواب مسئله نیست

بنابراین $x=۷$ تنها جواب معادله است.

تذکر : در حل این مسئله طرفین معادله اولیه نامنفی بودند و به توان دو رساندن آنها مشکلی ایجاد نمی‌کرد. در حل معادلات گنگ می‌توان با تعیین دامنه تعریف معادله، جواب‌های نهایی را با استفاده از آن مورد بررسی قرار داد. در حل این مسئله برای به‌دست آوردن دامنه تعریف داریم :

$$\begin{cases} x+۲\geq۰ \Rightarrow x\geq-۲ \\ x-۴\geq۰ \Rightarrow x\geq۴ \end{cases} \xrightarrow{\text{اشتراک نواحی}} x\geq۴$$

بنابراین تنها جواب‌هایی قابل قبول است که در شرط $x\geq۴$ صدق کنند.

کار در کلاس

۱ آیا عدد صحیحی وجود دارد که جمع آن با جذرش برابر شش باشد؟

۲ معادله $\sqrt{x^۲-۴}+۲\sqrt{x-۲}=۰$ را حل کنید؛ سپس در مورد قابل قبول بودن جواب‌های آن بحث کنید. آیا بدون حل نیز می‌توانستید به این نتیجه برسید؟

تمرین

معادلات زیر را حل کنید.

۱ $\frac{۶}{x}=۲+\frac{x-۳}{x+۱}$

۲ $\frac{P}{۲-P}+\frac{۲}{P}=\frac{-۳}{۲}$

۳ $\frac{۳y+۵}{y^{۲}+۵y}+\frac{y+۴}{y+۵}=\frac{y+۱}{y}$

۴ $۲\sqrt{x}=\sqrt{۳x+۴}$

۵ $\frac{۱-\sqrt{x}}{۱+\sqrt{x}}=۱-x$

۶ $\frac{۵}{\sqrt{x}+۲}=۲-\frac{۱}{\sqrt{x}-۲}$

۷ $\sqrt{x+۳}+\sqrt{۳x+۱}=۴$

۸ پدربزرگ برای اهدا به مهدکودک چند اسباب‌بازی یکسان، مجموعاً به قیمت ۱۲۰هزار تومان خرید. اگر فروشنده برای هر اسباب‌بازی هزار تومان به پدربزرگ تخفیف می‌داد او می‌توانست با همان پول چهار اسباب‌بازی دیگر هم بخرد. قیمت هر اسباب‌بازی قبل از تخفیف چقدر بوده است؟

۹ ماشین A کاری را به‌تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می‌دهد. اگر هر دو ماشین یک کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین‌ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهند؟

۱۰ فاصله بین دو شهر که در کنار رودخانه‌ای واقع شده‌اند ۱۴۴ کیلومتر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می‌رود و پس از دو ساعت توقف همین مسیر را برمی‌گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۱۷ ساعت می‌باشد. درصورتی‌که سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان آب ۸ کیلومتر در ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد سرعت حرکت کشتی را در جهت حرکت آب تعیین کنید.

رودخانه اروند (استان خوزستان)

درس ۴

قدر مطلق و ویژگی‌های آن

در سال قبل با مفهوم قدر مطلق و برخی از ویژگی‌های آن آشنا شدید. همان‌طور که می‌دانید قدرمطلق عدد حقیقی a به‌صورت زیر تعریف می‌شود.

$$|a|=\begin{cases} a & , \quad a\geq ۰ \\ -a & , \quad a<۰ \end{cases}$$

کار در کلاس

۱ حاصل هریک از عبارت‌های زیر را بدون قدرمطلق بنویسید.

الف) $|-۵-(-۳)|=$

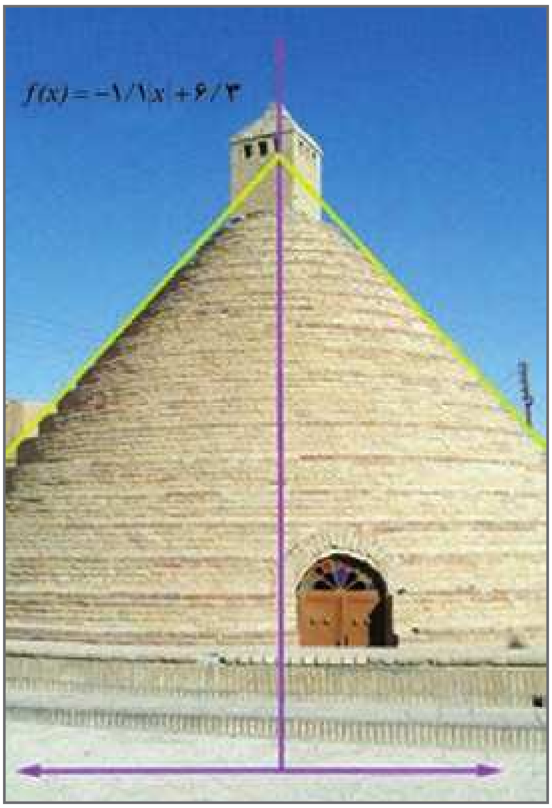
ب) $|\sqrt{۳}-\sqrt{۵}|=$

پ) $\left|۱/۵-۱\frac{۱}{۲}\right|=$

۲ عبارت‌های زیر را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

الف) $\sqrt{a^{۴}+۲a^{۲}+۱}=\sqrt{(....+....)^{۲}}=....$

ب) $\sqrt{۷-۴\sqrt{۳}}=\sqrt{(\sqrt{۳}-....)^{۲}}=$



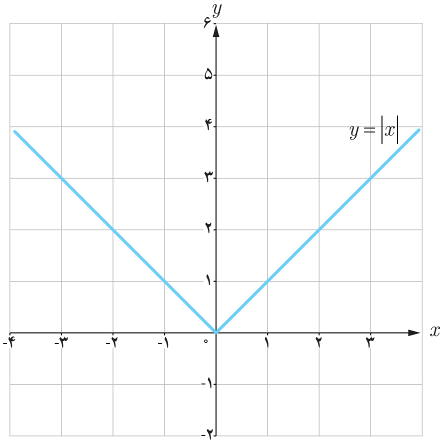
آب انبار ـ روستای بیابانک (استان سمنان)

رسم توابع قدر مطلق

فعالیت

می‌خواهیم نمودار تابع $y=|x-۱|+۲$ را رسم کنیم.

روش اول : با توجه به نمودار $y=|x|$ در شکل (۱) و استفاده از انتقال منحنی، نمودار آن را رسم کنید.

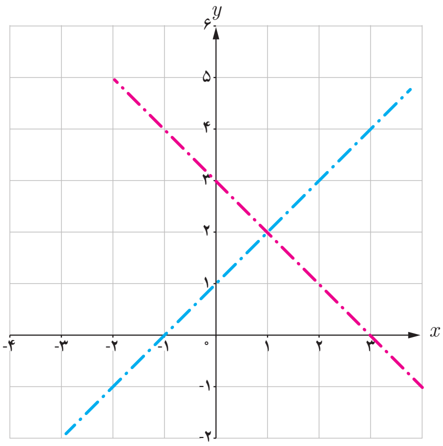


شکل (۱)

روش دوم : گام اول؛ با استفاده از تعیین علامت، تابع را به‌صورت یک تابع دو ضابطه‌ای بنویسید.

$$y=|x-۱|+۲=\begin{cases} \qquad\qquad , & x\geq ۱ \\ \qquad\qquad , & x<۱ \end{cases}$$

گام دوم؛ با توجه به شکل (۲) نمودار y را رسم کنید.


شکل (۲)

✤ **مثال :** نمودار تابع f با ضابطه $f(x)=|x-۱|+|x+۲|$ را رسم کنید.

✤ **حل :** در اینجا نمی‌توانیم از رسم تابع $y=|x|$ و انتقال استفاده کنیم. بنابراین از روش تعیین علامت عبارت‌های داخل قدرمطلق‌ها کمک می‌گیریم. برای این کار ابتدا عبارت‌های داخل قدرمطلق‌ها را تعیین علامت می‌کنیم.

x		-۲		۱	
$x-۱$	$-$		$-$	0	$+$
$x+۲$	$-$	0	$+$		$+$

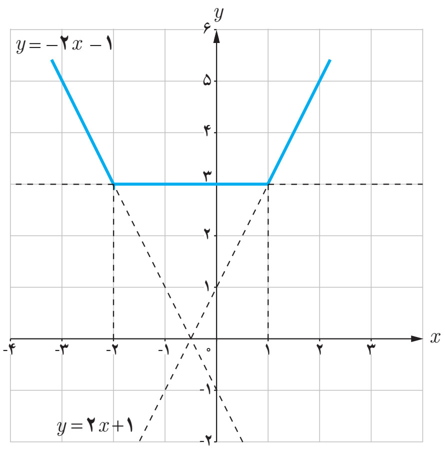
$f(x)=(x-۱)+(x+۲)=۲x+۱$

$f(x)=-(x-۱)+(x+۲)=۳$

$f(x)=-(x-۱)-(x+۲)=-۲x-۱$

$$f(x)=\begin{cases} -۲x-۱ & , \quad x<-۲ \\ ۳ & , \quad -۲\leq x\leq ۱ \\ ۲x+۱ & , \quad x>۱ \end{cases}$$

نمودار تابع از سه قسمت که هریک بخشی از یک خط هستند تشکیل می‌شود (شکل ۳).



شکل (۳)

ویژگی‌های قدر مطلق

در سال‌های قبل با برخی از ویژگی‌های قدر مطلق آشنا شده‌اید که عبارت‌اند از :

الف) $|x| \geq 0$

ب) $\sqrt{x^2} = |x|$

پ) $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ یا $x = -a$ $\quad (a \geq 0)$

ت) $|x| = |a| \Leftrightarrow x = a$ یا $x = -a$

ث) $|-x| = |x|$

ج) $|x|^2 = x^2$

فعالیت

فرض کنید a و b عددهای حقیقی دلخواه باشند.

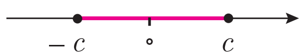
۱ از رابطه $\sqrt{a^2} = |a|$ استفاده کنید و نشان دهید که : $|ab| = |a|\,|b|$

۲ با فرض $b \neq 0$ و استفاده از مرحله قبل ثابت کنید که : $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

فعالیت

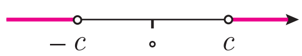
۱ فرض کنید c یک عدد حقیقی نامنفی باشد. هریک از نامعادله‌های زیر را به جواب متناظر آن وصل کنید.

الف) $|x| < c, \ (c \neq 0)$ (۱)

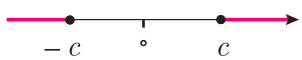


ب) $|x| > c$ (۲)

پ) $|x| \leq c$ (۳)



ت) $|x| \geq c$ (۴)



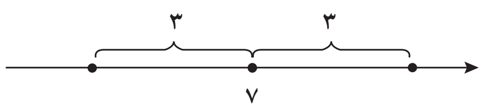
۲ برای هر عدد حقیقی a نشان دهید که : $-|a| \leq a \leq |a|$

۳ برای هر دو عدد حقیقی a و b ثابت کنید که : $-|a| - |b| \leq a+b \leq |a| + |b|$

۴ با استفاده از قسمت قبل «نامساوی مثلث» را برای هر دو عدد حقیقی a و b نتیجه بگیرید : $|a+b| \leq |a| + |b|$

معادلات قدر مطلقی

حل یک مسئله



بر روی محور اعداد حقیقی فاصلهٔ چه نقاطی از نقطه ثابت ۷ برابر ۳ است؟

برای حل مسئله شکل روبه‌رو را رسم می‌کنیم.

اگر طول نقطهٔ جواب مسئله را x بنامیم، شرط مسئله به این معناست که $|x-۷|=۳$. با استفاده از ویژگی‌های قدرمطلق خواهیم دانست $x-۷=\pm ۳$، و در نتیجه $x=۱۰$ و $x=۴$؛ و هر دو جواب‌های معادله هستند.

جواب‌های معادله $|f(x)|=|g(x)|$ همان جواب‌های دو معادله $f(x)=g(x)$ و $f(x)=-g(x)$ هستند. به معادلاتی نظیر این معادلات که شامل عبارت قدر مطلق هستند **معادلات قدر مطلقی** می‌گویند.

✤ **مثال :** معادله $|۳x-۲|=|x-۴|$ را حل کنید.

روش اول : با استفاده از ویژگی‌های قدر مطلق : جواب‌های این معادله همان جواب‌های دو معادلهٔ $۳x-۲=x-۴$ و $۳x-۲=-(x-۴)$ هستند که، به ترتیب، عبارت‌اند از :

$$x=-۱ \quad \text{و} \quad x=\frac{۳}{۲}$$

روش دوم : با به توان دو رساندن طرفین معادله خواهیم داشت : $۹x^۲-۱۲x+۴=x^۲-۸x+۱۶$؛ و از آنجا $۲x^۲-x-۳=۰$. جواب‌های این معادله -۱ و $\frac{۳}{۲}$ هستند.

کار در کلاس

معادله قدر مطلقی $|x-۱|=۴-۳x$ را به سه روش زیر حل کنید.

۱ روش اول : (با استفاده از تعریف قدر مطلق)

$$|x-۱|=\begin{cases} \ldots\ldots , & x\geq ۱ \\ \ldots\ldots , & x<۱ \end{cases}$$

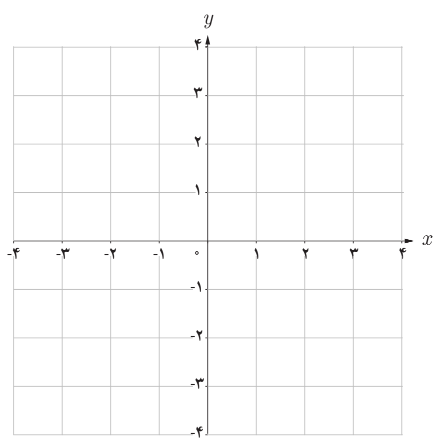
حالت اول: $x\geq ۱ \Rightarrow x-۱=۴-۳x \Rightarrow x=\frac{۵}{۴}$ ، حالت دوم: $x<۱ \Rightarrow \ldots\ldots$ ، مجموعه جواب= { }

۲ روش دوم : (روش هندسی)

الف) توابع $y=|x-۱|$ و $y=۴-۳x$ را رسم کنید.

ب) طول‌های محل تلاقی دو نمودار را مشخص کنید.

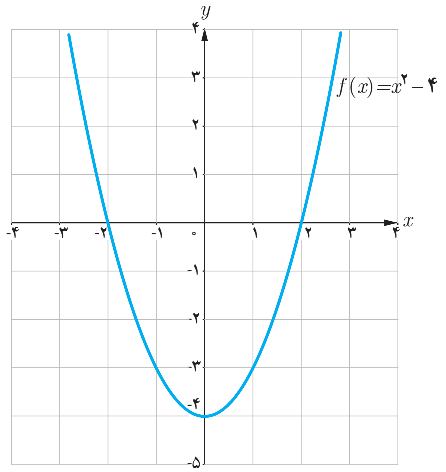
پ) جواب‌های معادله را به‌دست آورید.



۳ روش سوم : (به توان رساندن طرفین)

فعالیت

در شکل روبه‌رو نمودار تابعی با ضابطه $f(x)=x^۲-۴$ آمده است.



۱ با توجه به علامت عبارت $x^۲-۴$ و استفاده از تعریف قدر مطلق، تابع $y=|x^۲-۴|$ را به‌صورت چندضابطه‌ای بنویسید.

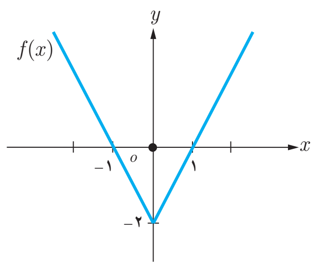
۲ نمودار $y=|x^۲-۴|$ را رسم کنید.

۳ تابع $y=|f(x)|$ را به‌صورت یک تابع دوضابطه‌ای بنویسید.

$$y=|f(x)|=\begin{cases} \quad\quad , f(x)\geq ۰ \\ \quad\quad , f(x)< ۰ \end{cases}$$

۴ با توجه به قسمت‌های قبل یک روش رسم برای تابع $y=|f(x)|$ از روی نمودار $y=f(x)$ بیان کنید.

۵ در شکل روبه‌رو نمودار تابع با ضابطه $y=|f(x)|$ را از روی نمودار تابع $y=f(x)$ رسم کنید.



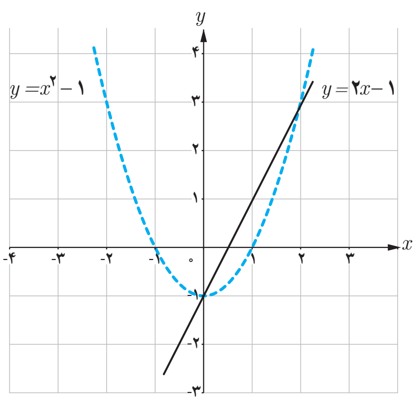
با توجه به فعالیت بالا :

$\boxed{۱}$ نمودار $y=-f(x)$ قرینه نمودار $y=f(x)$ نسبت به محور xهاست.

$\boxed{۲}$ برای رسم نمودار $y=|f(x)|$ کافی است نمودار $y=f(x)$ را رسم کنیم و در جاهایی که نمودار $f(x)$ زیر محور xهاست، تصویر آینه‌وار نمودار $f(x)$ را نسبت به محور xها رسم کنیم.

کار در کلاس

۱ با استفاده از شکل روبه‌رو، نمودار توابع $y=|۲x-۱|$ و $y=|x^۲-۱|$ را رسم کنید و تعداد جواب‌های معادله $|x^۲-۱|=|۲x-۱|$ و مقدار تقریبی جواب‌ها را به‌دست آورید.



۲ به روش جبری و با استفاده از ویژگی‌های قدر مطلق معادلهٔ $|x^۲-۱|=|۲x-۱|$ را حل کنید.

$$|x^۲-۱|=|۲x-۱| \begin{cases} \xrightarrow{\text{حالت اول}} x^۲-۱=۲x-۱ \Rightarrow x^۲-۲x=۰ \Rightarrow x=۰ \text{ یا } x=۲ \\ \xrightarrow{\text{حالت دوم}} x^۲-۱=-(۲x-۱) \Rightarrow \ldots \end{cases}$$

تمرین

۱ با استفاده از تعیین علامت، ضابطهٔ هریک از توابع زیر را بدون استفاده از نماد قدر مطلق بنویسید.

الف) $f(x)=x|x|$

ب) $g(x)=|x^{2}-1|$

پ) $h(x)=|x-1|+|x+1|$

۲ بر روی محور طول‌ها چه نقاطی وجود دارد که مجموع فاصله‌های آنها از دو نقطه به طول‌های ۱- و ۳ روی محور xها برابر ۶ باشد؟

۳ هر یک از عبارت‌های زیر را با استفاده از نماد قدر مطلق به‌صورت یک معادله یا نامعادله بنویسید و جواب را روی محور اعداد نمایش دهید.

الف) فاصله بین x و ۳ برابر ۷ است.

ب) دو برابر فاصله بین x و ۶ برابر ۴ است.

پ) فاصله بین x و ۳- بزرگ‌تر از ۲ است.

۴ دو معادلهٔ زیر را حل کنید.

الف) $\dfrac{2-x}{|x-3|}=1$

ب) $\sqrt{x^{2}-2x+1}=2x+1$

۵ نمودار هر یک از دو تابع زیر را رسم کنید، سپس به ازای $y=3$ معادله‌های به‌دست آمده را به روش هندسی و جبری حل کنید.

الف) $y=x-\dfrac{x}{|x|}$

ب) $y=|x^{2}-6x|$

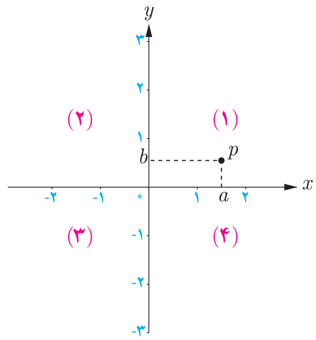
۶ نمودار تابع $f(x)=||x|-2|$ را رسم کنید، سپس معادله $f(x)=1$ را، هم به روش هندسی و هم به روش جبری، حل نمایید.

۷ نمودار تابع $f(x)=|x^{2}-2x|$ را رسم کنید، سپس به دو روش هندسی و جبری معادله $|x^{2}-2x|=2$ را حل نمایید.

درس ۵

آشنایی با هندسه تحلیلی

در سال‌های گذشته با دستگاه محورهای مختصات آشنا شده‌اید. محورهای مختصات، صفحه را به چهار ناحیه تقسیم می‌کنند که هر ناحیه یک ربع نامیده می‌شود. نقاط روی محورها در هیچ ربعی نیستند.



به هر نقطه P در صفحهٔ مختصات یک زوج مرتب $(a\,,b)$ نظیر می‌شود. به این زوج مختصات نقطه P گفته می‌شود. طول نقطه P را با x_p و عرض آن را با y_p نشان می‌دهیم.

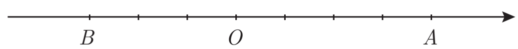
در این درس با برخی از ویژگی‌های نقطه در صفحه مختصات آشنا می‌شویم.

فاصله بین دو نقطه

فعالیت

روی محور اعداد زیر به مبدأ O، نقطهٔ متناظر ۴ را با A و نقطهٔ متناظر ۳− را با B مشخص کرده‌ایم؛

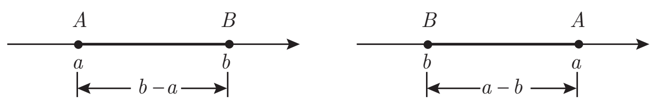
۱ طول پاره‌خط‌های OA و OB چقدر است؟



۲ طول پاره‌خط BA چقدر است؟

۳ فاصله دو نقطه A و B متناظر با ۴ و (۳−) از یکدیگر چقدر است؟

۴ بر روی هریک از دو محور زیر، در مورد فاصله بین دو نقطه A و B چه می‌توان گفت؟



اگر طول نقاط متناظر با A و B روی محور اعداد را به ترتیب با x_A و x_B نشان دهیم، در این صورت فاصله بین A و B را به‌صورت $|AB|=|x_B-x_A|$ تعریف می‌کنیم.

خواندنی

هندسه تحلیلی شاخه‌ای از ریاضیات است که از ترکیب هندسه و جبر مقدماتی به‌وجود آمده است. در این رشته اشکال هندسی و روابط بین آنها را با مقادیر و معادلات عددی و جبری بیان می‌کنند.

بنیان‌گذاران هندسه تحلیلی دکارت و فرما در قرن ۱۷ میلادی بوده‌اند.

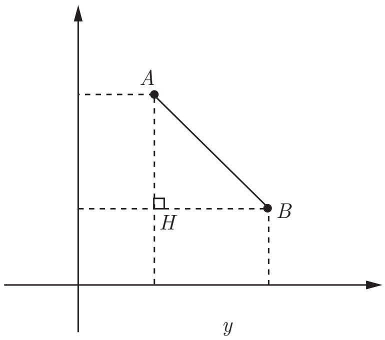
این رشته در مورد اندازه، فاصله، زاویه و فرمول‌های مربوط به آن بحث می‌کند.

فعالیت

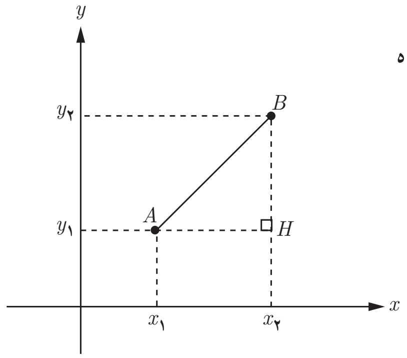
۱ دو نقطه $A(۲,۵)$ و $B(۶,۳)$ را، در شکل روبه‌رو، در نظر بگیرید :

الف) روی محور افقی x_A و x_B و روی محور عمودی y_A و y_B را مشخص کنید.

ب) در مثلث قائم‌الزاویه AHB $(\hat{H}=۹۰^\circ)$ با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس، طول پاره‌خط AB را به‌دست آورید.



۲ در شکل روبه‌رو، اگر $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ دو نقطه دلخواه در صفحه مختصات باشند، طول AB را محاسبه کنید.



$$AB^۲=AH^۲+BH^۲$$

$$AB^۲=....$$

$$AB=\sqrt{....}$$

به‌طور کلی، اگر در صفحه مختصات دو نقطهٔ $A(x_۱,y_۱)$ و $B(x_۲,y_۲)$ را داشته باشیم، طول پاره‌خط AB برابر است با :

$$AB=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲}$$

کار در کلاس

سه نقطهٔ $A(۱,۳)$، $B(-۱,۲)$ و $C(۵,-۵)$ سه رأس مثلث ABC، در صفحهٔ مختصات روبه‌رو، هستند.

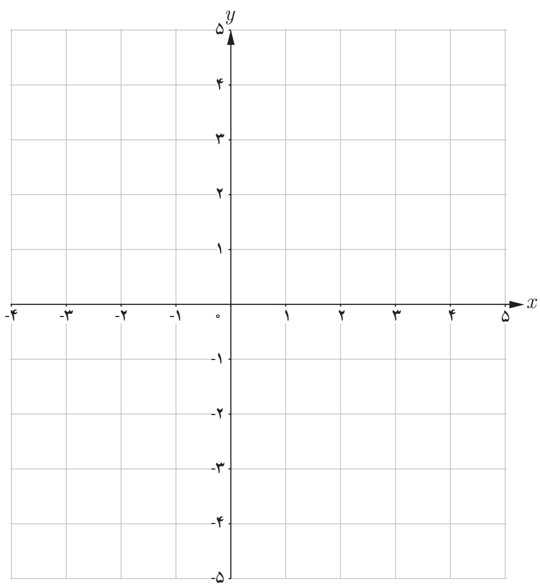
الف) مثلث را رسم کنید.

ب) طول اضلاع مثلث را به‌دست آورید.

پ) نشان دهید مثلث ABC قائم‌الزاویه است.

ت) شیب دو خط AB و AC را به‌دست آورید.

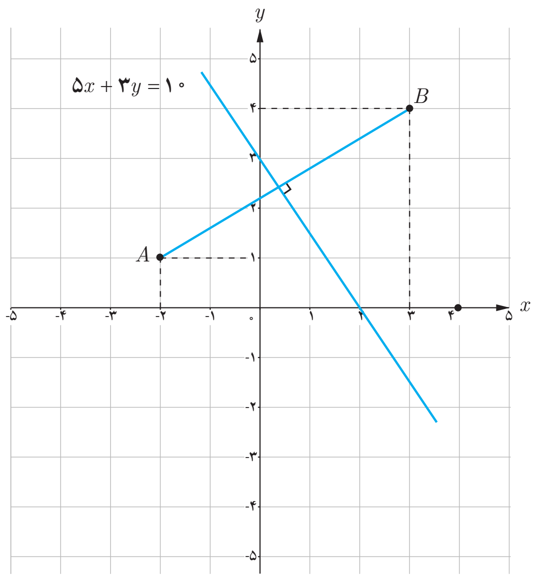
چه رابطه‌ای بین دو شیب مشاهده می‌کنید؟



مثال : در شکل زیر، معادلهٔ عمودمنصف پاره‌خطی را بنویسید که دو نقطهٔ $A(-۲,۱)$ و $B(۳,۴)$ را به هم وصل کرده است.

حل : عمودمنصف یک پاره‌خط شامل همه نقاطی است که فاصله آنها از دو سر پاره‌خط به یک اندازه است. بنابراین اگر $PA=PB$ آنگاه P روی عمودمنصف AB قرار دارد. فرض کنیم $P(x,y)$ آنگاه با استفاده از فرمول فاصله پاره‌خط می‌توان نوشت :

$$\sqrt{(x+۲)^۲+(y-۱)^۲}=\sqrt{(x-۳)^۲+(y-۴)^۲}$$



با به توان دو رساندن طرفین و ساده کردن داریم :

$$۵x+۳y=۱۰$$

این معادله برای تمام نقاطی که از A و B هم‌فاصله‌اند برقرار است، بنابراین، معادلهٔ عمودمنصف AB است.

در مثال بالا شیب خط AB برابر $\frac{۳}{۵}$ و شیب خط عمودمنصف آن برابر $\frac{-۵}{۳}$ است. چه رابطه‌ای بین این دو شیب مشاهده می‌شود؟

به‌طور کلی :
اگر خطوط d و d' به ترتیب با شیب‌های m و m' بر هم عمود باشند آنگاه $mm'=-۱$ و برعکس.

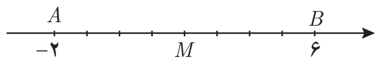
کار در کلاس

نشان دهید نقطه $P(-۱۲,۱۱)$ روی عمودمنصف پاره‌خط واصل دو نقطه $A(۰,-۳)$ و $B(۶,۱۵)$ قرار دارد.

مختصات نقطه وسط یک پاره‌خط

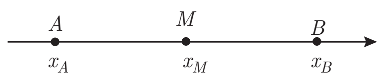
فعالیت

۱ در شکل زیر نقطه M وسط پاره‌خط AB است. طول نقطه M چقدر است؟



۲ چه ارتباطی بین طول نقطه M و طول نقاط A و B مشاهده می‌کنید؟

۳ اگر A و B دو نقطه دلخواه روی محور xها و M وسط AB باشد، طول نقطه M را برحسب طول‌های نقاط A و B به‌دست آورید.

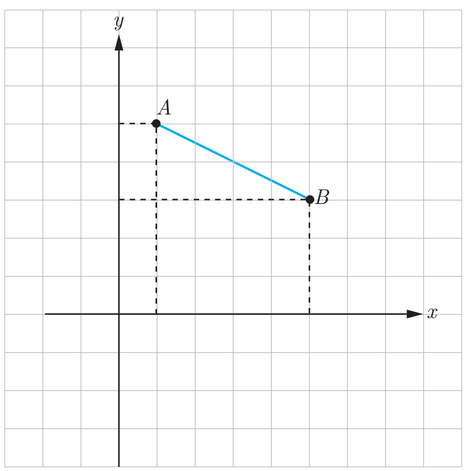


$AM=MB$

$x_M-x_A=.....$

۴ اگر A و B روی محور yها و عرض نقاط A و B را با y_A و y_B نشان دهیم و M وسط پاره‌خط AB باشد، چه دستوری برای محاسبه عرض نقطه M می‌توان بیان کرد؟

کار در کلاس



اگر $A(۱,۵)$ و $B(۵,۳)$ دو سر پاره‌خط AB و $M(a,b)$ وسط این پاره‌خط باشد:

الف) تصویر نقاط A و B و M را روی محورهای مختصات مشخص کنید.

ب) با توجه به تصویر نقاط A و B و M روی محورهای مختصات نقطه M را به‌دست آورید.

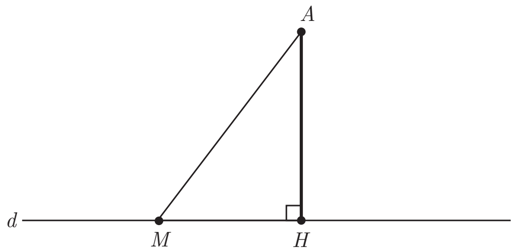
اگر A و B دو نقطه در صفحه مختصات و M وسط پاره‌خط AB باشد. مختصات نقطه M برابر است با:

$$x_M=\frac{x_A+x_B}{۲} \quad , \quad y_M=\frac{y_A+y_B}{۲}$$

فاصله یک نقطه از یک خط

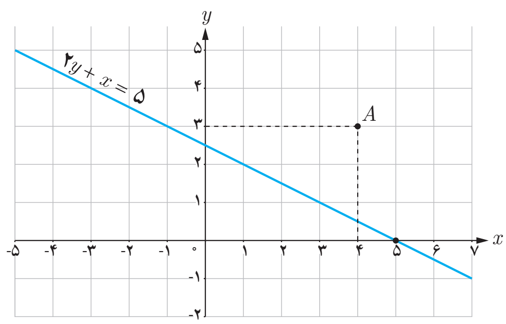
اگر خط d و نقطه A در خارج آن داده شده باشد، فاصله نقطه A از خط d را همان کوتاه‌ترین فاصله A از d تعریف می‌کنیم. با توجه به آنکه طول عمود از طول مایل کوتاه‌تر است (چرا؟) این فاصله را عمود AH در نظر می‌گیریم.

بنابراین برای به‌دست آوردن فاصله هر نقطه از خط کافی است از آن نقطه بر خط عمودی رسم و طول پاره‌خط عمود شده را اندازه‌گیری کنیم.



فعالیت

در شکل روبه‌رو خط d به معادله $2y+x=5$ و نقطه $A(4,3)$ داده شده است.



۱ عمود AH را بر خط d رسم کنید.

۲ رابطه بین شیب‌های دو خط d و AH را به‌دست آورید.

۳ شیب AH را به‌دست آورده و معادله خط AH را بنویسید.

۴ دستگاه متشکل از دو خط d و AH را تشکیل دهید و مختصات محل برخورد دو خط (نقطه H) را به‌دست آورید.

۵ طول پاره‌خط AH را محاسبه کنید.

به‌طورکلی اگر بخواهیم فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_0, y_0)$ از خط $ax+by+c=0$ را به‌دست آوریم، با استفاده از مراحل فعالیت قبل می‌توان نتیجه گرفت که طول عمود AH برابر است با :

$$AH=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

که در آن، وجود علامت قدرمطلق در صورت کسر برای نامنفی شدن مقدار AH می‌باشد.[1]

۱ــ از اثبات فرمول به دلیل طولانی شدن صرف نظر می‌شود. دانش‌آموزان علاقه‌مند می‌توانند خود به اثبات آن بپردازند.

مثال : فاصلهٔ نقطهٔ $A(-۲,۴)$ از خط $y=\frac{۴}{۳}x+۴$ را به‌دست آورید.

حل : ابتدا معادله خط را به‌صورت $۴x-۳y+۱۲=۰$ می‌نویسیم. طبق فرمول فاصله نقطه از خط، فاصله نقطهٔ A تا خط d را AH فرض می‌کنیم و داریم :

$$AH=\frac{|۴(-۲)-۳(۴)+۱۲|}{\sqrt{۴^۲+(-۳)^۲}}=\frac{|-۸|}{۵}=\frac{۸}{۵}$$

مثال : فاصله نقطه $A(۱,-۴)$ از خط $۸x+۶y=k$ برابر ۴ است. مقدار k چقدر است؟

حل : ابتدا معادله خط را به‌صورت $۸x+۶y-k=۰$ می‌نویسیم. مطابق فرمول فاصله نقطه از خط داریم :

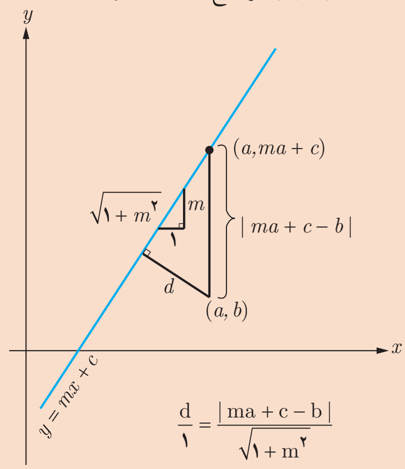
$$AH=\frac{|۸(۱)+۶(-۴)-k|}{\sqrt{۸^۲+۶^۲}}\Rightarrow ۴=\frac{|-۱۶-k|}{۱۰}\Rightarrow |-۱۶-k|=۴۰$$

$$-۱۶-k=۴۰\Rightarrow k=-۵۶$$

$$-۱۶-k=-۴۰\Rightarrow k=۲۴$$

خواندنی

اثبات بدون توضیح فاصله نقطه از خط



$$\frac{d}{۱}=\frac{|ma+c-b|}{\sqrt{۱+m^۲}}$$

کار در کلاس

۱ اگر نقطهٔ $A(۲,۳)$ رأس یک مربع و معادلهٔ یک ضلع مربع $۳x-۴y=۹$ باشد، مساحت مربع چقدر است؟

۲ دو خط $۳x+۲y=۱$ و $۲x-۳y=۲$ معادله‌های دو ضلع یک مستطیل‌اند و نقطهٔ $A(۲,۵)$ یک رأس مستطیل است. مساحت مستطیل چقدر است؟

تمرین

۱ مثلث ABC به رأس‌های $A(-۱,۷)$ و $B(-۶,-۲)$ و $C(۳,۳)$ را در نظر بگیرید.

الف) مثلث را رسم کنید.

ب) نشان دهید مثلث متساوی‌الساقین است.

پ) معادله عمودمنصف ضلع BC را به‌دست آورید.

ت) طول ارتفاع AH چقدر است؟

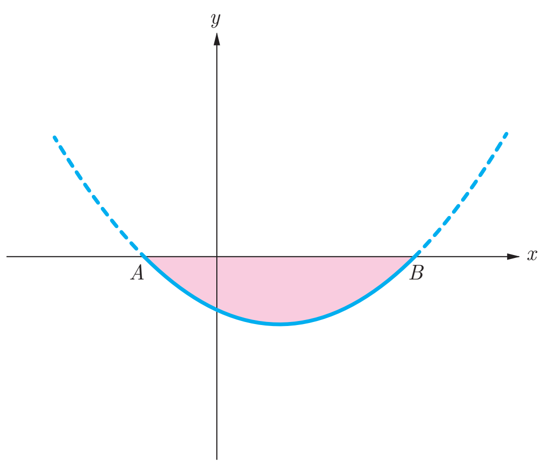
۲ $A(۰,۶)$ و $B(۸,-۸)$ نقاط دوسر قطر یک دایره‌اند. مختصات مرکز و طول شعاع دایره را به‌دست آورید.

۳ شکل نمای جانبی عدسی از منحنی سهمی به معادلهٔ $y=x^۲-۸x-۲۰$ مطابق شکل زیر مدل‌سازی می‌شود.

الف) مختصات نقاط انتهای عدسی A و B را به‌دست آورید.

ب) اگر x برحسب سانتی‌متر باشد طول AB را به‌دست آورید.

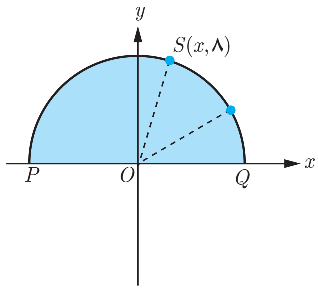
پ) اگر عدسی کاملاً متقارن و y برحسب میلی‌متر باشد بیشترین ضخامت آن چقدر است؟



۴ ثابت کنید فاصلهٔ دو خط موازی $ax+by+c=۰$ و $ax+by+c'=۰$ برابر $\dfrac{|c-c'|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$ می‌باشد.

۵ خط $۴x+۳y=۵$ بر دایرهٔ C به مرکز $O(-۱,۲)$ مماس است. طول شعاع دایره چقدر است؟

۶ نقطهٔ $S(x,۸)$ روی نیم‌دایره‌ای به شعاع ۱۰ در شکل روبه‌رو داده شده است.



الف) مقدار x را به‌دست آورید.

ب) شیب خط‌های PS و SQ را به‌دست آورید.

پ) نشان دهید $P\hat{S}Q$ قائمه است.

۷ اگر فاصله نقطه $A(۱,۲)$ از خط $ax+۴y=۱$ برابر ۲ باشد، مقدار a چقدر است؟

۸ سه رأس مثلث ABC ، $A(-۱۱,-۱۳)$، $B(-۳,۳)$، $C(۳,۱)$ می‌باشند.

الف) طول عمودی را که از رأس B بر میانه نظیر رأس C وارد می‌شود به‌دست آورید.

ب) مختصات رأس D را چنان تعیین کنید که $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع باشد.

۹ نقطه‌ای روی خط $y=۲x$ تعیین کنید که مجموع فاصله‌های آن تا مبدأ مختصات و نقطه $A(۲,۴)$ برابر ۵ باشد.

۱۰ نقاط $A(۴,۲)$ و $B(۱,-۱)$ و $C(۸,-۲)$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر H و M به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه AM باشند طول MH را به‌دست آورید.

فصل ۲

تابع

مفهوم تابع در ریاضیات و علوم مختلف دارای کاربردهای فراوانی است. تابع در دنیای واقعی برای توصیف بسیاری از پدیده‌ها مورد استفاده قرار می‌گیرد. به‌طور نمونه قد متوسط کودکان را می‌توان به‌صورت یک تابع رادیکالی مانند $f(x)=7\sqrt{x}+50$ نمایش داد.

درس ۱

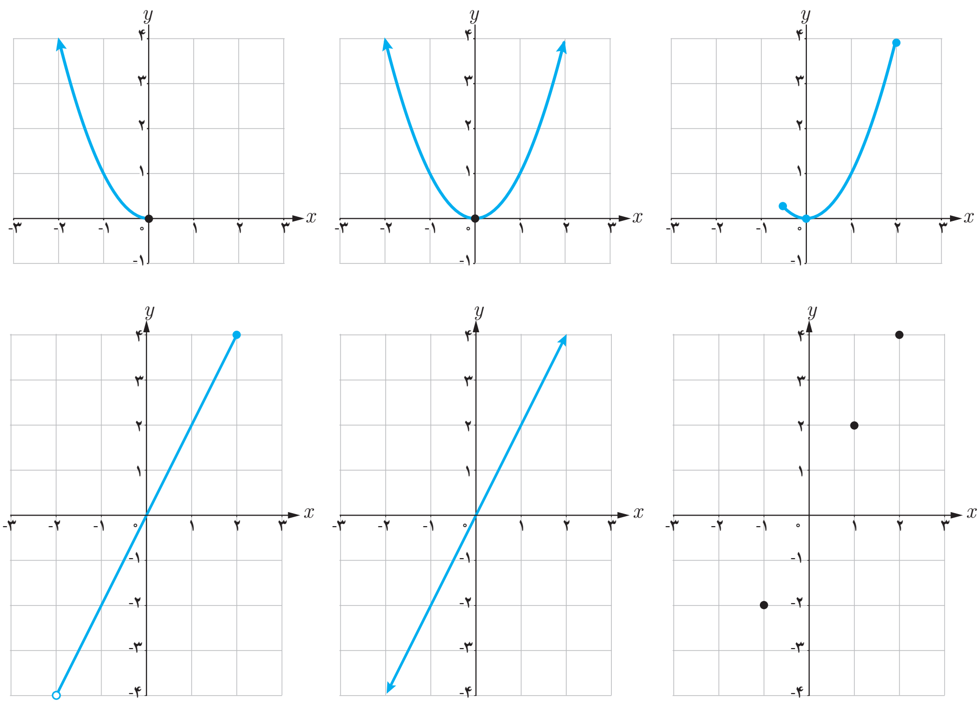
آشنایی بیشتر با تابع

یک تابع از مجموعه A به مجموعه B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو A، دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می‌شود. A را دامنهٔ تابع و B را هم‌دامنهٔ تابع می‌نامند. برد تابع زیرمجموعه‌ای از هم‌دامنه است.

کار در کلاس

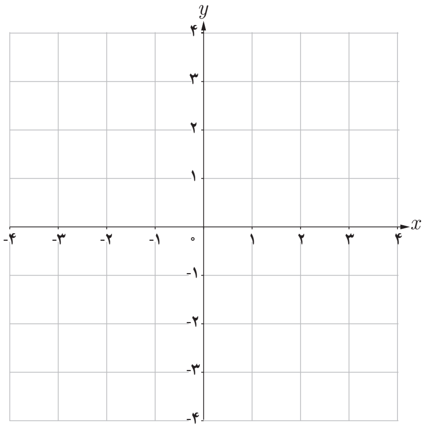
الف) با توجه به توابع داده شده در جدول زیر، مشخص کنید هر نمودار مربوط به کدام تابع است و جدول را نیز کامل کنید. شباهت‌ها و تفاوت‌های نمودارها را با هم مقایسه کنید.

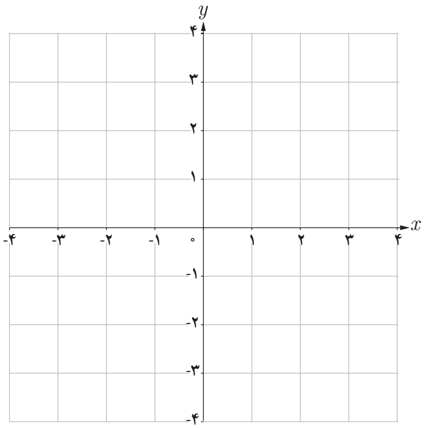
تابع	$k(x)=x^{۲}$	$s(x)=x^{۲}$	$t(x)=x^{۲}$	$h(x)=۲x$	$g(x)=۲x$	$f(x)=۲x$
دامنه تابع	$[-\frac{۱}{۲},۲]$	$(-\infty,۰]$	$\mathbb{R}$	$(-۲,۲]$	$\{-۱,۱,۲\}$	$\mathbb{R}$
برد تابع						



ب) جدول روبه‌رو را به دلخواه (متفاوت از قسمت الف) کامل و نمودار هر تابع را رسم کنید. پاسخ خود را با پاسخ دوستانتان مقایسه کنید. چند پاسخ متفاوت برای f و g می‌توان ارائه کرد؟

تابع	$f(x)=2x$	$g(x)=x^2$
دامنه		
برد		





برای مشخص بودن یک تابع باید دامنه، هم‌دامنه و دستور یا قاعده‌ای که نحوهٔ ارتباط بین اعضای دامنه و اعضای هم‌دامنه را نشان می‌دهد معلوم باشد.

به‌طور مثال تابع f در قسمت الفِ کار در کلاس قبل، تابعی است با دامنهٔ $\mathbb{R}$ و هم‌دامنهٔ $\mathbb{R}$ و ضابطه آن نیز $f(x)=2x$ است. برای سادگی و اختصار این تابع را به‌صورت مقابل نمایش می‌دهند :

$$\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=2x \end{cases}$$

(f تابعی از $\mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ است.)

به همین ترتیب تابع h قسمت الف را می‌توان چنین نمایش داد.

$$\begin{cases} h:(-2,2]\to(-4,4] \\ h(x)=2x \end{cases}$$

تابع h را به‌صورت مقابل هم می‌توان معرفی کرد.

$$\begin{cases} h:(-2,2]\to\mathbb{R} \\ h(x)=2x \end{cases}$$

در هر دو نمایشِ اخیر تابعِ h، دامنه مجموعه $(-2,2]$ و ضابطه آن $h(x)=2x$ است. در نمایش اول هم‌دامنه $(-4,4]$ است که همان برد تابع است. در نمایش دوم h، هم‌دامنه را $\mathbb{R}$ در نظر گرفته‌ایم. در این حالت نیز برد تابع $(-4,4]$ است.

هم‌دامنهٔ تابع را می‌توان هر مجموعه دلخواهی شامل برد تابع در نظر گرفت.

کار در کلاس

برای تابع $\begin{cases} f:[0,\frac{1}{3}]\to[0,\frac{1}{9}] \\ f(x)=x^2 \end{cases}$ کدام‌یک از نمایش‌های زیر نیز قابل قبول است؟

(ت) $\begin{cases} f:[0,\frac{1}{3}]\to\mathbb{R} \\ f(x)=x^2 \end{cases}$

(پ) $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to[0,\frac{1}{9}] \\ f(x)=x \end{cases}$

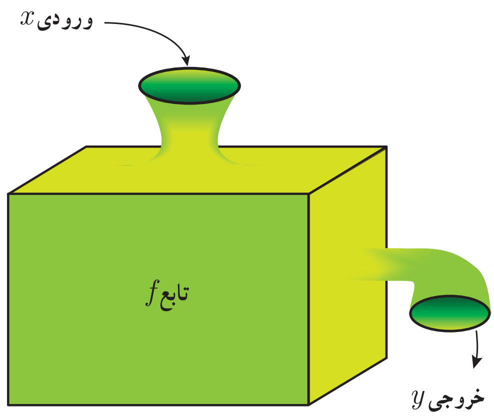
(ب) $\begin{cases} f:[0,\frac{1}{3}]\to[0,\infty) \\ f(x)=x^2 \end{cases}$

(الف) $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=x^2 \end{cases}$

تابع به عنوان یک ماشین

می‌توان تابع را همچون ماشینی در نظر گرفت که یک ورودی را دریافت می‌کند و در ازای آن یک خروجی تحویل می‌دهد. ورودی‌ها از دامنه داده می‌شوند و خروجی‌ها به برد تعلق دارند و برای هر ورودی دقیقاً یک خروجی وجود دارد (البته ممکن است چند ورودی مختلف خروجی یکسانی داشته باشند). اگر x عنصری دلخواه از دامنهٔ f و y نمایش خروجی نظیر آن باشد، x را متغیر مستقل و y را متغیر وابسته می‌نامند.

در این صورت می‌نویسیم : $y=f(x)$



کار در کلاس

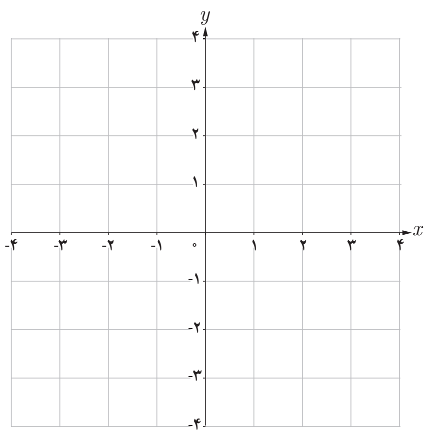
فرض کنید ماشین f به عنوان ورودی، اعداد (حقیقی) را قبول می‌کند و پس از دریافت هر عدد، آن را سه برابر و سپس ۵ واحد به آن اضافه می‌کند. در این صورت به ازای ورودی ۱۰، خروجی ۳۵ را می‌دهد. به سؤالات زیر پاسخ دهید :

الف) ماشین به ازای ورودی ۲−، چه خروجی خواهد داشت؟

ب) اگر خروجی ماشین ۴ باشد ورودی آن چقدر بوده است؟

پ) نمایش تابع به صورت $\begin{cases} f:\mathbb{R}\to\mathbb{R} \\ f(x)=\cdots \end{cases}$ است.

ت) نمودار تابع را رسم و دامنه و برد آن را معلوم کنید.



برابری دو تابع

اگر نمودارهای دو تابع در یک دستگاه مختصات داده شده باشند، هنگامی این دو تابع باهم برابرند که نمودارهای آنها کاملاً برهم منطبق شوند. به طور مثال هیچ کدام از توابع داده شده در قسمت الف کار در کلاس صفحه ۳۸ با یکدیگر برابر نیستند.

اگر دو تابع به‌صورت مجموعهٔ زوج های مرتب داده شده باشند، هنگامی باهم برابرند که به عنوان دو مجموعه باهم برابر باشند.

> دو تابع f و g را برابر نامیم هرگاه :
>
> الف) دامنه f و دامنه g باهم برابر باشند.
>
> ب) برای هر x از این دامنهٔ یکسان داشته باشیم : $f(x) = g(x)$

مثال : تابع‌های $f(x)=\sqrt{x^۲}$ و $g(x)=|x|$ با هم برابرند ولی تابع‌های $f(x)=\frac{x}{x}$ و $g(x)=۱$ برابر نیستند. چرا؟

کار در کلاس

۱ در جدول زیر کدام‌یک از توابع داده شدهٔ زیر باهم برابرند؟ دلیل بیاورید :

۱	$f=\{(۱,۲),(۵,۷)\}$	$g=\{(۱,۷),(۵,۲)\}$
۲	$f=\{(a,b),(c,d)\}$	$g=\{(c,d),(a,b)\}$
۳	$\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x)=۳x \end{cases}$	$\begin{cases} g=\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R} \\ g(x)=۳x \end{cases}$
۴	$f(x)=x\|x\|$	$g(x)=x^۲$
۵	$f(x)=۴x$	$g(x)=\frac{۸x}{۲}$

۲ وقتی در آسمان پدیدهٔ آذرخش رخ می‌دهد، اندکی پس از دیدن نور آن صدای آن را نیز می‌شنویم. صدای ناشی از آذرخش هر ۳ ثانیه حدود یک کیلومتر را طی می‌کند. رابطه بین فاصله ما از مکان وقوع آذرخش و زمانی که طول می‌کشد تا صدای آن را بشنویم در جدول زیر (برای برخی زمان‌ها) داده شده است، اگر $t\in[۴,۱۲]$:

الف) جدول را کامل کنید :

t (ثانیه)	۴	$۴\frac{۱}{۲}$	۵		۸	۹	$۱۰\frac{۱}{۵}$		۱۲
h (کیلومتر)	$\frac{۴}{۳}$	$\frac{۳}{۲}$		۲				$\frac{۱۱}{۳}$	

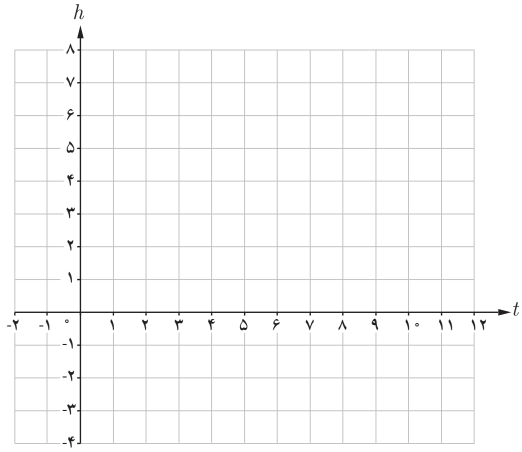
ب) چرا h تابعی از t است؟

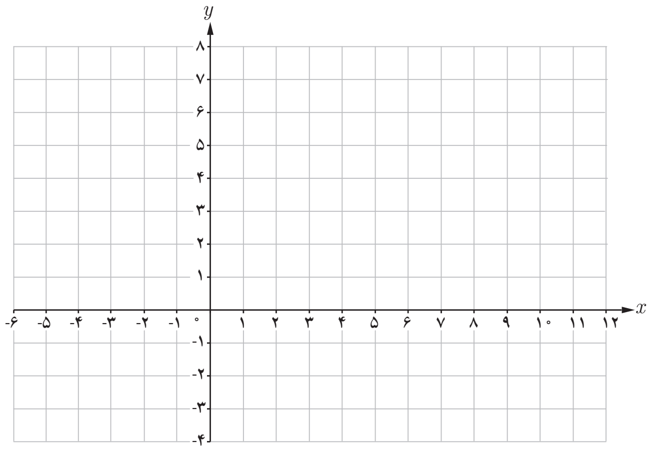
پ) دامنه و برد این تابع را بنویسید.

ت) نمایش مقابل از تابع h کامل کنید :

$$\begin{cases} h:\ [\quad\quad] \to [\quad\quad] \\ h(t) = \end{cases}$$

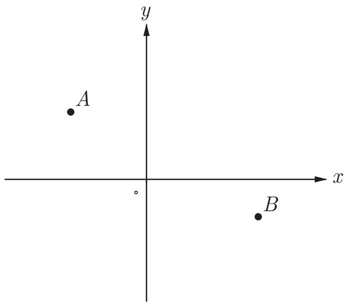
ث) نمودار تابع h و نمودار تابع $y = \frac{۱}{۲}x$ را رسم کنید و شباهت‌ها و تفاوت‌های آنها را بیان کنید.





تمرین

۱ در صفحه مختصات روبه‌رو تابعی رسم کنید که نقاط A و B روی آن قرار داشته باشند. چه تعداد از این توابع وجود دارند؟



۲ کدام‌یک از موارد زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟ دلیل بیاورید.

الف) اگر دامنه دو تابع باهم برابر و برد آنها نیز با یکدیگر برابر باشند، دو تابع برابرند.

ب) برد و هم‌دامنهٔ تابع می‌توانند یکی باشند.

پ) هم‌دامنهٔ تابع زیر مجموعه‌ای از برد آن است.

ت) بی‌شمار تابع وجود دارد که دامنهٔ آن بازهٔ [۰,۳] است.

۳ تابعی مثال بزنید که دامنه آن مجموعه اعداد حقیقی مثبت باشد. چه تعداد از این توابع وجود دارند؟

۴ همه تابع‌های از مجموعه $A=\{a,b,c\}$ به مجموعه $B=\{d,e\}$ را بنویسید(از نمودار پیکانی کمک بگیرید).

۵ تابع‌های مساوی را مشخص کنید.

$\begin{cases} r: [0,+\infty) \to \mathbb{R} \\ r(a) = 5a \end{cases}$	$\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x) = \lvert x \rvert \end{cases}$
$\begin{cases} s: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ s(a) = 5a \end{cases}$	$\begin{cases} g: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ g(x) = 5x \end{cases}$
$\begin{cases} t: \mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} \\ t(x) = 5x \end{cases}$	$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $h(x) = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$

۶ تابع f در همهٔ شرایط زیر صدق می‌کند. f را رسم کنید و ضابطه آن را بنویسید.

الف) دامنهٔ f مجموعه اعداد حقیقی است و $f(2) = 3$ و $f(-5) = -2$

ب) f در بازه $[0,2]$ ثابت است.

پ) تابع f به هر عدد بزرگ‌تر از ۲ مربع آن را نسبت می‌دهد.

ت) تابع f برای اعداد منفی، خطی است و نمودار آن محور xها را در نقطه‌ای به طول ۳− قطع می‌کند.

۷ با استفاده از یک تابع خطی و با در دست داشتن طول استخوان بازو (از آرنج تا شانه) می‌توان طول قد یک انسان بزرگ‌سال را برآورد کرد:

تابع خطی برای مردان $M(x) = 2/89x + 70/64$

تابع خطی برای زنان $F(x) = 2/75x + 71/48$

که در آنها x طول استخوان بازو برحسب سانتی‌متر است.

الف) اگر طول استخوان بازوی یک مرد ۳۵ سانتی‌متر باشد، طول قد او چقدر است؟

ب) اگر قد یک مرد ۱۸۵ سانتی‌متر باشد، طول استخوان بازوی او چقدر است؟

پ) برای تابع $F(x)$ نیز مشابه الف و ب یک سؤال طرح کنید و به آن پاسخ دهید.

خواندنی

نتایج یک مطالعه در مورد قد مردان و زنان از سال ۱۹۱۴ تا ۲۰۱۴ نشان می‌دهد که میانگین قد مردان ایرانی در طی این صد سال از ۱۵۷/۱ به ۱۷۳/۶ سانتی‌متر و میانگین قد زنان ایرانی از ۱۴۸/۵ به ۱۵۹/۷ سانتی‌متر رسیده است. مردان ایرانی بیشترین افزایش طول قد در دنیا را در ۱۰۰ سال اخیر داشته‌اند.

درس ۲

انواع توابع

شما تاکنون با توابع مختلفی آشنا شده‌اید. توابع در دنیای واقعی دارای کاربردهای زیادی هستند. تابع‌های ثابت، تابع‌های همانی، تابع‌های خطی و به‌طور کلی توابع چند جمله‌ای نمونه‌هایی از توابعی هستند که در مدل‌سازی پدیده‌های طبیعی مورد استفاده قرار می‌گیرند. در این درس با انواع دیگری از توابع مهم و مفید آشنا می‌شویم.

توابع گویا

هر تابع به شکل $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامیم، که در آن $P(x)$ و $Q(x)$ چند جمله‌ای هستند و چند جمله‌ای $Q(x)$ صفر نیست.

توابع زیر همگی گویا هستند :

$$h(x)=\frac{\sqrt{5}x+2}{x^3+1} \qquad g(x)=\frac{\frac{1}{3}x-4}{x^2-7x+1} \qquad f(x)=\frac{5}{x+2}$$

خواندنی

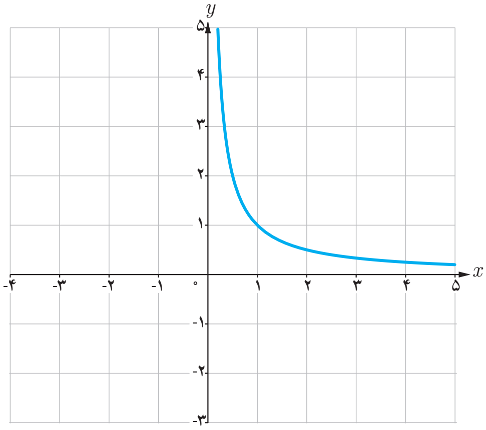
توابع گویا در دنیای واقعی کاربردهای فراوانی دارند. به‌طور مثال میانگین تعداد وسایل نقلیه‌ای که در یک صف منتظر ورود به یک پارکینگ هستند از تابع گویای $f(x)=\frac{x^2}{2(1-x)}$ بدست می‌آید که در آن x شدت ترافیک و عددی بین صفر و یک است.

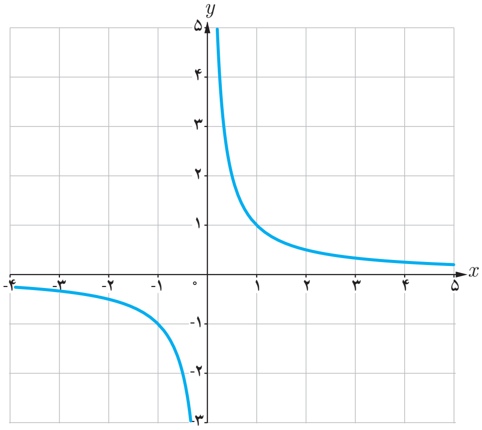
فرودگاه امام خمینی «قُدِّسَ سِرُّهُ»

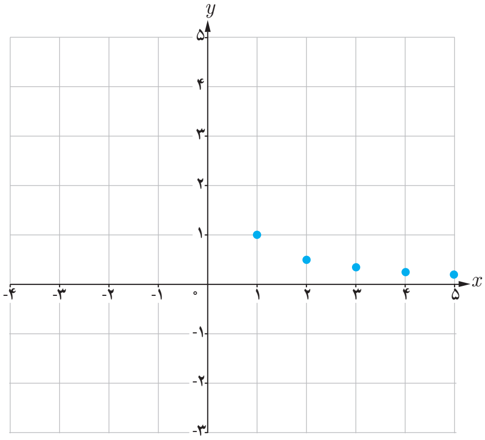
کار در کلاس

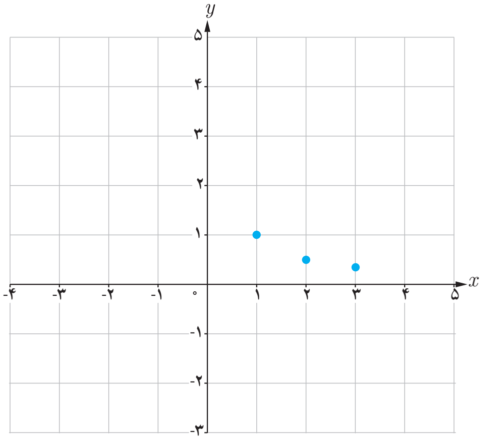
مشخص کنید که هر نمودار زیر متناظر با کدام تابع است؟ دلیل بیاورید.

(ت)	(پ)	(ب)	(الف)
$\begin{cases} t:\mathbb{R}-\{۰\}\to\mathbb{R} \\ t(x)=\frac{۱}{x}\end{cases}$	$\begin{cases} h:\{۱,۲,۳\}\to\mathbb{R} \\ h(x)=\frac{۱}{x}\end{cases}$	$\begin{cases} g:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R} \\ g(x)=\frac{۱}{x}\end{cases}$	$\begin{cases} f:\mathbb{N}\to\mathbb{R} \\ f(x)=\frac{۱}{x}\end{cases}$





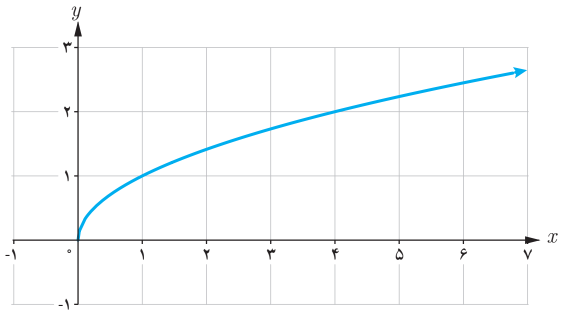




دامنه تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ برابر $\mathbb{R}-\{۰\}$ است، اما ممکن است دامنه را به مجموعه‌های دیگری محدود کنیم. دامنه f را با D_f نمایش می‌دهیم. دامنه یک تابع گویا مجموعهٔ همهٔ مقادیری است که به‌ازای آنها، عبارت جبریِ گویایِ نمایش دهندهٔ ضابطهٔ تابع، تعریف‌شده باشد؛ مثلاً دامنه تابع $f(x)=\frac{۵}{x+۲}$ مجموعهٔ $\mathbb{R}-\{-۲\}$ است.

توابع رادیکالی (تابع ریشه دوم)

تابعی را که هر عدد نامنفی را به ریشه دوم نامنفی آن نسبت می‌دهد تابع ریشه دوم می‌نامند و به‌صورت $f(x)=\sqrt{x}$ یا $y=\sqrt{x}$ نمایش می‌دهند. نمودار تابع در شکل نشان داده شده است. دامنه و برد این تابع، بازهٔ $[\circ , +\infty)$ است. تابع $f(x)=\sqrt{x}$ یک تابع رادیکالی است.

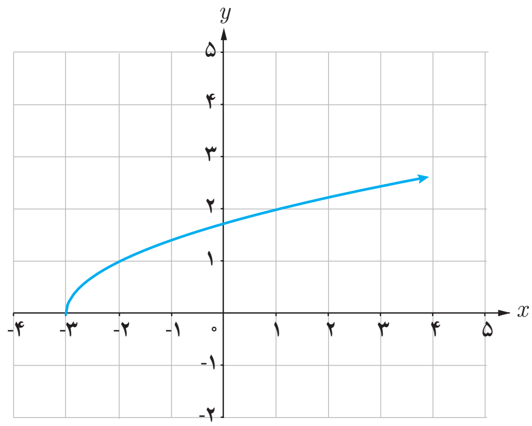


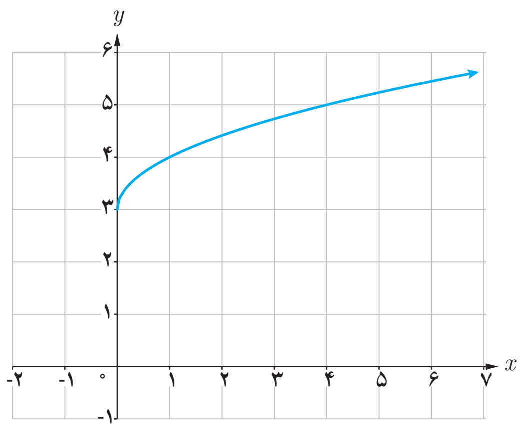
کار در کلاس

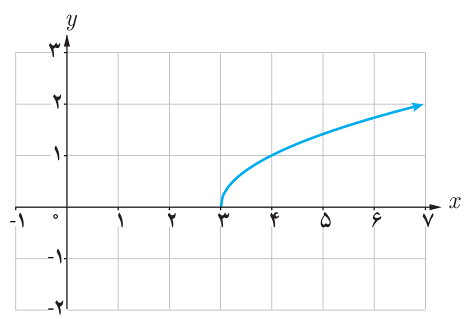
به کمک نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ نمودار چهار تابع :

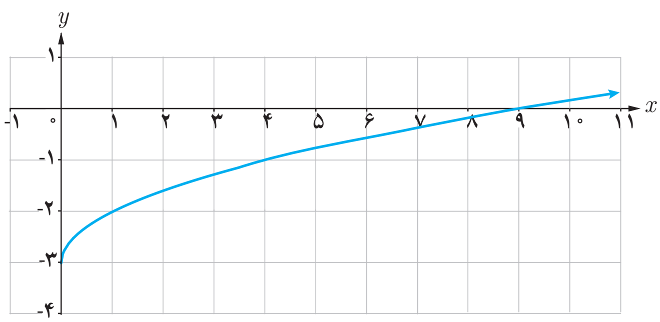
الف) $f(x)=\sqrt{x}+۳$ ، ب) $h(x)=\sqrt{x}-۳$ ، پ) $g(x)=\sqrt{x-۳}$ ، ت) $r(x)=\sqrt{x+۳}$

رسم شده‌اند. تابع مربوط به هر نمودار را مشخص و دامنه و برد آن را معلوم کنید.



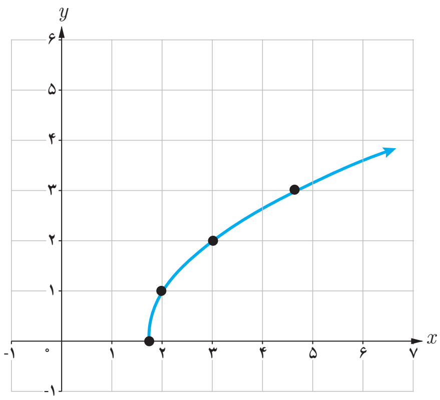






مثال : دامنه تابع $f(x)=\sqrt{۳x-۵}$ برابر مجموعهٔ همه اعدادی است که برای آنها $۳x-۵\geq ۰$ و یا $x\geq\frac{۵}{۳}$ پس : $D_f=[\frac{۵}{۳},+\infty)$.
برد این تابع نیز مجموعه اعداد نامنفی است یعنی : $R_f=[۰,+\infty)$
در جدول، مقادیر تابع f به‌ازای چند عدد در دامنه آن مشخص و نمودار تابع نیز در زیر جدول رسم شده است.

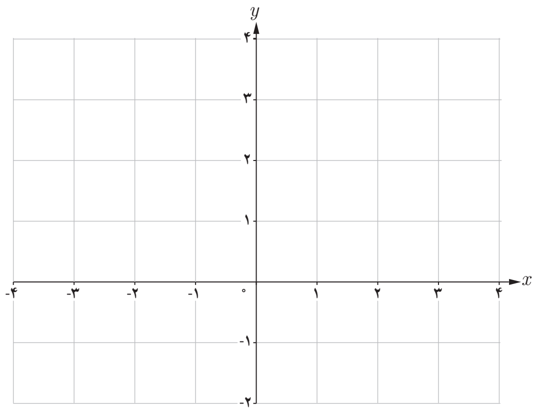
x	$\frac{۵}{۳}$	۲	۳	۴	$\frac{۱۴}{۳}$
$f(x)$	۰	۱	۲	$\sqrt{۷}$	۳

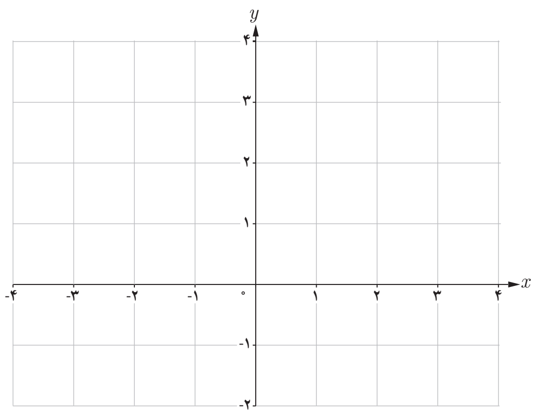


کار در کلاس

الف) دامنهٔ تابع $f(x)=\sqrt{۲x+۶}$ را به‌دست آورید. سپس به کمک نقطه‌یابی نمودار آن را رسم کرده و برد تابع را نیز معلوم کنید.

ب) نمودار تابع $g(x)=\sqrt{۲x+۶}-۲$ را به کمک انتقال رسم کنید.





فعالیت

تابع $f(x)=۷\sqrt{x}+۵۰$ قد متوسط کودکان را، به تقریب، و برحسب سانتی‌متر تا ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد. x نشان‌دهنده ماه‌های پس از تولد است. در حالت کلی دامنه این تابع رادیکالی بازهٔ $[۰,\infty)$ است ولی در این مثال که واقعی است دامنه آن بازهٔ $[۰,۶۰]$ می‌باشد.

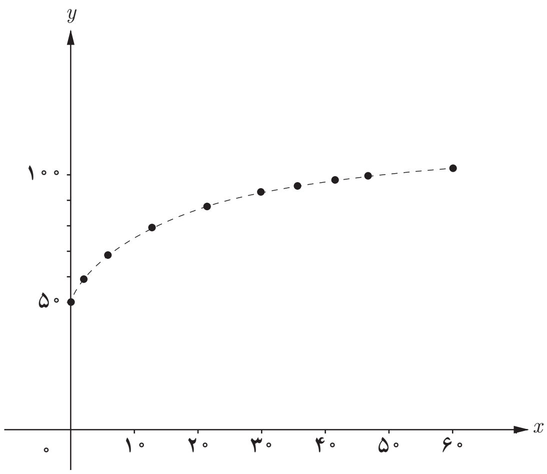
الف) جدول زیر را کامل کنید. در همین صفحه با استفاده از این جدول نمودار تقریبی f را رسم کرده‌ایم.

x	۰	۱	۴	۱۰	۱۶	۲۵	۳۰	۳۶	۴۹	۶۰
$f(x)$	۵۰			۷۲/۱		۸۵	۸۸/۳	۹۲		۱۰۴/۲

ب) برد این تابع چیست؟

پ) قد یک کودک چهار ساله تقریباً چقدر است؟

ت) با استفاده از ضابطه تابع یا نمودار آن مشخص کنید که کودکی با قد ۷۵ سانتی‌متر حدوداً چند ماهه است.



معادلات و توابع

معادلاتی که دارای دو متغیر مانند x و y هستند یک رابطه را نشان می‌دهند؛ مثلاً معادلهٔ $x+y=۲$ شامل همه زوج‌های مرتبی است که مجموع مؤلفه‌های آنها برابر۲است. نمودار این معادله یک خط است. این معادله را به‌صورت $y=-x+۲$ یا $f(x)=-x+۲$ نیز نمایش می‌دهند. بسیاری از توابع با یک معادله بیان می‌شوند، اما الزاماً یک معادله با دو متغیر برحسب x و y یک تابع را مشخص نمی‌کند.

مثال

الف) در معادله $-x^۲+y=۴$، y را برحسب x به‌دست آورید. آیا y تابعی از x است؟

حل: داریم $y=x^۲+۴$. این معادله یک سهمی را مشخص می‌کند که همان تابع $f(x)=x^۲+۴$ است.

ب) آیا در معادله $x-y^۲=۴$، y تابعی از x است؟

حل: اگر y را برحسب x به‌دست آوریم داریم: $y=\pm\sqrt{x-۴}$ به‌ازای $x=۵$ داریم: $y=\pm۱$. یعنی نقاط $(۵,۱)$ و $(۵,-۱)$ روی نمودار معادله قرار دارند. بنابراین، این معادله یک تابع را نمایش نمی‌دهد.

کار در کلاس

کدام‌یک از معادلات زیر یک تابع را مشخص می‌کند؟ دلیل بیاورید.

الف) $y = |x|+1$

ب) $x = |y|+1$

تابع پله‌ای ــ تابع جزء صحیح

هزینهٔ ارسال بسته‌های پستی به‌طور معمول تابعی از وزن آنهاست. هزینهٔ توقف خودرو در یک توقفگاه (پارکینگ) نیز تابعی از زمان توقف است. در فعالیت زیر با نمونه‌ای از این توابع آشنا می‌شویم.

فعالیت

هزینه ارسال یک بستهٔ پستی به مقصدی معین در جدول زیر داده شده است.

x (وزن بسته) کیلوگرم	$0 < x \le 2$	$2 < x \le 5$	$5 < x \le 10$	$10 < x \le 12$
$f(x)$ (هزینه ارسال) برحسب هزار تومان	۵	۱۰	۱۷	۲۰

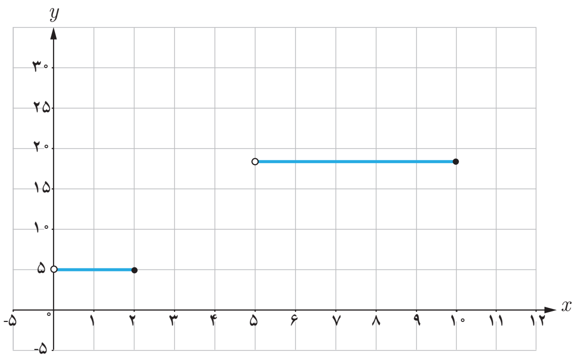
اگر حداکثر وزن بسته‌های ارسالی ۱۲ کیلوگرم باشد،

الف) ضابطهٔ تابعی را که جدول فوق نشان می‌دهد بنویسید و دامنه و برد آن را به‌دست آورید :

$$f(x) = \begin{cases} 5 & 0 < x \le 2 \\ & \\ & \\ & \end{cases}$$

ب) برای ارسال دو بسته به وزن‌های ۹ کیلوگرم و ۱۱/۵ کیلوگرم چه هزینه‌ای باید پرداخت؟

پ) قسمتی از نمودار این تابع در شکل روبه‌رو رسم شده است. بقیه نمودار را رسم کنید.

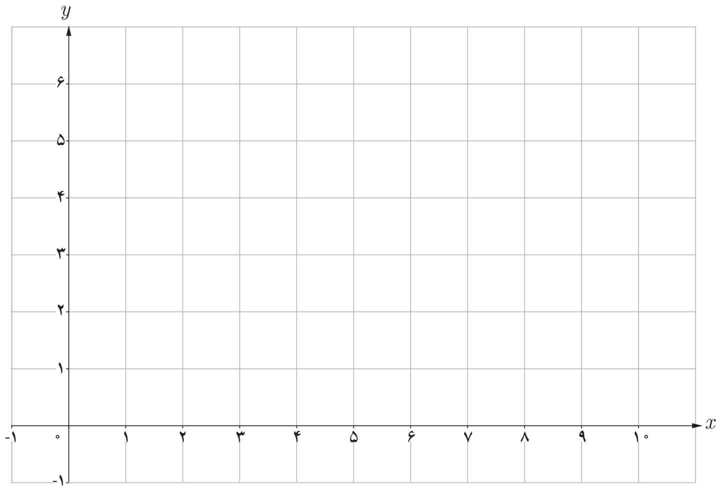


توابعی مانند تابع فوق را که بتوان دامنه آنها را به تعدادی بازه تقسیم کرد به‌گونه‌ای که تابع روی هر کدام از این بازه‌ها ثابت باشد، تابع پله‌ای می‌نامند.

کار در کلاس

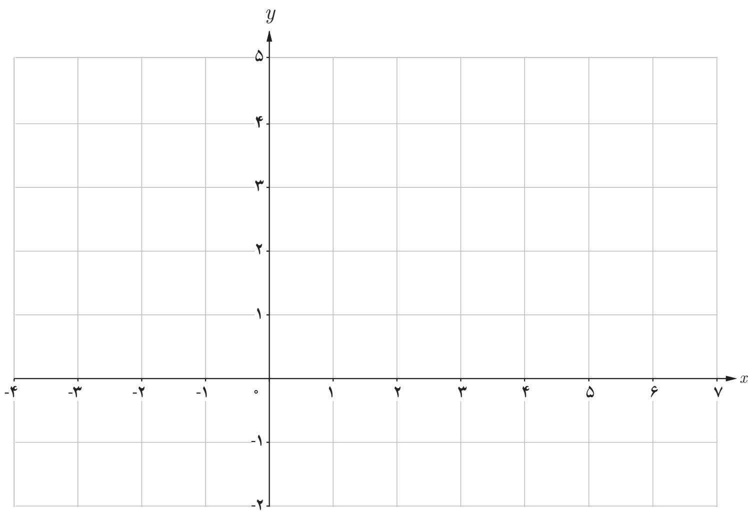
۱ توقفگاه (پارکینگ) یک مجتمع تفریحی ــ ورزشی برای چهار ساعت اول توقف یک خودرو ۳ هزار تومان و برای هر دو ساعت اضافه یا زمانی کمتر از آن ۱۰۰۰ تومان دریافت می‌کند. اگر حداکثر مدت توقف در این توقفگاه ده ساعت باشد، نمودار تابعی را که هزینه توقف را به‌ازای همه ساعات ممکن نشان دهد رسم کنید. دامنه و برد تابع را نیز مشخص کنید.

$$f(x)=\begin{cases} ۳ & ۰<x\leq ۴ \\ & \\ & \end{cases}$$



۲ نمودار تابع پله‌ای زیر را رسم کنید:

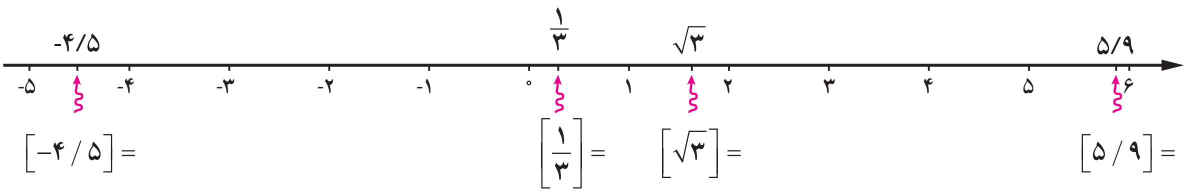
$$f(x)=\begin{cases} ۲ & -۳\leq x\leq -۲ \\ -۱ & -۲<x\leq ۰ \\ ۴ & ۰<x\leq ۴ \\ ۰ & ۴<x<۵ \end{cases}$$



گونه خاصی از توابع پله‌ای که دارای کاربردهای زیادی نیز هست تابع جزء صحیح نام دارد. ابتدا با جزء صحیح یک عدد آشنا می‌شویم.

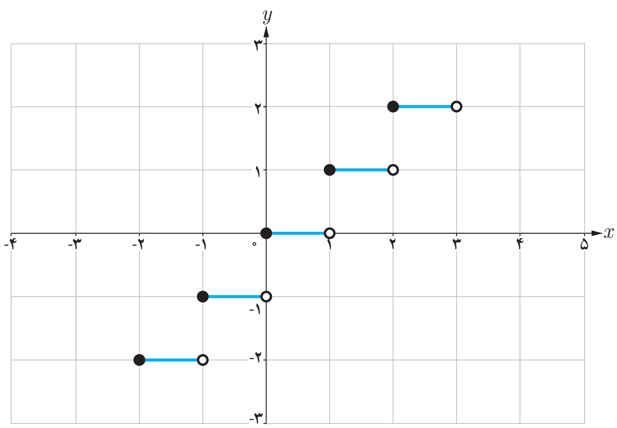
برای هر عدد حقیقی مانند x، جزء صحیح آن بزرگ‌ترین عدد صحیحی است که از x بیشتر نباشد. جزء صحیح x را با نماد $[x]$ نمایش می‌دهیم، به‌طور مثال ۳− = [۲/۸−] و ۳ = [۳/۴۹]. مطابق با تعریف، جزء صحیح یک عدد همواره: $[x]\leq x$. اگر x یک

عدد صحیح باشد $[x] = x$. جزء صحیح اعداد نشان داده شده روی محور را بیابید.



تابعی که به هر عدد حقیقی x، جزء صحیح آن را نسبت می‌دهد تابع جزء صحیح نامیده می‌شود و آن را به صورت $f(x)=[x]$ نمایش می‌دهند. $D_f=\mathbb{R}$ و $R_f=\mathbb{Z}$. نمودار تابع با توجه به جدول در بازه $[-۲,۳)$ رسم شده است.

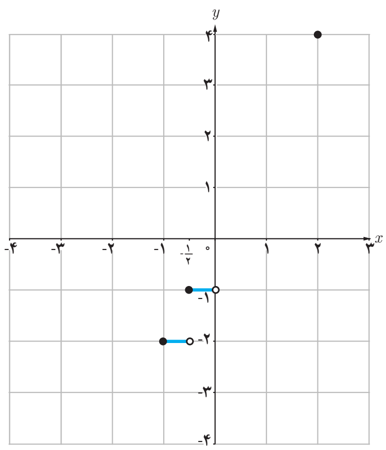
x	$y=[x]$
$-۲ \leq x < -۱$	$y=-۲$
$-۱ \leq x < ۰$	
$۰ \leq x < ۱$	
$۱ \leq x < ۲$	
$۲ \leq x < ۳$	



کار در کلاس

۱ نمودار تابع $f(x)=[۲x]$ را در بازهٔ $[-۱,۲]$ رسم کنید (جدول و نمودار داده شده را کامل کنید).

$-۱ \leq x \leq ۲ \Rightarrow -۲ \leq ۲x \leq ۴$

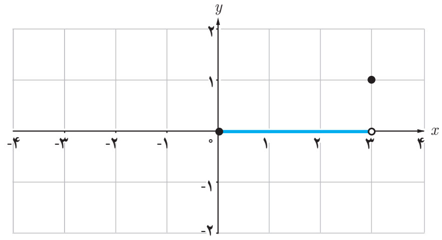


$۲x$	$-۲ \leq ۲x < -۱$	$-۱ \leq ۲x < ۰$			$۲ \leq ۲x < ۳$	
$[۲x]$	-۲		۰	۱		
x	$-۱ \leq x < -\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲} \leq x < ۰$				$\frac{۳}{۲} \leq x < ۲$

۲ نمودار تابع $f(x)=\left[\frac{۱}{۳}x\right]$ را در بازهٔ $[-۳\,,۳]$ رسم کنید (کامل کنید).

$$۰\le\frac{۱}{۳}x<۱\quad\Rightarrow\begin{cases}\left[\frac{۱}{۳}x\right]=۰\\ ۰\le x<۳\end{cases}$$

$$-۱\le\frac{۱}{۳}x<۰\quad\Rightarrow$$



تمرین

۱ دامنهٔ توابع زیر را بیابید.

الف) $f(x)=\frac{x-۱}{۲-x}$

ب) $f(x)=\frac{-۳x}{x^۲+۱}$

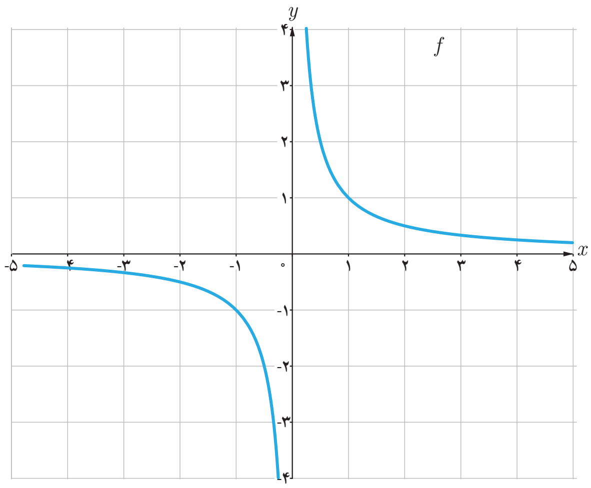
پ) $f(x)=\frac{۲x+۳}{x^۲+x-۱۲}$

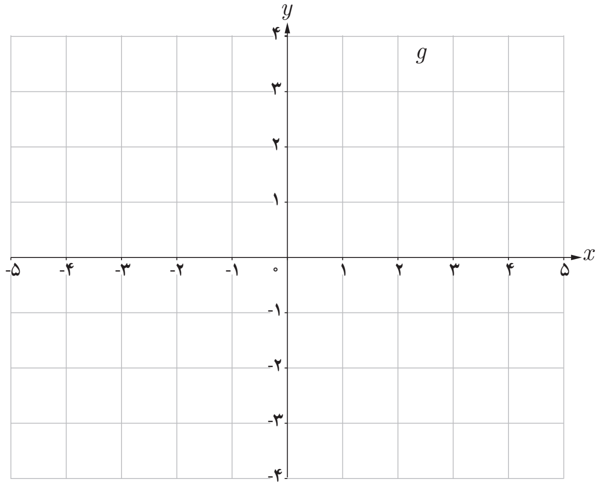
ت) $f(x)=\sqrt{۳x+۱}$

ث) $f(x)=۲\sqrt{x}-۳$

ج) $f(x)=\sqrt{۸-x}$

۲ توضیح دهید که چگونه با استفاده از نمودار تابع $f(x)=\frac{۱}{x}$ می‌توان نمودار تابع $g(x)=-\frac{۱}{x}$ را رسم کرد.





۳ نمودار تابع $y=-\sqrt{x}$ را با استفاده از نمودار تابع $y=\sqrt{x}$ رسم کنید.

۴ نمودار توابع زیر را رسم نموده و دامنه و برد هر یک را معلوم کنید.

الف) $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{x} & x>۰\\ x-۲ & x\leq ۰\end{cases}$

ب) $f(x)=\sqrt{x-۲}+۵$

پ) $f(x)=\begin{cases}\sqrt{x}+۲ & x>۰\\ \sqrt{x+۲} & -۲\leq x\leq ۰\end{cases}$

ت) $f(x)=\begin{cases}-\frac{۱}{x} & x<۰\\ -\sqrt{x} & x\geq ۰\end{cases}$

۵ کدام‌یک از معادلات زیر یک تابع را مشخص می‌کند؟

الف) $۳x+۲y=۱۲$ ب) $x=۱$ پ) $y=-۲$ ت) $f(x)=\begin{cases}x+۳ & x\leq ۰\\ x-۱ & x\geq ۰\end{cases}$ ث) $y^۲=x^۲$ ج) $y=|x|$

۶ هزینه پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی از رودخانه‌ای، به‌وسیله تابع $f(x)=\frac{۲۵۵x}{۱۰۰-x}$ محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و $f(x)$ هزینه پاک‌سازی برحسب میلیون تومان است.

الف) هزینه پاک‌سازی ٪۵۰ از آلودگی این رودخانه چقدر است؟

ب) دامنه این تابع در این حالت (واقعی) را به کمک یک بازه نمایش دهید.

۷ نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف) $f(x)=[x]+۱ \quad , \quad -۲\leq x<۳$

ب) $f(x)=[\frac{۱}{۲}x] \quad , \quad -۴\leq x<۴$

۸ نمودارهای دو تابع $y=[x-۳]$ و $y=[x]-۳$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید. چه رابطه‌ای بین این دو تابع وجود دارد؟

۹ اگر تعداد افرادی که،طی یک مدت معین، به‌وسیله یک نوع ویروس آلوده می‌شوند با دستور $n(t)=\frac{۹۵۰۰t-۲۰۰۰}{۴+t}$ به‌دست آید که در آن $t>۰$ زمان برحسب ماه است :

الف) تعداد افرادی که در انتهای ماه پنجم آلوده شده‌اند چقدر است؟

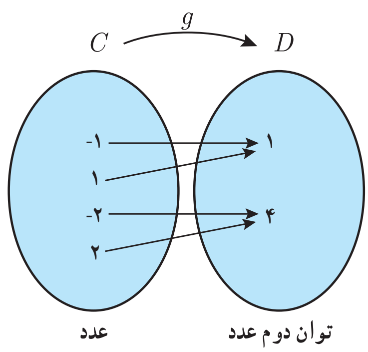
ب) پس از چند ماه تعداد افراد آلوده به ۵۵۰۰ نفر خواهد رسید؟

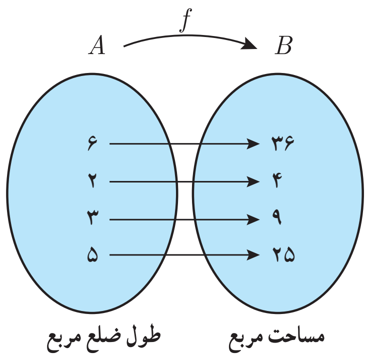
درس ۳

وارون توابع

فعالیت

دو تابع f و g را در نظر بگیرید :





الف) f و g را به‌صورت زوج‌های مرتب نمایش دهید و دامنه و برد هر یک را بنویسید.

$f=$

$g=$

$D_f=$ $\qquad\qquad$ $D_g=$

$R_f=$ $\qquad\qquad$ $R_g=$

ب) اگر جای دو مؤلفهٔ هر زوج مرتب در f و g را عوض کنیم، روابط جدیدی به‌دست می‌آید. آنها را به ترتیب h و k بنامید. h و k را وارون رابطه‌های f و g می‌نامیم. h و k را به‌صورت مجموعه زوج‌های مرتب بنویسید.

$h=$

$k=$

کدام‌یک از رابطه‌های h و k تابع است؟ دلیل بیاورید.

> اگر رابطهٔ بین دو مجموعه به‌صورت زوج‌های مرتب داده شده باشد، رابطه‌ای را که از جابه‌جایی دو مؤلفه هر زوج مرتب رابطه به‌دست می‌آید وارونِ آن رابطه می‌نامیم.
>
> اگر f یک تابع باشد وارون آن را با f^{-1} نمایش می‌دهیم و به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم :
>
> $f^{-1}=\{(y,x)\mid(x,y)\in f\}$
>
> اگر f^{-1} تابع باشد آن‌گاه f را وارون‌پذیر (معکوس پذیر) و f^{-1} را «تابع وارون» f می‌نامیم.

توجه کنید که f^{-1} را نباید با $\frac{1}{f}$ اشتباه گرفت.

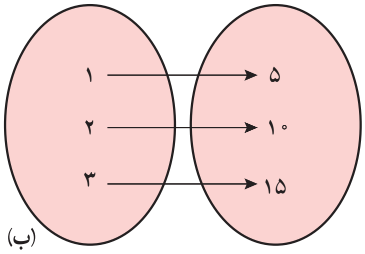
توابع یک‌به‌یک

چه توابعی وارون‌پذیرند؟ در فعالیت قبل تابع f وارون‌پذیر بود ولی تابع g وارون‌پذیر نبود. بنابراین سؤال اساسی این است که یک تابع باید چه شرطی داشته باشد تا وارون‌پذیر باشد؟

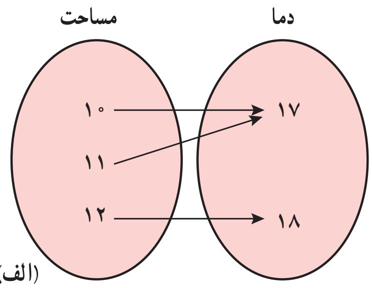
فعالیت

توابع زیر را در نظر بگیرید :

الف) کدام‌یک از آنها وارون‌پذیرند؟

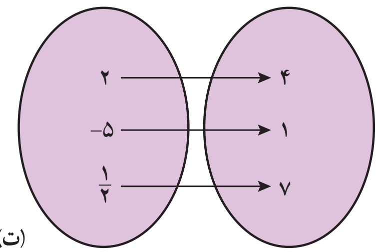


(ب)

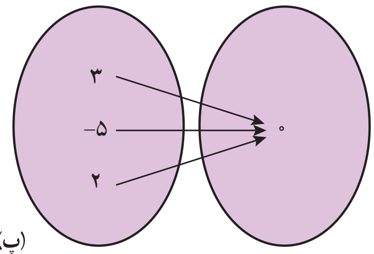


(الف)

ب) ویژگی مشترک توابع وارون‌پذیر چیست؟



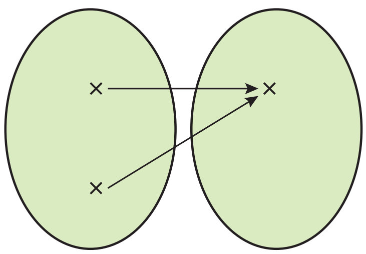
(ت)

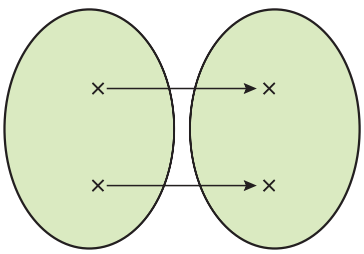


(پ)

اگر f یک تابع باشد و به هر عنصر در برد دقیقاً یک عنصر از دامنه نظیر شود تابع وارون‌پذیر است. اگر تابعی چنین ویژگی داشته باشد آن را یک به یک نامیم. به عبارت دیگر تابع f یک به یک است هرگاه هر دو عنصر متمایز در دامنه، به دو عنصر متمایز در برد نظیر شوند.

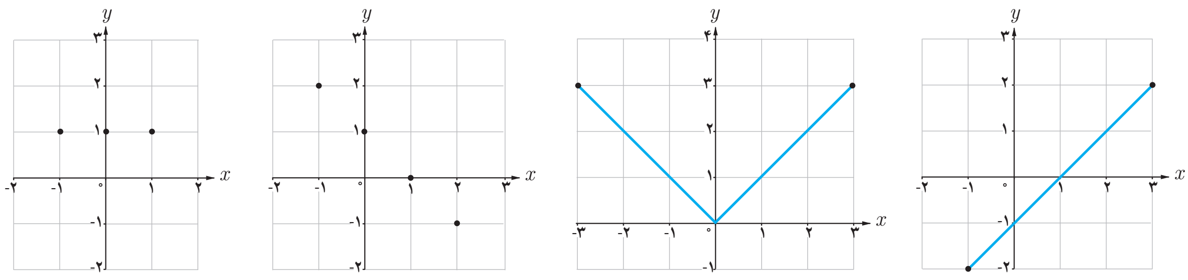
همان‌گونه که در فعالیت بالا دیده شد، اگر تابعی یک‌به‌یک باشد آن‌گاه وارون‌پذیر است.


تابع یک به یک نیست.


تابع یک به یک است.

فعالیت

توابع داده شده در (الف) و (پ) یک به یک هستند ولی توابع داده شده در (ب) و (ت) یک به یک نیستند. چرا؟ توضیح دهید.

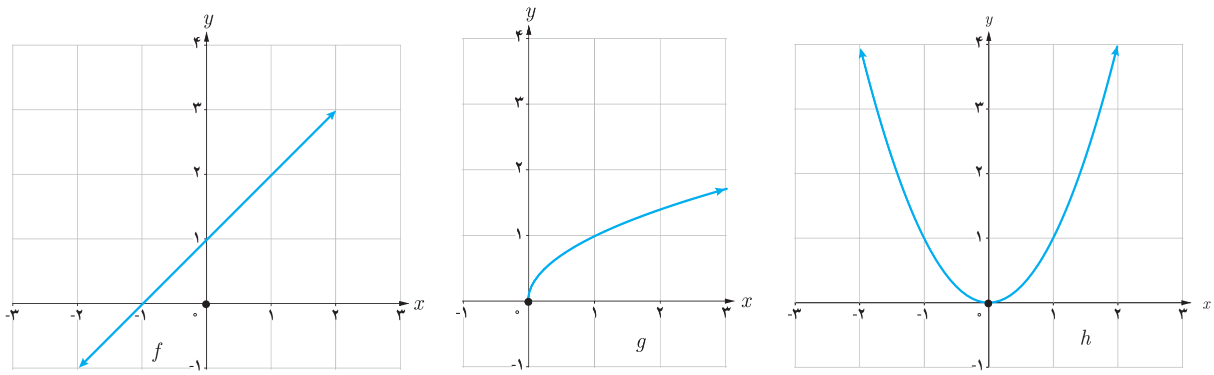


(ت) (پ) (ب) (الف)

به‌طور کلی می‌توان گفت که یک تابع در صورتی یک به یک است که هر خط موازی محور xها، نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

کار در کلاس

۱ کدام‌یک از توابع زیر یک به یک هستند؟



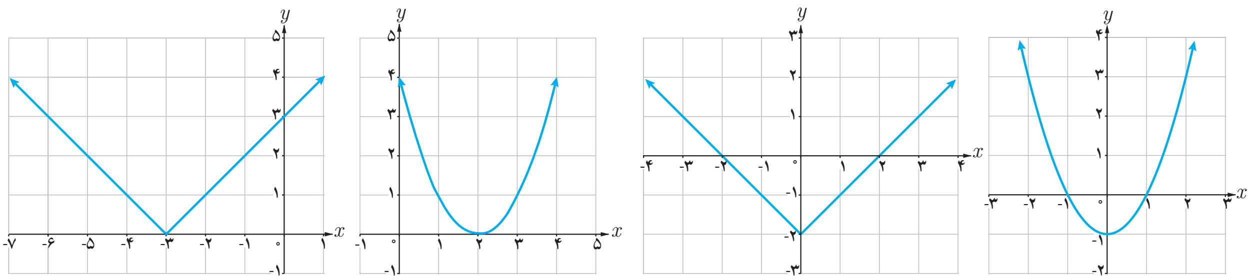
$k=\{(۱,۲),(۳,۴),(۸,۹)\}$ $\qquad$ $l=\{(۳,۷),(۲,۵),(۱,۵)\}$

۲ فرض کنید به هر یک از اعضای یک کلاس کد ملی آنها را نسبت دهیم. توضیح دهید که چگونه رابطهٔ بین افراد و کد ملی آنها تابعی یک به یک را معلوم می‌کند.

کار در کلاس

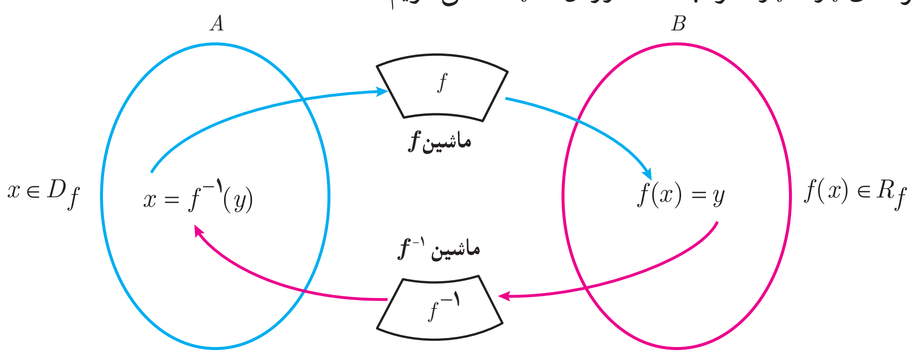
تابع های زیر یک به یک نیستند. چرا؟ با محدود کردن دامنه هر یک از توابع، تابعی یک به یک بسازید.

الف) $y=|x+۳|$ ب) $y=(x-۲)^۲$ پ) $y=|x|-۲$ ت) $y=x^۲-۱$



محاسبه وارون یک تابع

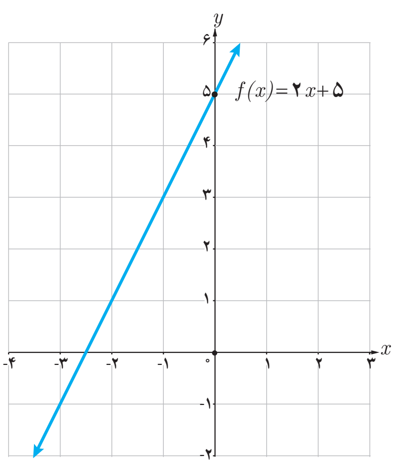
اگر f تابعی یک به یک باشد و $f^{-۱}$ تابع وارون آن باشد، نمودار زیر کارکرد f و $f^{-۱}$ را نشان می‌دهد. در فعالیت بعد به‌صورت جزئی‌تر با کارکردهای f و $f^{-۱}$ و نحوهٔ به‌دست آوردن $f^{-۱}$ آشنا می‌شویم.



فعالیت

تابع $\begin{cases} f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f(x)=۲x+۵ \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم.

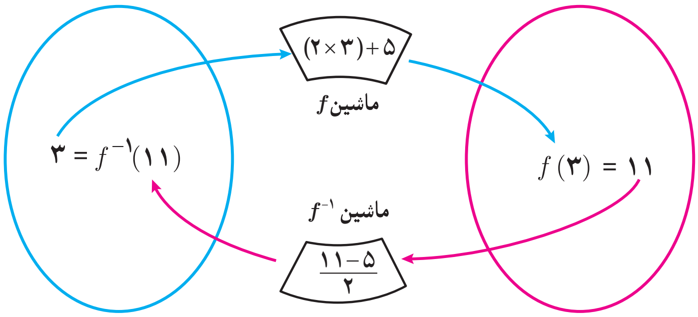
الف) به کمک نمودار f توضیح دهید که چرا f یک به یک است.



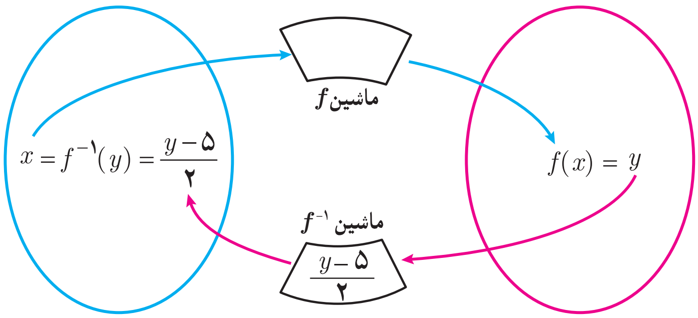
ب) نمودار روبه‌رو را توضیح دهید :

$(۱۱,۳) \in f^{-۱}$ و $(۳,۱۱) \in f$

به عبارت دیگر $f(۳) = ۱۱$ و $f^{-۱}(۱۱) = ۳$



پ) در حالت کلی برای هر عنصر $x\in D_f$،
نمودار مقابل را مانند ب کامل کنید.



ت) بنابراین می‌توان نوشت :

$$f(x) = ۲x + ۵ \qquad (x \in D_f)$$

$$f^{-۱}(y) = \frac{y-۵}{۲} \qquad (y \in R_f)$$

$f^{-۱}$ را به‌صورت‌های دیگری هم می‌توانیم نمایش دهیم. یک نمایش دیگر را بنویسید :

$$\begin{cases} f^{-۱} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases} \qquad \begin{cases} f^{-۱} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f^{-۱}(t) = \dfrac{t-۵}{۲} \end{cases} \qquad \begin{cases} f^{-۱} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f^{-۱}(y) = \dfrac{y-۵}{۲} \end{cases}$$

آنچه که اهمیت دارد این است که دامنه $f^{-۱}$ همان برد f است. بنابراین یک نمایش مناسب برای $f^{-۱}$ به‌صورت زیر است :

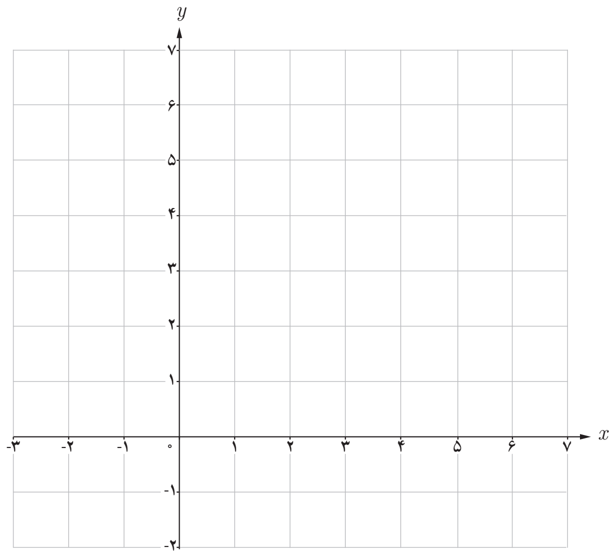
$$\begin{cases} f^{-۱} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ f^{-۱}(x) = \dfrac{x-۵}{۲} \end{cases}$$

برای به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع یک‌به‌یک مانند f، در معادله $y = f(x)$ در صورت امکان x را برحسب y محاسبه می‌کنیم، سپس با تبدیل y به x، $f^{-۱}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

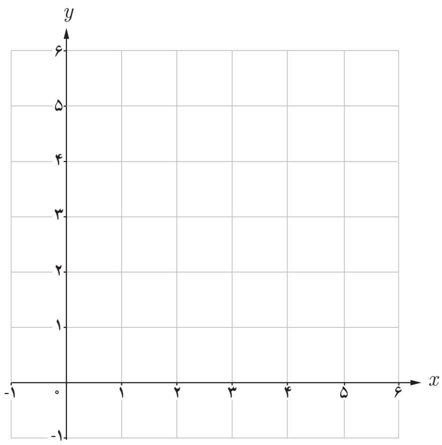
عملیات به‌دست آوردن $f^{-۱}$ را به کمک نمودارهای صفحه قبل توضیح دهید.

$$f(x) = ۲x+۵ \Rightarrow y= ۲x+۵$$
$$\Rightarrow ۲x= y-۵$$
$$\Rightarrow x= \frac{y-۵}{۲}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(y)= \frac{y-۵}{۲}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(x)= \frac{x-۵}{۲}$$

کار در کلاس



۱ با توجه به فعالیت قبل اگر داشته باشیم $f(x) = ۲x+۵$، نمودار f و $f^{-۱}$ را در یک دستگاه مختصات رسم کنید.

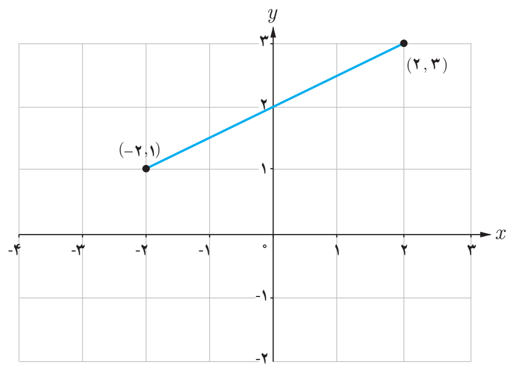


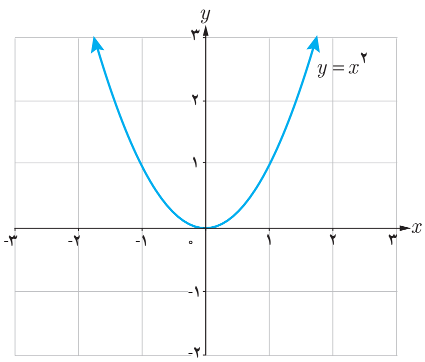
۲ اگر داشته باشیم $f(x) = \sqrt{x-۲}$ ، دامنه و برد f را به‌دست آورید و نمودار آن را رسم کنید.
در معادلهٔ $y = \sqrt{x-۲}$ ضابطه $f^{-۱}$ را بنویسید. نمودار $f^{-۱}$ را رسم و دامنه و برد $f^{-۱}$ را معلوم کنید.

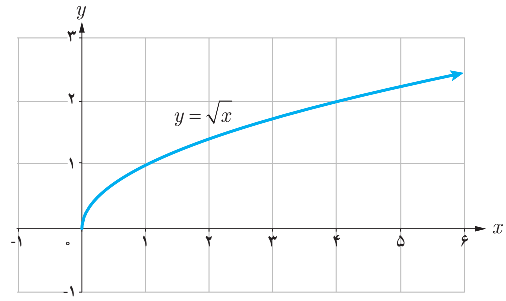
اگر f یک تابع یک به یک باشد، برای به‌دست آوردن نمودار تابع $f^{-۱}$ کافی است قرینهٔ نمودار تابع f را نسبت به خط $y= x$ (نیمساز ربع اول و سوم) به‌دست آوریم.

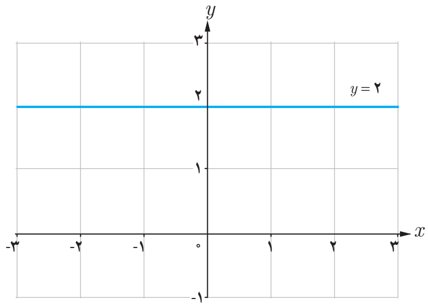
کار در کلاس

نمودار «تابع وارون» هر کدام از تابع های زیر را که یک به یک است در همان دستگاه مختصات رسم کنید.

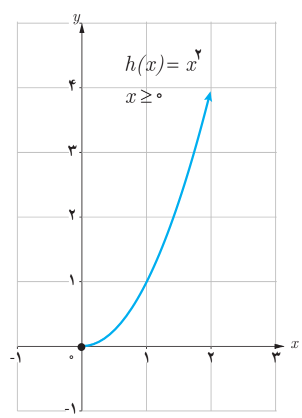




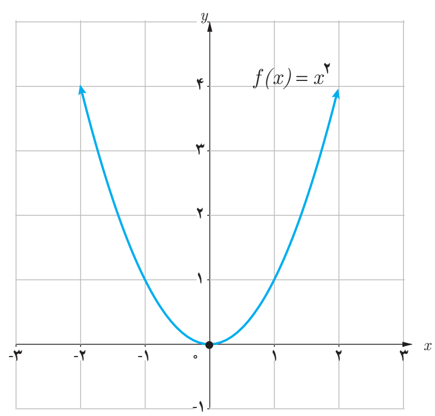




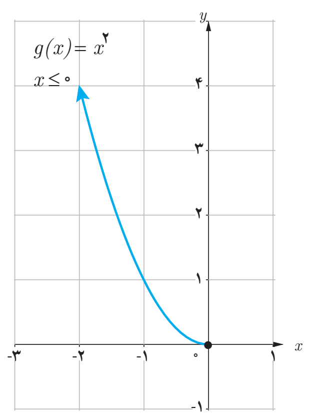
اگر تابعی یک به یک نباشد وارون پذیر هم نیست. اما گاهی با محدود کردن دامنه یک تابع، می توان تابعی یک به یک به‌دست آورد. به‌طور مثال تابع $f(x) = x^۲$ یک به یک نیست، ولی با محدود کردن تابع به بازهٔ $[۰, \infty)$ و یا $(-\infty, ۰]$ تابعی یک به یک به‌دست می‌آید.



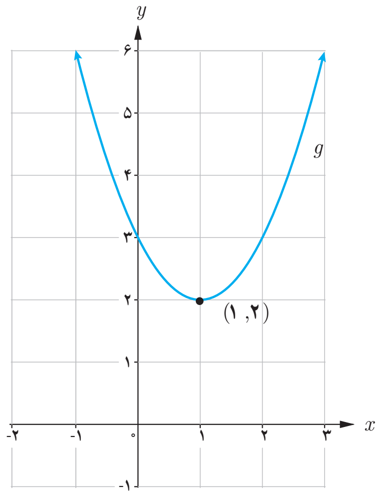
h یک به یک و وارون‌پذیر است.



f یک به یک نیست، وارون‌پذیر هم نیست.



g یک به یک و وارون‌پذیر است.



مثال : نمودار تابع $g(x)=x^۲-۲x+۳$ نشان می‌دهد که این تابع یک‌به‌یک نیست. به‌طور مثال $g(۲)=g(۰)$. می‌توان دامنه این تابع را محدود کرد و تابعی یک به یک به‌دست آورد و سپس وارون آن را حساب کرد.

در مورد تابع g داریم :

$$g:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R} \qquad D_g=\mathbb{R}\ \text{و}\ R_g=[۲,+\infty)$$

$$g(x)=x^۲-۲x+۳=(x-۱)^۲+۲$$

دامنه f را به بازهٔ $[۱,+\infty)$ محدود می‌کنیم و تابع جدید را f می‌نامیم.
بنابراین تابع جدید به‌صورت زیر خواهد بود که تابع یک به یک و وارون‌پذیر است.

$$\begin{cases} f:[۱,+\infty)\to\mathbb{R} \\ f(x)=(x-۱)^۲+۲ \end{cases} \qquad D_f=[۱,+\infty)\ ,\ R_f=[۲,+\infty)$$

اکنون سعی می‌کنیم x را برحسب y به‌دست آوریم :

$$y=(x-۱)^۲+۲ \Rightarrow y-۲=(x-۱)^۲ \Rightarrow (x-۱)^۲=y-۲ \Rightarrow x-۱=\pm\sqrt{y-۲}$$

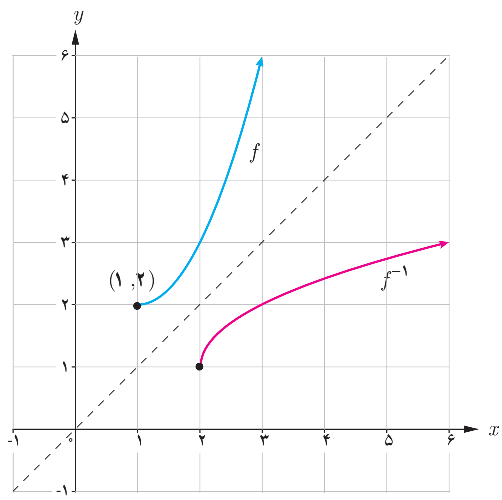
جواب منفی قابل قبول نیست (چرا؟) بنابراین :

$$x-۱=\sqrt{y-۲} \Rightarrow x=\sqrt{y-۲}+۱ \Rightarrow f^{-۱}(x)=\sqrt{x-۲}+۱$$

در حقیقت داریم :

$$\begin{cases} f^{-۱}:[۲,\infty)\to\mathbb{R} \\ f^{-۱}(x)=\sqrt{x-۲}+۱ \end{cases} \qquad D_{f^{-۱}}=[۲,+\infty) \qquad R_{f^{-۱}}=[۱,+\infty)$$

نمودار f و $f^{-۱}$ در یک دستگاه مختصات رسم شده‌اند.



تمرین

۱ تابعی از دنیای واقعی مثال بزنید که یک‌به‌یک نباشد.

۲ آیا تابع $f(x)=\frac{۲}{۵}$ وارون تابع $g(x)=\frac{۵}{۲}$ است؟

۳ به کمک رسم نمودار وارون‌پذیری توابع زیر را بررسی کنید و ضابطه تابع وارون را برای هر کدام که وارون‌پذیرند، به‌دست آورید:

الف) $f(x)=(x+۵)^۲ \quad , \quad x\geq -۵$

ب) $f(x)=-|x-۱|+۱ \quad , \quad x\geq ۲$

پ) $f(x)=(x-۳)^۲$

ت) $f(x)=\sqrt{x+۲}-۳$

۴ اگر سنگی از ارتفاع ۱۰۰ متری سقوط کند، ارتفاع آن (h برحسب متر) بعد از t ثانیه از رابطهٔ $h(t)=۱۰۰-۵t^۲$ به‌دست می‌آید.

الف) دامنه و برد h را به‌دست آورید.

ب) چرا h تابعی یک به یک است؟

پ) تابع وارون h را به‌دست آورید.

۵ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که وارون‌پذیر نباشد و برای هر عدد حقیقی x، $x<f(x)$.

۶ وارون تابع $f(x)=-\frac{۱}{۲}x+۳$ را بیابید و نمودار f و وارون آن را رسم کنید.

آبشار پیران (استان کرمانشاه)

درس ۴

اعمال روی توابع

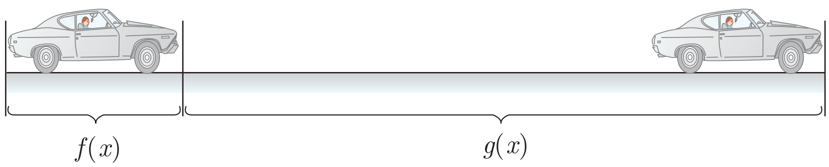
همان‌گونه که عمل‌های جمع و ضرب در مورد دو عدد یا دو چندجمله‌ای انجام‌پذیر است، برای دو تابع نیز چنین اعمالی قابل انجام است. در فعالیت زیر مثالی واقعی از این موضوع بررسی می‌شود.

فعالیت

فرض کنید خودرویی با سرعت ثابت در بزرگراهی درحال حرکت است. اگر خودرو با سرعت x کیلومتر بر ساعت حرکت کند، مسافتی که در «زمان عکس‌العمل» طی می‌کند از تابع $f(x)=\frac{7}{10}x$ به‌دست می‌آید که در آن مقدار تابع برحسب متر است.
همچنین مسافتی که خودرو پس از فشار دادن پدال ترمز تا توقف کامل طی می‌کند از تابع $g(x)=\frac{1}{100}x^2$ به‌دست می‌آید که در آن مقدار تابع برحسب متر است و x سرعت خودرو برحسب کیلومتر بر ساعت است.

الف) اگر خودرویی با سرعت ۱۰۰ کیلومتر برساعت حرکت کند، پس از دیدن مانع، تا توقف کامل چه مسافتی طی می‌شود؟

ب) اگر سرعت خودرو x کیلومتر بر ساعت باشد، تابعی بنویسید که مسافت طی شده توسط خودرو پس از رؤیت مانع توسط راننده و ترمز کردن را نمایش دهد. این تابع را با $h(x)$ نمایش دهید.



پ) اگر این خودرو پس از پیمودن ۶۰ متر متوقف شود، با چه سرعتی درحال حرکت بوده است؟

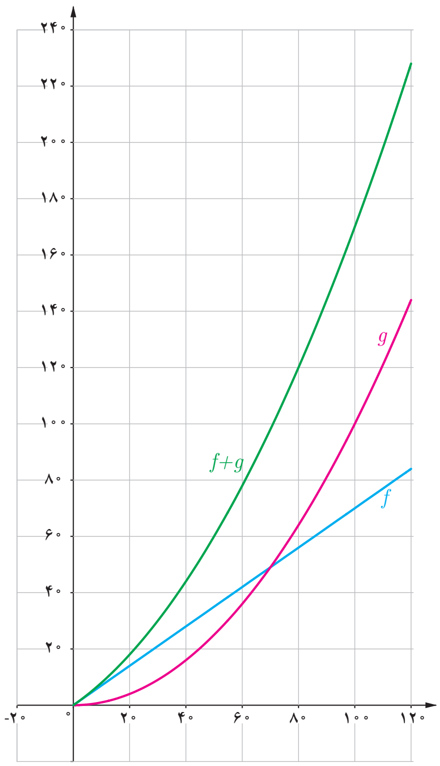
فاصله زمانی لحظه‌ای که راننده با یک مانع روبه‌رو می‌شود تا لحظه فشار دادن پدال ترمز را «زمان عکس‌العمل» می‌نامند.

مجموع فاصلهٔ طی شده در طول زمان عکس‌العمل و فاصله طی شده پس از ترمزکردن را «فاصله دید توقف[1]» می‌نامند. این فاصله در طراحی جاده‌ها و بزرگراه‌ها کاربرد دارد.

۱ ــ برای تعیین فاصله دید توقف، فاصله عکس‌العمل ترمز مبتنی بر زمان ۲/۵ ثانیه و شتاب کاهنده ۳/۴ متر بر مجذور ثانیه مورد استفاده قرار می‌گیرد.

اگر f و g دو تابع باشند، $f+g$ تابعی است که دامنهٔ آن مجموعهٔ $D_f \cap D_g$ است و به‌صورت زیر تعریف می‌شود :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad x \in D_f \cap D_g$$



در فعالیت قبل دامنه f و دامنه g درحالت کلی مجموعهٔ $\mathbb{R}$ است، ولی در این مسئلهٔ واقعی دامنهٔ تابع مجموعه‌ای مانند $[۰,۱۲۰]$ است. بنابراین دامنه $f+g$ نیز چنین است.

نمودارهای سه تابع f ، g و $f+g$، فعالیت قبل، در شکل روبه‌رو رسم شده است.

رابطه بین این توابع را به کمک نمودار آنها توضیح دهید.

کار در کلاس

۱ اگر $f(x) = x + ۲$ و $g(x) = \sqrt{x-۱}$ ، $f+g$ را محاسبه کنید. دامنهٔ تابع $f+g$ را به‌دست آورید.

۲ اگر $f = \{(۱,۲), (-۲,۵), (۰,۷)\}$ و $g = \{(۱,۵), (۲,۴), (۰,-۱)\}$

ابتدا دامنهٔ $f+g$ را به‌دست آورید و سپس $f+g$ را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهید.

به‌طور کلی اگر f و g دو تابع باشند توابع $f+g$ ، $f-g$ ، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ به‌صورت زیر تعریف می‌شوند :

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \qquad D_{f+g} = D_f \cap D_g$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \qquad D_{f-g} = D_f \cap D_g$$

$$(f.g)(x) = f(x) . g(x) \qquad D_{f.g} = D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \qquad D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x \mid g(x) = ۰\}$$

مثال : اگر $f(x)=\sqrt{x+۲}$ و $g(x)=\sqrt{۳-x}$ و $h(x)=\frac{x+۲}{۲x+۱}$ توابع $f+g$، $g-h$، gh و $\frac{f}{g}$ را محاسبه کنید و دامنهٔ آنها را به‌دست آورید. کدام‌یک از مقادیر $(f+g)(۲)$ و $(f+g)(۵)$ وجود دارند؟

حل : ابتدا دامنه هریک از توابع را به‌دست می‌آوریم :

$$D_f=[-۲,\infty) \qquad D_g=(-\infty,۳] \qquad D_h=\mathbb{R}-\left\{-\frac{۱}{۲}\right\}$$

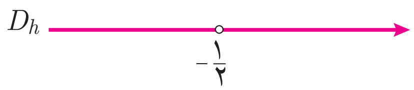
$(f+g)(۲)=۳$ ولی $(f+g)(۵)$ وجود ندارد.

$$D_{f+g}=D_f\cap D_g=[-۲,۳] \qquad (f+g)(x)=f(x)+g(x)=\sqrt{x+۲}+\sqrt{۳-x}$$

$$D_{g.h}=D_g\cap D_h=(-\infty,۳]-\{-\frac{۱}{۲}\} \qquad (g.h)(x)=g(x)h(x)=(\sqrt{۳-x})(\frac{x+۲}{۲x+۱})$$

$$D_{g-h}=D_g\cap D_h=(-\infty,-\frac{۱}{۲})\cup(-\frac{۱}{۲},۳] \qquad (g-h)(x)=g(x)-h(x)=\sqrt{۳-x}-\frac{x+۲}{۲x+۱}$$

$$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\,|\,g(x)=۰\}=[-۲,۳]-\{۳\} \qquad (\frac{f}{g})(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\sqrt{x+۲}}{\sqrt{۳-x}}$$



فعالیت

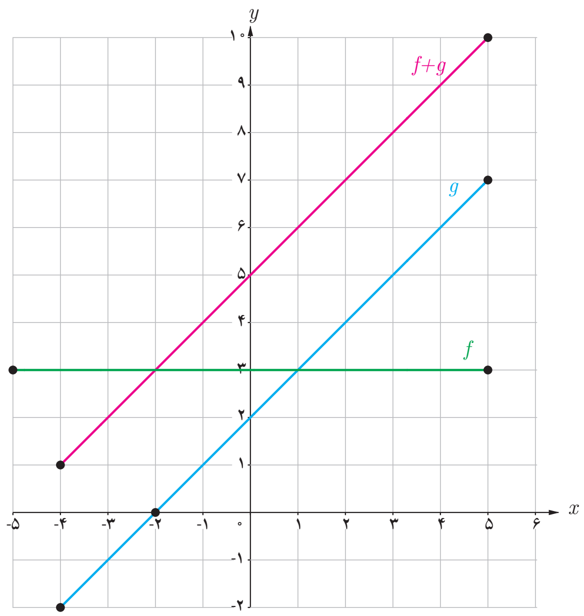
ـ در شکل روبه‌رو نمودارهای دو تابع f و g داده شده‌اند.

الف) دامنهٔ f و دامنهٔ g و ضابطه‌های f و g را بنویسید.

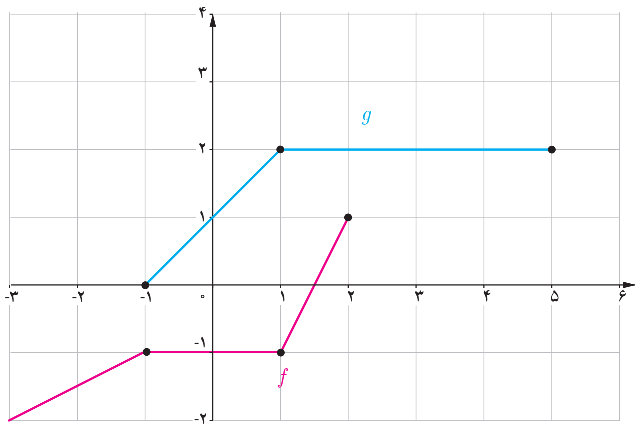
ب) دامنه و ضابطه توابع $f+g$، $f-g$، $f.g$ و $\frac{f}{g}$ را به‌دست آورید.

پ) نمودار $f+g$ در شکل رسم شده است. توضیح دهید چگونه این نمودار را رسم کرده‌ایم.

ت) توضیح دهید بقیه نمودارهای توابع داده شده در قسمت (ب) را چگونه می‌توان رسم کرد.



کار در کلاس



نمودارهای توابع f و g داده شده است.

الف) مقادیر $(f+g)(1)$ و $(f+g)(-1)$ را به‌دست آورید.

ب) با استفاده از نمودارهای f و g نمودار تابع $f+g$ را در همین شکل رسم کنید.

پ) ضابطه توابع $f+g$ ، f و g را به‌دست آورید.

ت) نمودار $f+g$ را به کمک ضابطه آن رسم کنید و با (ب) مقایسه کنید.

ترکیب توابع

با داشتن دو تابع f و g به شیوه‌ای دیگر هم می‌توان تابع جدیدی ساخت. در فعالیت زیر با این موضوع آشنا می‌شویم.

فعالیت

تابع $f(x)=\frac{۵}{۹}(x-۳۲)$ درجه فارنهایت را به درجه سانتی‌گراد تبدیل می‌کند.

الف) $f(۳۲)=۰$ به چه معنی است؟ ۵۰ درجهٔ فارنهایت چند درجه سانتی‌گراد است؟

ب) تابع $g(x)=x+۲۷۳$ درجه سانتی‌گراد را به درجهٔ کلوین تبدیل می‌کند. $g(۰)=۲۷۳$ به چه معنی است؟

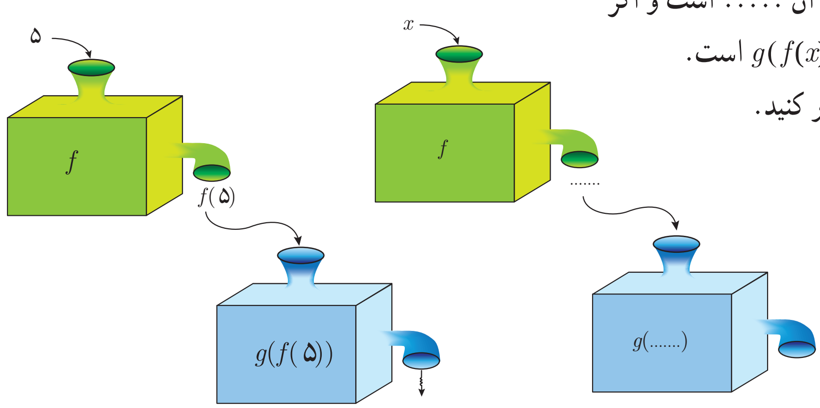
پ) مطابق نمودارهای داده شده می‌توانیم f و g را همانند دو ماشین درنظر بگیریم. یکی از ماشین‌ها فارنهایت را به سانتی‌گراد و دیگری سانتی‌گراد را به کلوین تبدیل می‌کند. به کمک نمودارها نشان دهید که ۵ درجهٔ فارنهایت معادل چند درجهٔ کلوین است؟

$f(۵)=\ldots\ldots$

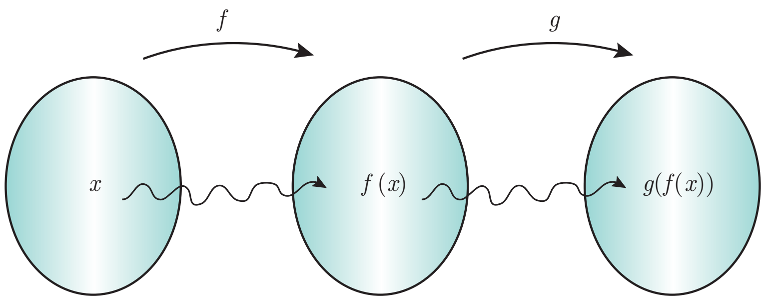
$g(f(۵))=g(\ldots)$

ت) اگر x ورودی تابع f باشد، خروجی آن ..... است و اگر ورودی تابع g، ...... باشد خروجی آن $g(f(x))$ است.

ث) ت را با تکمیل نمودارهای زیر تکرار کنید.



نمودارهای صفحه قبل را به‌صورت زیر هم می‌توان نمایش داد :



اما $g(f(x))$ را چگونه می‌توان محاسبه کرد؟ داریم :

$$g(f(x)) = g(\frac{۵}{۹}(x-۳۲))$$

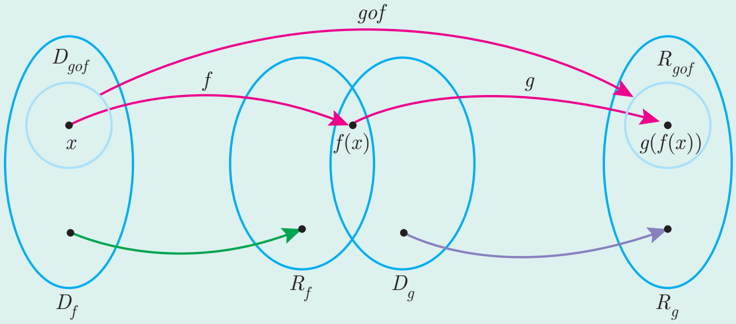
و می‌دانیم تابع g به هر ورودی ۲۷۳ واحد اضافه می‌کند. پس :

$$g(f(x)) = \frac{۵}{۹}(x-۳۲)+۲۷۳$$

این یک تابع جدید است که درجه فارنهایت را به کلوین تبدیل می‌کند و به دلیل شیوهٔ محاسبه آن با gof (بخوانید جی‌اواف) نمایش داده می‌شود. در حقیقت gof نیز همانند ماشینی عمل می‌کند که ورودی x را به $g(f(x))$ تبدیل می‌کند.

اگر f و g دو تابع باشند ترکیب g با f را با gof نمایش می‌دهیم و آن را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم : به شرط آنکه مقادیر f در دامنه g قرار داشته باشند :

$$(gof)(x) = g(f(x))$$



و

$$D_{gof} = \{x \in D_f | f(x) \in D_g\}$$

به‌طور مشابه ترکیب f با g یعنی fog را می‌توان تعریف کرد.

کار در کلاس

اگر $f(x) = x^۲ + ۱$ و $g(x) = ۲x + ۳$

الف) دامنه و ضابطه تابع‌های fog و gof را به‌دست آورید.

ب) آیا تابع‌های gof و fog مساوی‌اند؟

مثال : اگر داشته باشیم $f(x) = \sqrt{x-۱}$ و $g(x) = x^۲ + ۳$، دامنه و ضابطهٔ توابع fog و gof را به‌دست آورید.

حل : داریم،

$$D_g = \mathbb{R} \text{ و } D_f = [۱,\infty)$$

$$(fog)(x) = f(x^۲+۳) = \sqrt{x^۲+۳-۱} = \sqrt{x^۲+۲}$$

$$D_{fog} = \left\{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \in [۱,\infty)\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^۲+۳ \geq ۱\right\} = \left\{x \in \mathbb{R} \mid x^۲ \geq -۲\right\} = \mathbb{R}$$

$$D_{gof} = \left\{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\right\} = \left\{x \in [۱,\infty) \mid \sqrt{x-۱} \in \mathbb{R}\right\} = [۱,\infty)$$

$$(gof)(x) = g(\sqrt{x-۱}) = (\sqrt{x-۱})^۲ + ۳$$

توجه کنید که gof برای اعداد کمتر از ۱ تعریف نشده است. به‌طور مثال $(gof)(\frac{۱}{۲})$ یا $(gof)(۰)$ معنی ندارد. با این شرط $(gof)(x)$ را به‌صورت زیر هم می‌توان نمایش داد :

$$(gof)(x) = x - ۱ + ۳$$

$$(gof)(x) = x + ۲ \qquad x \in [۱,\infty)$$

کار در کلاس

اگر $f = \{(۱۱,۷), (-۲,۴), (۳,-۵), (۲,-۵)\}$ و $g = \{(۲,۱۱), (۴,-۲), (۶,۳), (۳,۲)\}$، ابتدا D_{fog} و D_{gof} و سپس توابع fog و gof را محاسبه کنید.

تمرین

۱ اگر $f(x)=۴x$ و $g(x)=۲-x$، توابع $\frac{f}{g}$ ، $f-g$ و fog را به همراه دامنهٔ آنها به‌دست آورید.

۲ برای دو تابع $f(x)=\frac{۱}{x-۳}$ و $g(x)=\frac{۴}{x}$ تابع fog و دامنهٔ آن را به‌دست آورید.

۳ کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام یک نادرست است؟

الف) اگر $g(۴)=۷$ و $f(۷)=۵$ آن‌گاه $(fog)(۴)=۳۵$

ب) اگر $f(x)=x+۴$ و $g(x)=۳x$ آن‌گاه $(\frac{f}{g})(۲)=۱$

پ) اگر $g(x)=۲x-۱$ و $f(x)=\sqrt{x}$ آن‌گاه $(fog)(۵)=g(۲)$

ت) برای هر دو تابع f و g داریم: $fog=gof$

ث) اگر $f(x)=x^۲-۴$ و $g(x)=\sqrt{x^۲-۴}$ ، آن‌گاه $(fog)(۵)=-۲۵$ و $(fog)(x)=-x^۲$

ج) برای هر دو تابع f و g داریم: $fg=gf$

۴ فرض کنیم $\begin{cases} g:\mathbb{N}\to\mathbb{N} \\ g(n)=۲n \end{cases}$ و $f:A\to\mathbb{N}$ به این صورت تعریف شود: $f=\{(۱,۲),(۲,۳),(۳,۵),(۴,۷)\}$ که در آن $A=\{۱,۲,۳,۴\}$، توابع $f+g$ و gof را به‌دست آورید.

۵ اگر $f=\{(-۴,۱۳),(-۱,۷),(۰,۵),(\frac{۵}{۲},۰),(۳,-۵)\}$ و $g=\{(-۴,-۷),(-۲,-۵),(۰,-۳),(۳,۰),(۵,۲),(۹,۶)\}$ توابع $f+g$ و $f-g$ و $\frac{f}{g}$ را به‌دست آورید.

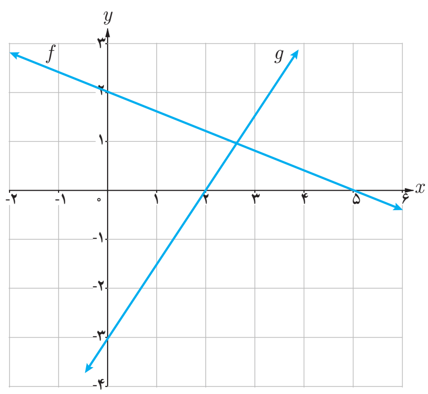
۶ اگر $f(x)=\sqrt{x^۲+۵}$ و $g(x)=\sqrt{۴-x^۲}$ ، دامنه و ضابطهٔ توابع fog و gof را به‌دست آورید.

۷ اگر $f(x)=x^۲-۹$ و $g(x)=x+۳$، ضابطه $\frac{f}{g}$ و دامنهٔ آن در ادامه محاسبه شده‌اند. چه اشتباهی در محاسبه رخ داده است؟

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{x^۲-۹}{x+۳}=\frac{(x-۳)(x+۳)}{x+۳}=x-۳ \quad , \quad D_{\frac{f}{g}}=\mathbb{R}$$

۸ اگر $f(x)=۲x+۵$ ، $f^{-۱}(x)$ ، $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ را به‌دست آورید.

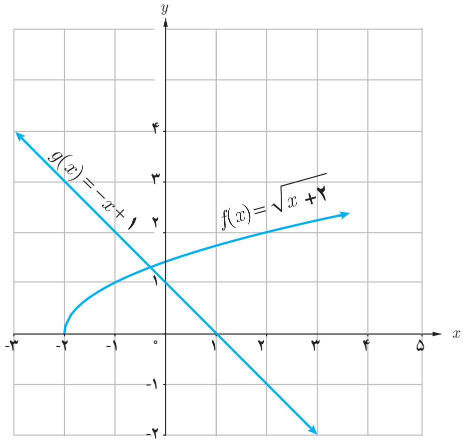
۹ نمودار توابع f و g داده شده‌اند. ضابطهٔ $f+g$ ، $f-g$ و fg را محاسبه کنید.



۱۰ با توجه به نمودار مقابل، هرکدام از عبارت‌های داده شده را در صورت امکان محاسبه کنید.

الف) $(f+g)(۲)$ ب) $(f+g)(-۳)$ پ) $(fg)(\frac{۱}{۲})$

ت) $(fog)(-۴)$ ث) $(\frac{f}{g})(۰)$ ج) $(gof)(-۱)$



۱۱ نشان دهید که وارون (معکوس) هر تابع خطی به‌صورت $y=ax+b$ $(a\neq ۰)$ باز هم یک تابع خطی است.

۱۲ تابع $f(x)=\frac{۵}{۹}(x-۳۲)$ درجه فارنهایت را به درجه سانتی‌گراد تبدیل می‌کند. تابعی بنویسید که درجه سانتی‌گراد را به عنوان ورودی دریافت کند و درجه فارنهایت را به عنوان خروجی تحویل دهد.

۱۳ در تصاویر زیر طرح جلد چند کتاب پرفروش در حوزهٔ خاطرات دفاع مقدس را می‌بینید:

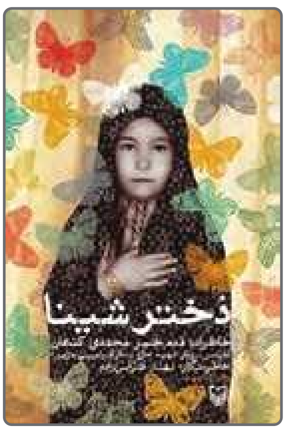
یکی از این کتاب‌ها در چاپ اول ۱۰ هزار نسخه و در هر یک از چاپ‌های دیگر ۷ هزار نسخه تولید شده است.

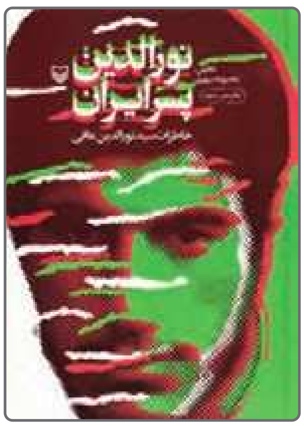
کتاب دیگر در چاپ اول ۲۰ هزار نسخه و در هر یک از چاپ‌های بعدی ۹ هزار نسخه به‌چاپ رسیده است.

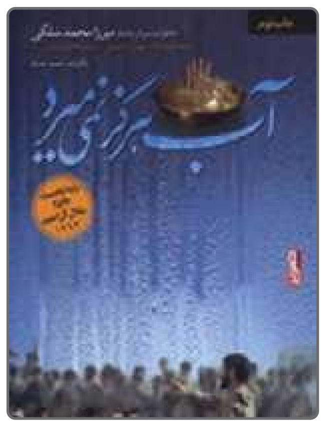
الف) تابع‌هایی بنویسید که تعداد نسخه‌های چاپ شده هر یک از این دوکتاب را برحسب شماره چاپ نمایش دهند.

ب) تابعی بنویسید که مجموع نسخه‌های چاپ شدهٔ هر دو کتاب را نمایش دهد.

پ) نمودار هر سه تابع را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم کنید.







فصل ۳

توابع نمایی و لگاریتمی

توابع نمایی در تخمین قدمت اشیای باستانی کاربرد دارند.

درس ۱

تابع نمایی

آیا تاکنون با خود فکر کرده‌اید که دانشمندان چگونه قدمت یک شیء باستانی یا یک فسیل را پیدا می کنند؟ در بدن هر موجود زنده کربن ۱۴ موجود است که با مرگ آن موجود، کربن ۱۴ شروع به از بین رفتن می کند. بنابراین با اندازه‌گیری مقدار کربن باقی‌مانده، می‌توان سن آن شیء یا موجود را پیدا کرد. در حل این‌گونه مسائل از تابع نمایی استفاده می‌شود.

فعالیت

یک توده باکتری را در محیط کشت در نظر بگیرید. فرض کنید با نمونه‌گیری از این جامعه، مشخص شده است که جرم باکتری‌ها در هر ساعت دو برابر می‌شود. اگر جرم باکتری‌ها را پس از t ساعت با $m(t)$ نشان دهیم و با ۱ گرم شروع کنیم یعنی $m(۰)=۱$، آن‌گاه باتوجه به جدول، به پرسش‌های زیر پاسخ دهید.

تقسیم دوتایی نوعی تولید مثل است که به تولید زاده‌هایی یکسان منجر می‌شود.

الف) در زمان‌های $t=$ ۶ و $t=$ ۵ جرم باکتری‌ها را به‌دست آورید.

ب) پس از چند ساعت جرم باکتری‌ها ۲۵۶ گرم می‌شود؟ پس از چند ساعت به ۱۰۲۴ گرم می‌رسد؟

پ) آیا از اعداد این جدول می‌توان الگویی را برای محاسبه جرم باکتری‌ها در هر زمان به‌دست آورد؟

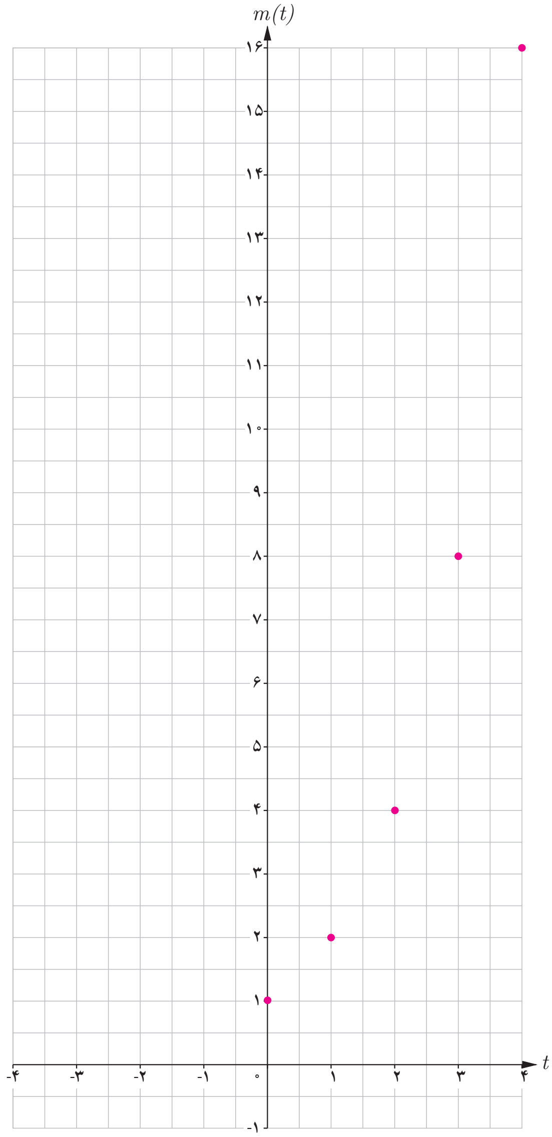
جدول (۱)

$m(t)$ جرم باکتری‌ها	t زمان (ساعت)
۱	۰
۲	۱
۴	۲
۸	۳
۱۶	?
?	۵
?	۶
⋮	⋮
۱۰۲۴	?

اگر بخواهیم جرم باکتری‌ها را در مرحلهٔ یازدهم یا مرحله‌ای بالاتر پیدا کنیم، قطعاً محاسبات، خیلی دشوارتر و وقت‌گیر خواهد شد. برای ساده‌تر شدن محاسبات، جدول (۱) را بر اساس توان‌های ۲، بازنویسی می‌کنیم تا جدول (۲) حاصل شود. در جدول (۲) به جای علامت سؤال‌ها اعداد مناسب قرار دهید.

جدول (۲)

t	$m(t)$
۰	$۲^{۰}=۱$
۱	$۲^{۱}=۲$
۲	$۲^{۲}=۴$
۳	?
⋮	⋮
?	$۲^{۹}=?$



نمودار روبه‌رو رابطهٔ بین زمان و جرم باکتری‌ها را نشان می‌دهد.
با توجه به فعالیت صفحهٔ قبل، جرم باکتری‌ها در پایان ساعت اول، دوم، ... و nام از دنبالهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$۲^{۱}, ۲^{۲}, ۲^{۳}, \dots, ۲^{n}.$$

به عبارت دیگر، جرم باکتری‌ها برحسب زمان t، از رابطه $m(t)=۲^{t}$ به‌دست می‌آید.

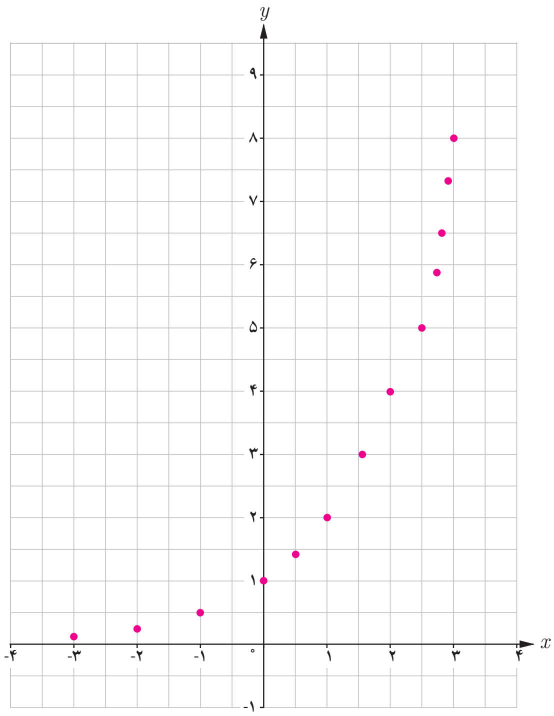
فعالیت

در نمودار فعالیت قبل، طول نقاط مشخص شده اعداد صحیح نامنفی هستند. می‌توان نقاطی از آن نمودار، با طول اعداد گویا را نیز به‌دست آورد.

الف) جاهای خالی جدول را با قرار دادن اعداد مناسب پر کنید.

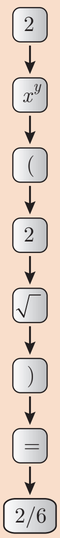
x	-۳	-۲	-۱	۰	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۲}{۳}$	۱	$\frac{۳}{۲}$	۲	۳
۲^{x}	$۲^{-۳}$	...	...	$۲^{۰}$	$۲^{\frac{۱}{۳}}$	...	$۲^{\frac{۲}{۳}}$	...	$۲^{\frac{۳}{۲}}$	...	...
$f(x)$	$\frac{۱}{۸}$	...	...	...	$\sqrt[۳]{۲}\simeq ۱/۲۶$	$\sqrt{۲}\simeq ۱/۴$	$\sqrt[۳]{۴}\simeq ۱/۵۶$	...	$\sqrt{۸}\simeq ۲/۸۳$	...	...

ب) نقاط به‌دست آمده را در یک صفحهٔ شطرنجی مشخص کنید (برخی از نقاط در دستگاه مشخص شده‌اند).



خواندنی

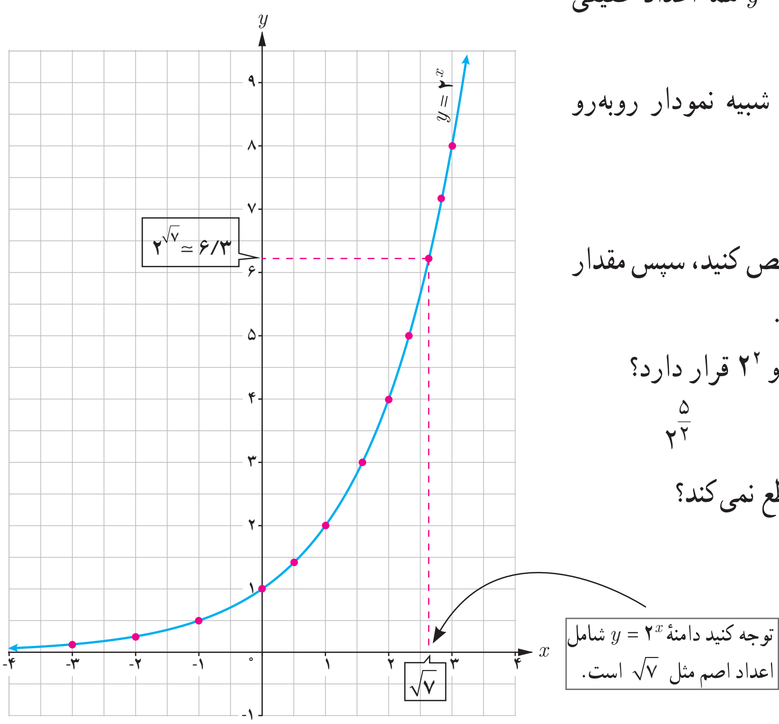
به دلیل افزایش حجم محاسبات در زندگی روزمره، بیش از گذشته به ماشین حساب نیازمندیم. برای محاسبه $۲^{\sqrt{۲}}$ مراحل روبه‌رو را انجام می‌دهیم:



اکنون مقادیر $۲^{۰/۵}$، $۳^{\sqrt{۵}}$، $۲^{۱+\sqrt{۲}}$ و $۳^{۱-\sqrt{۵}}$ را تا دو رقم اعشار با استفاده از ماشین حساب به‌دست آورید.

همان‌طور که ملاحظه می‌شود دامنهٔ تابع $y=۲^x$ همهٔ اعداد حقیقی و برد آن همواره اعداد مثبت است.

اگر تعداد نقاط خیلی زیاد شوند، شکلی شبیه نمودار روبه‌رو حاصل می‌شود.



پ) چرا نمودار روبه‌رو یک تابع است؟

ت) نقطهٔ $x=\sqrt{۲}$ را روی محور xها مشخص کنید، سپس مقدار تقریبی $۲^{\sqrt{۲}}$ را با استفاده از نمودار پیدا کنید.

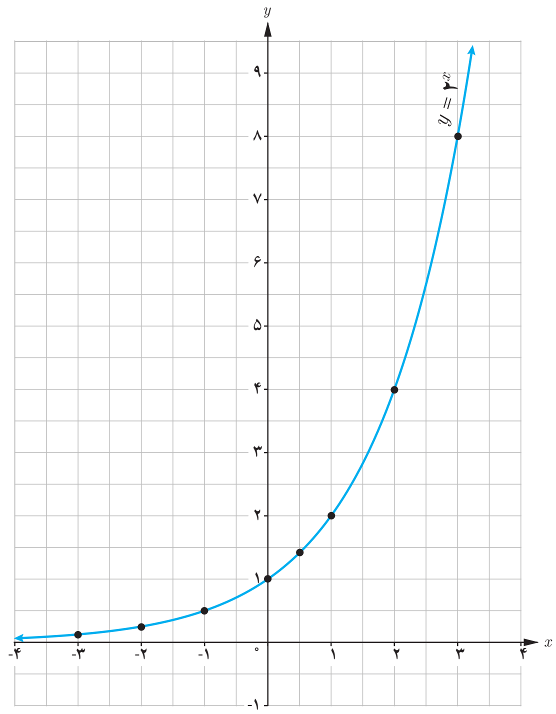
ث) کدام‌یک از اعداد زیر، بین دو عدد $۲^۳$ و $۲^۲$ قرار دارد؟

$۲^{\frac{۵}{۲}}$ $\quad$ $۲^{\frac{۳}{۲}}$ $\quad$ $۲^۵$ $\quad$ $۲^{-۱}$

ج) چرا نمودار تابع $y=۲^x$ محور xها را قطع نمی‌کند؟

کار در کلاس

الف) نمودار تابع $y=\left(\frac{1}{2}\right)^x$ را رسم کنید و آن را با نمودار $y=2^x$ مقایسه کنید.



ب) دامنه و برد تابع را به‌دست آورید.

هر تابع با ضابطه $f(x)=a^x$، که در آن a عددی مثبت و مخالف یک است را یک تابع نمایی می‌نامیم.

پ) نقطه $\left(0/5\,,\,(\frac{1}{2})^{0/5}\right)$ را روی نمودار مشخص کنید.

مثال : توابع زیر همگی نمایی هستند :

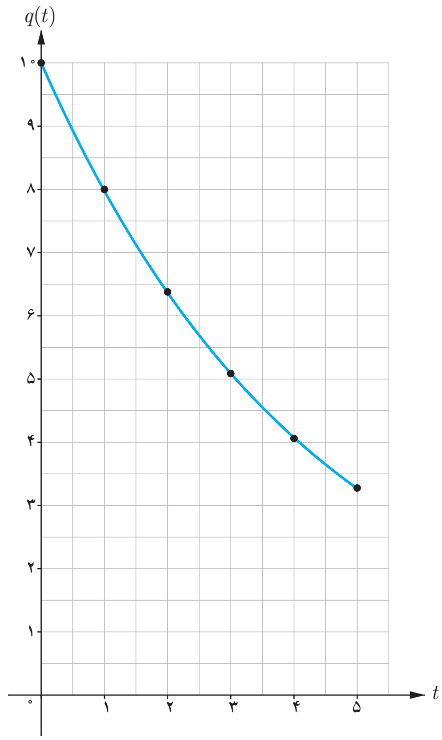
$$g(x)=(\tfrac{1}{2})^x \;,\; h(x)=(\tfrac{3}{2})^x \;,\; f(x)=(3/14)^x$$

تذکر : در حالت کلی هر تابع با ضابطه $h(x)=ka^x$ $(k\neq 0\,,\,a>0\,,\,a\neq 1)$ **رفتار نمایی** دارد. به‌عنوان مثال، توابع $f(x)=3\times 2^x$ یا $g(x)=(\frac{2}{5})^{x-1}$ رفتار نمایی دارند.

مثال : اگر ۱۰ گرم نمک را به مقدار کمی آب اضافه کنیم، مقدار نمک حل نشده در آب پس از t دقیقه از رابطه $q(t)=10\left(\frac{4}{5}\right)^t$ به‌دست می‌آید. بنابراین پس از مثلاً ۴ دقیقه، مقدار نمک حل نشده در آب برابر است با :

$$q(4)=10\left(\frac{4}{5}\right)^4 \simeq 4/096gr$$

نمودار این تابع برای $0\leq t\leq 5$ در شکل روبه‌رو رسم شده است.



مثال : فرض کنید Q جرم یک مقدار کربن ۱۴ برحسب گرم با نیمه عمر ۵۷۳۰ سال باشد (یعنی پس از ۵۷۳۰ سال نصف مقدار معینی از آن از بین می‌رود). مقدار این کربن بعد از t سال از رابطه $Q(t)=10\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{5730}}$ به‌دست می‌آید.

الف) در لحظه $t=0$ داریم $Q(0)=10\,gr$ و بعد از ۲۰۰۰ سال داریم

$$Q(2000)=10\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2000}{5730}}\simeq 7/85\,gr$$

ب) اگر $t=5730$، آن‌گاه $Q(5730)=10\times\frac{1}{2}=5\,gr$ یعنی بعد از ۵۷۳۰ سال، مقدار کربن ۱۴ نصف می‌شود.

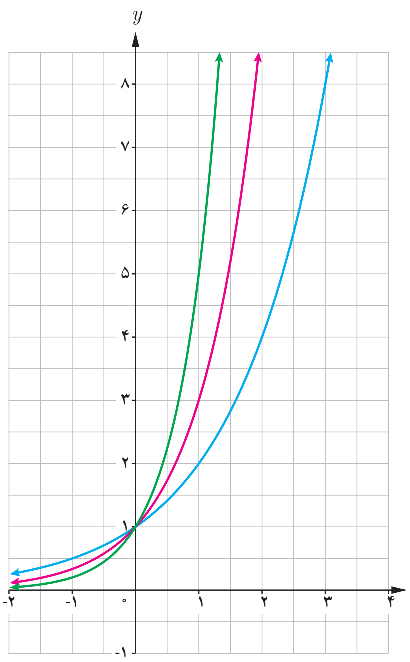
کار در کلاس

۱ نمودارهای سه تابع $f(x)=2^x$، $g(x)=3^x$ و $h(x)=5^x$ در شکل (۱) رسم شده‌اند. ضابطه هر تابع را روی نمودار آن بنویسید.

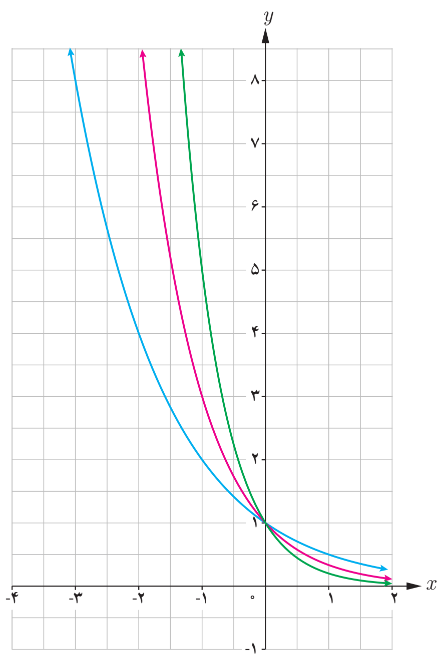
۲ دامنه و برد هر تابع را بنویسید.

۳ آیا این توابع یک‌به‌یک هستند؟ چرا؟

۴ نمودارهای توابع $u(x)=\left(\frac{1}{2}\right)^x$، $v(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ و $t(x)=\left(\frac{1}{5}\right)^x$ در شکل (۲) رسم شده‌اند. ابتدا ضابطه هر یک را روی نمودار آن بنویسید و سپس دامنه و برد آنها را به‌دست آورید. آیا این توابع یک‌به‌یک هستند؟



شکل (۱)



شکل (۲)

۵

الف) اعداد مقابل را از کوچک به بزرگ مرتب کنید :

$$۲^{۴}, (\frac{۱}{۲})^{۲}, ۲^{۲}, ۲^{۳}, (\frac{۱}{۲})^{۴}, (\frac{۱}{۲})^{۳}$$

ب) جاهای خالی را پر کنید :

در تابع $f(x)=a^x$ ،

ــ اگر $a>۱$، با افزایش مقدار x، مقادیر f ...... می‌یابند.

ــ اگر $۰<a<۱$، با افزایش مقدار x، مقادیر تابع f ...... می‌یابند.

در سال‌های قبل، توان‌های طبیعی، صحیح و گویای اعداد حقیقی را تعریف کرده و با ویژگی‌های مقدماتی آنها آشنا شده‌ایم. این قوانین برای توان‌های حقیقی نیز برقرارند. اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و مخالف یک و x و y دو عدد حقیقی باشند، آنگاه داریم :

۱) $a^{۰}=۱$ ۲) $a^{-x}=\frac{۱}{a^x}$ ۳) $a^x \cdot a^y=a^{x+y}$ ۴) $(a^x)^y=a^{xy}$

۵) $(ab)^x=a^x b^x$ ۶) $(\frac{a}{b})^x=\frac{a^x}{b^x}$ ۷) $\frac{a^x}{a^y}=a^{x-y}$

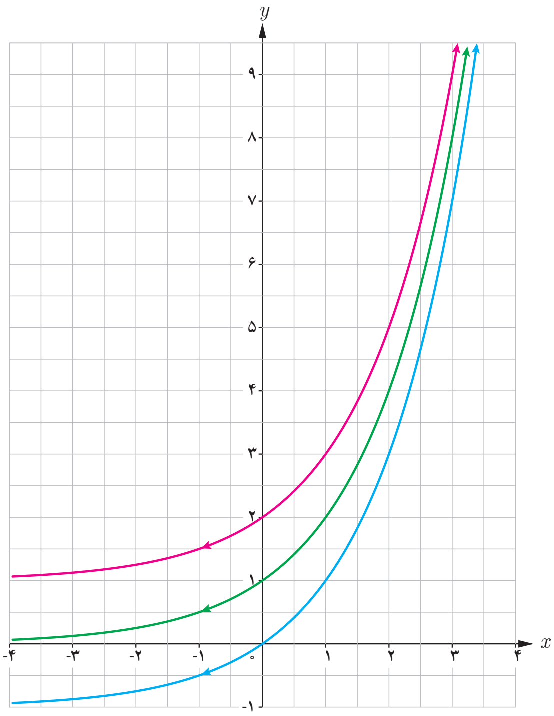
تمرین

۱ تحت شرایط ایده‌آل، جرم یک تودهٔ معین از باکتری‌ها در هر ساعت دو برابر می‌شود. فرض کنید در ابتدا ۱۰۰ میلی‌گرم باکتری وجود دارد.

الف) جرم توده پس از t ساعت را به صورت یک تابع نمایی بنویسید.

ب) جرم توده را پس از ۲۰ ساعت برآورد کنید.

۲ نمودار توابع $y=۲^x$ ، $y=۲^x+۱$ و $y=۲^x-۱$ در شکل روبه‌رو آمده‌اند. ضابطه هر تابع را روی آن مشخص کنید. با مقایسه نمودارهای توابع $y=a^x$ ، $y=a^x+۲$ و $y=a^x-۲$ با یکدیگر چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟ $(a>۱)$.



۳ داروها در بدن با ادرار دفع می‌شوند. فرض کنید ۱۰ میلی‌گرم از یک نوع دارو در بدن شخصی قرار دارد و مقدار آن پس از t ساعت از رابطه $A(t)=۱۰(۰/۸)^t$ به‌دست می‌آید.

الف) مقدار دارو پس از ۸ ساعت چقدر است؟

ب) چه درصدی از دارو در هر ساعت از بین می‌رود؟

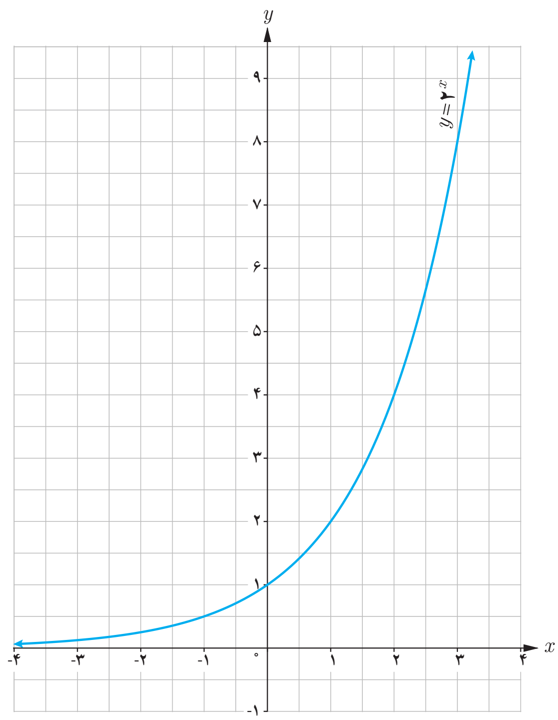
۴ الف) سه عدد بین اعداد $۳^{۲/۵}$ و $۳^{\sqrt{۱۰}}$ پیدا کنید.

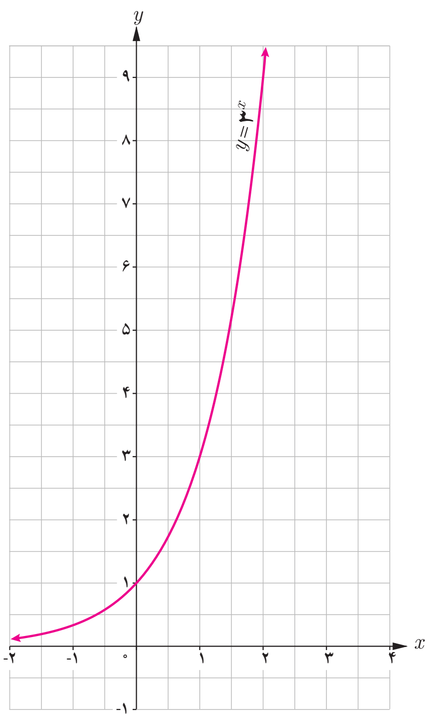
ب) نامعادلهٔ توانی $۴^{۲x-۱} > \frac{۱}{۱۰۲۴}$ را حل کنید.

پ) اگر x، y و z سه عدد حقیقی باشند، به‌طوری که $a^x>a^y>a^z$ ، آن‌گاه چه رابطه‌ای بین x و y و z برقرار است؟ $(a>۱)$.

۵ ابتدا مقدار تقریبی هر عدد را به کمک نمودار پیدا کنید. سپس به کمک ماشین حساب، درستی پاسخ خود را بررسی کنید.

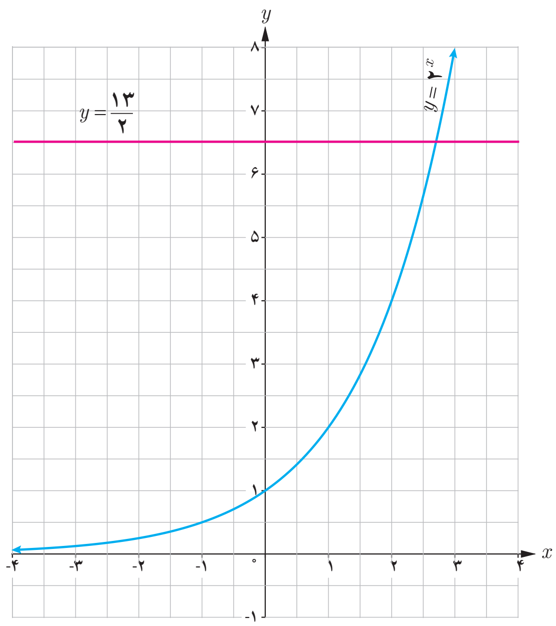
الف) $۳^{۱-\sqrt{۲}}$ ب) $۲^{۱/۲۵}$ پ) $۳^{\frac{۳}{۲}}$





۶ الف) در شکل زیر خط $y=\frac{۱۳}{۲}$ نمودار $y=۲^x$ راقطع کرده است. طول نقطه برخورد بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟چرا؟

ب) خط $y=\sqrt{۷}$ را رسم کنید. طول نقطه برخورد این خط و نمودار $y=۲^x$ بین کدام دو عدد صحیح قرار دارد؟



۷ در تصفیهٔ آب، داخل فیلترها، لایهٔ تمیزکننده‌ای قرار دارد که حدود ۳۰ درصد از ناخالصی‌ها را حذف می‌کند و در نتیجه ۷۰درصد از ناخالصی‌ها باقی می‌ماند. اگر داخل این فیلترها، دو لایه قرار دهیم، آنگاه $۰/۴۹ = ۰/۷ \times ۰/۷$ یا ۴۹ درصد از ناخالصی‌ها باقی می‌ماند.

الف) درصد ناخالصی‌های موجود در آب از کدام رابطه به‌دست می‌آید؟

ب) با قرار دادن چند لایه در فیلتر می‌توان بیش از ۹۶درصد از ناخالصی‌های آب را از بین برد؟

درس ۲

تابع لگاریتمی و لگاریتم

بار دیگر، مسئله افزایش جرم توده باکتری در محیط کشت را که در ابتدای این فصل مطرح شد، در نظر بگیرید. می‌خواهیم بدانیم در چه زمانی وزن باکتری‌ها ۵۱۲ گرم است، یعنی اگر $m(t)=۵۱۲$، می‌خواهیم t را بیابیم. چون تابع $m(t)=۲^t$ یک تابع یک به یک است، پس وارون‌پذیر است و از این رو $t=m^{-۱}(۵۱۲)$. به جدول‌های زیر نگاه کنید:

خواندنی

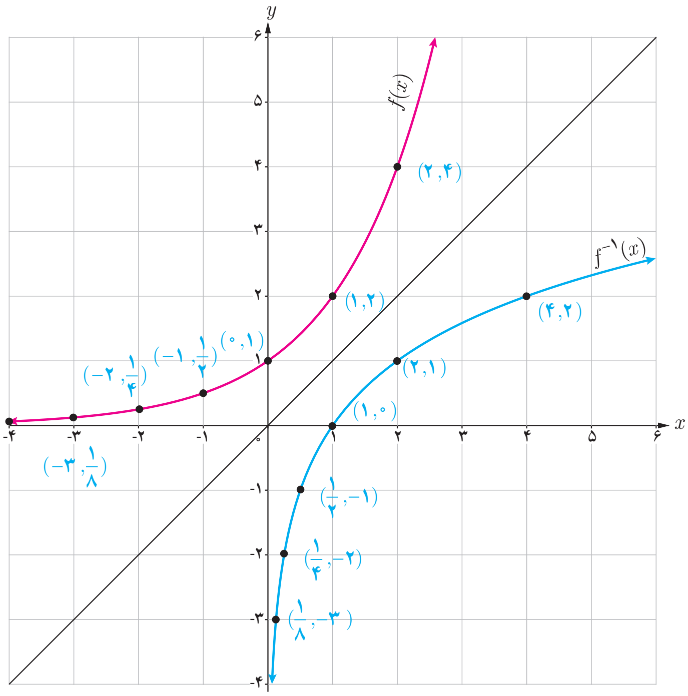
جان نپر (John Napier)

جان نپر ریاضیدان اسکاتلندی مفهوم لگاریتم را پایه‌ریزی کرد. لگاریتم برای ساده کردن محاسبات ابداع شد و در قرن ۱۶ و ۱۷ بزرگ‌ترین پیشرفت در علم حساب بود. لگاریتم در علوم زیادی کاربرد دارد. مثلاً در زلزله‌شناسی برای اندازه‌گیری شدت زلزله برحسب ریشتر کاربرد دارد. لگاریتم در حسابداری و مسائل مالی نیز کاربردهای زیادی دارد.

t (زمان)	$m^{-۱}(p)$، زمان رسیدن به جرم p
۰	۱
۱	۲
۲	۴
۳	۸
۴	۱۶
۵	۳۲

$\Rightarrow$

t (زمان)	$m(t)=p$، جرم باکتری‌ها در زمان t
۰	۱
۱	۲
۲	۴
۳	۸
۴	۱۶
۵	۳۲



نمودارهای تابع $y=f(x)=۲^x$ و تابع وارون آن در شکل روبه‌رو رسم شده‌اند. دقت کنید که برای رسم تابع وارون $y=۲^x$ کافی است قرینه نقاط روی تابع را نسبت به خط $y=x$ پیدا کنیم. به عنوان مثال، نقطه (۲,۴) روی تابع نمایی $y=۲^x$ و نقطه (۴,۲) که قرینه آن نسبت به خط $y=x$ است، روی تابع وارون آن (تابع لگاریتمی) قرار دارد. می‌توان دید:

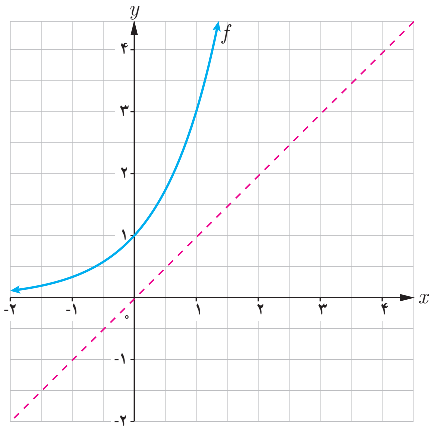
$D_f=(-\infty,+\infty)$, $R_f=(۰,+\infty)$

$D_{f^{-۱}}=(۰,+\infty)$, $R_{f^{-۱}}=(-\infty,+\infty)$

توجه کنید که دامنه f با برد $f^{-۱}$ برابر است و برد f با دامنه $f^{-۱}$.

فعالیت

۱ با توجه به نمودار تابع $f(x)=۳^x$ نمودار تابع $f^{-۱}$ را رسم کنید و جدول زیر را کامل کنید.



$f(-۲)=۳^{-۲}=\frac{۱}{۹}$	⇔	$f^{-۱}(\frac{۱}{۹})=-۲$
$f(-۱)=$	⇔	
$f(۰)=$	⇔	
$f(۱)=$	⇔	
$f(\frac{۳}{۲})=$	⇔	
$f(۲)=$	⇔	

۲ گزینهٔ درست را با ✓ و گزینه غلط را با × علامت بزنید.

ـ نقطهٔ $(\frac{۱}{۹}$ و $-۲)$ روی نمودار f قرار دارد.

ـ نقطه $(\frac{۱}{۳}$ و $-۱)$ روی نمودار $f^{-۱}$ قرار دارد.

ـ نقطهٔ $(۰$ و $۱)$ روی نمودار f قرار دارد.

ـ نقطه $(-۲$ و $\frac{۱}{۹})$ روی نمودار $f^{-۱}$ قرار دارد.

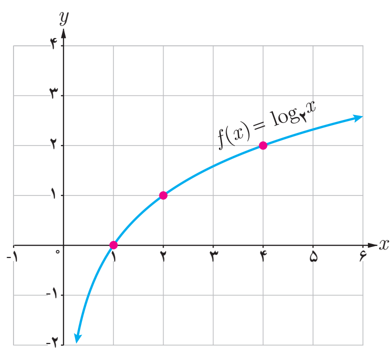
ـ تابع $f^{-۱}$ یک به یک است.

فرض کنید داریم $f(x)=۳^x$ و $y=f^{-۱}(x)$. در این صورت y را لگاریتم x در پایه ۳ می‌خوانیم و آن را با نماد $y=\log_۳ x$ نشان می‌دهیم و می‌خوانیم لگاریتم x در پایه ۳.

اگر a عددی مثبت و مخالف یک باشد، تابع نمایی $f(x)=a^x$ یک به یک است و از این رو دارای تابع وارون $f^{-۱}$ است که تابع لگاریتمی پایه a نامیده می‌شود و با نماد $y=\log_a x$ نشان داده می‌شود.

مثال : وارون تابع $f(x)=۵^x$ تابع $f^{-۱}(x)=\log_۵ x$ است.

همچنین وارون تابع $g(x)=(\frac{۱}{۳})^x$ تابع $g^{-۱}(x)=\log_{\frac{۱}{۳}} x$ است.



مثال : با توجه به نمودار $f(x)=\log_۲ x$ ، می‌توان دید :

$f(۱)=۰$

$f(۲)=۱$

$f(۴)=۲$

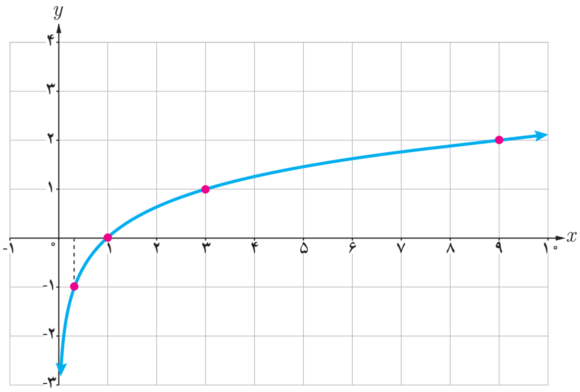
مثال: مقادیر زیر با استفاده از نمودار $f(x)=\log_3 x$ به‌دست آمده‌اند.

$f(1)=0$

$f(3)=1$

$f(\frac{1}{3})=-1$

$f(9)=2$



به‌طور کلی

$$y=\log_a x \Leftrightarrow a^y=x$$

به عنوان مثال، $\log_2 8=3$ زیرا $2^3=8$ و یا $\log_{10}1000=3$، زیرا $10^3=1000$.

همچنین $\log_{10}\frac{1}{100}=-2$ ، زیرا $\frac{1}{100}=\frac{1}{10^2}=10^{-2}$.

مثال: فرض کنید $f(x)=\log_{10}x$. مقدار تابع f را در هر یک از نقاط زیر در صورت وجود، حساب کنید.

الف) $x=10$ ب) $x=100$

پ) $x=-2$ ت) $x=1000$

حل:

الف) $f(10)=\log_{10}10=1$، زیرا $10^1=10$.

ب) $f(100)=\log_{10}100=2$، زیرا $10^2=100$.

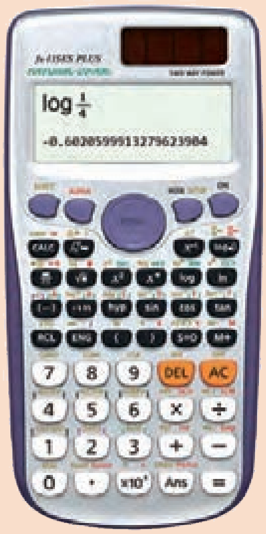
پ) $f(-10)$ موجود نیست، زیرا لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود.

ت) $f(1000)=\log_{10}1000=3$، زیرا $10^3=1000$.

خواندنی

برای محاسبه لگاریتم در ماشین‌حساب کافی است از دگمه log استفاده کنیم. مثلاً برای محاسبه $\log_{10}10$ ابتدا دگمه log سپس عدد ۱۰ و در نهایت دگمه = را می‌زنیم. همچنین برای محاسبه $\log_{10}\frac{1}{4}$ به‌صورت روبه‌رو عمل می‌کنیم: و ماشین‌حساب مقدار آن‌را به‌صورت زیر نشان می‌دهد.

log → (→ 1 → / → 4 →) → = → -0/6020600



مثال : با توجه به تعریف لگاریتم، جدول زیر را داریم :

$۳^{۴} = ۸۱$	$۲^{۱۰} = ۱۰۲۴$	$۵^{۳} = ۱۲۵$	$۶^{۲} = ۳۶$	$۲^{۵} = ۳۲$
$\log_{۳} ۸۱ = ۴$	$\log_{۲} ۱۰۲۴ = ۱۰$	$\log_{۵} ۱۲۵ = ۳$	$\log_{۶} ۳۶ = ۲$	$\log_{۲} ۳۲ = ۵$

مثال : تساوی‌های زیر را به صورت توانی بیان کنید.

الف) $\log_{۷} ۱ = ۰$　　　　ب) $\log_{۳} \frac{۱}{۲۷} = -۳$

حل :

الف) اگر $\log_{۷} ۱ = ۰$ ، آن‌گاه طبق تعریف داریم $۷^{۰} = ۱$.

ب) اگر $\log_{۳} \frac{۱}{۲۷} = -۳$ ، آن‌گاه طبق تعریف داریم $۳^{-۳} = \frac{۱}{۲۷}$.

مثال : مقادیر زیر را محاسبه کنید :

الف) $\log_{۲} ۳۲$　　　　ب) $\log_{۶} ۶$　　　　پ) $\log_{۴} ۱$

حل :

الف) اگر $a = \log_{۲} ۳۲$ ، آن‌گاه طبق تعریف داریم $۲^{a} = ۳۲$ و از این رو $a = ۵$.

ب) اگر $b = \log_{۶} ۶$ ، آن‌گاه $۶^{b} = ۶$ و در نتیجه $b = ۱$.

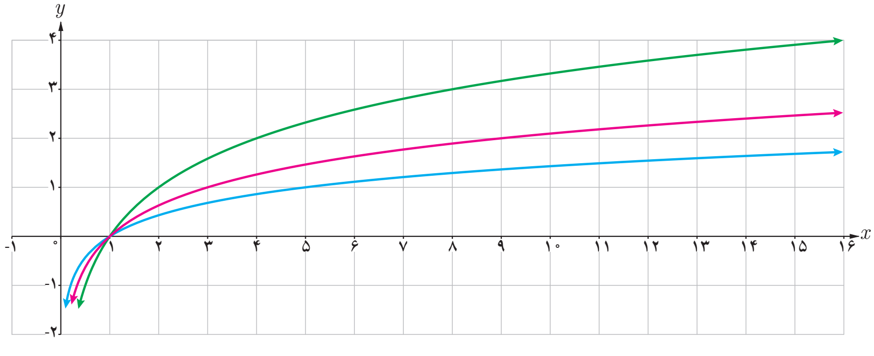
پ) اگر $c = \log_{۴} ۱$ ، آن‌گاه $۴^{c} = ۱$ و در نتیجه $c = ۰$.

کار در کلاس

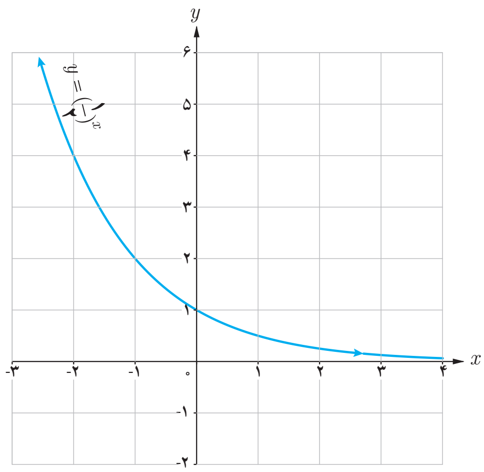
۱ الف) نمودار سه تابع $f(x) = \log_{۲} x$ ، $g(x) = \log_{۳} x$ و $h(x) = \log_{۵} x$ در شکل زیر رسم شده‌اند. ضابطه هریک را روی نمودار آن بنویسید.

ب) محل دقیق هریک از نقاط زیر را روی نمودار متناظرش نشان دهید.

$(۱۶, ۴)$　و　$(۹, ۲)$　و　$(۵, ۱)$

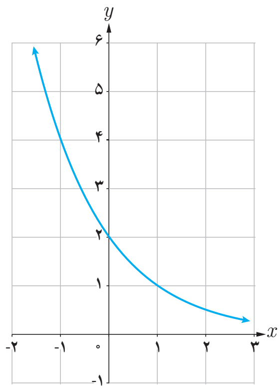


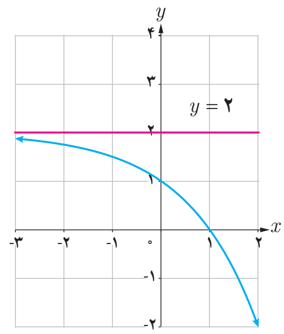
پ) با توجه به نمودار $y=\left(\frac{۱}{۲}\right)^x$ نمودار $y=\log_{\frac{۱}{۲}} x$ را رسم کنید و سپس آنها را با هم مقایسه کنید.

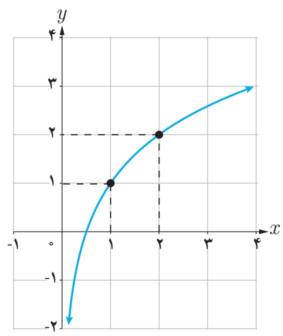


۲ مشخص کنید هریک از نمودارهای زیر به کدام‌یک از ضابطه‌های زیر تعلق دارد؟

الف) $y=-۲^x+۲$ ب) $y=\log_۲ x+۱$ پ) $y=(\frac{۱}{۲})^{x-۱}$







۳ حاصل عبارت‌های زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log_۳ ۸۱$ ب) $\log_{\frac{۱}{۶}} \frac{۱}{۶}$ پ) $\log_۲ ۸$

تمرین

۱ با استفاده از تعریف لگاریتم، حاصل عبارت‌های زیر را بیابید :

$$\log_{۱۰} ۰/۰۱ \quad , \quad \log_{۶} \frac{۱}{۶} \quad , \quad \log_{۲} \sqrt{۲} \quad , \quad \log_{۷} \sqrt[۳]{۷^{۲}}$$

۲ نمودار تابع $y = \log_a x$ را برای دو حالت $a>۱$ و $۰<a<۱$ با هم مقایسه کنید.

۳ الف) خط $y=۲۷$ نمودار تابع $y=۳^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

ب) خط $y=۱۰۰$ نمودار تابع $y=(۰/۰۱)^x$ را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

۴ نمودار دو تابع $f(x)=x^{۲}$ و $g(x)=۲^x$ را رسم کنید و سپس آنها را با هم مقایسه کنید.

۵ عبارت درست را با ✓ و عبارت غلط را با × علامت بزنید.

ــ لگاریتم اعداد مثبت کمتر از ۱ همواره عددی منفی است.

ــ لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود.

ــ تابع لگاریتم، تابعی یک‌به‌یک است.

ــ تابع لگاریتم محور y ها را قطع می‌کند.

ــ اگر نقطه (b,d) روی نمودار $y=a^x$ قرار داشته باشد، آنگاه (d,b) روی نمودار $y = \log_a x$ قرار دارد.

ــ اگر $a>b>۰$ آنگاه $\log_{۱۰} a < \log_{۱۰} b$.

۶ نمودار تابع‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y = ۱+\log_{۳} x$ ب) $y=-۳^x-۲$ پ) $y = ۴(\frac{۱}{۳})^x$

درس ۳

ویژگی‌های لگاریتم و حل معادله‌های لگاریتمی

ویژگی‌های لگاریتم

برای حل یک مسئله واقعی که در بیان ریاضی آن لگاریتم به‌کار رفته است، نیازمند استفاده از روابطی هستیم که بین لگاریتم‌ها برقرار است. به همین جهت در این قسمت به بیان و اثبات روابط و ویژگی‌های لگاریتم می‌پردازیم. برخی از ویژگی‌های سادهٔ لگاریتم به‌صورت زیر هستند :

مثال :
الف) $\log_a 1 = 0$، زیرا $a^0=1$
ب) $\log_a a = 1$، زیرا $a^1=a$

مثال : نشان دهید برای اعداد حقیقی مثبت a، b و c، که $c\neq 1$، همواره داریم :

$$\log_c ab=\log_c a+\log_c b$$

حل : فرض کنیم $x=\log_c a$ و $y=\log_c b$. پس طبق تعریف، $a=c^x$ و $b=c^y$. از این رو $ab=c^x.\ c^y=c^{x+y}$ و طبق تعریف لگاریتم داریم $\log_c ab = x+y$. در نتیجه $\log_c ab = \log_c a + \log_c b$.

مثال : با توجه به مثال قبل، $\log_a b^2 = \log_a (b\times b) = \log_a b + \log_a b = 2\log_a b$. به‌طور مشابه $\log_a b^3 = \log_a (b^2\times b) = (\log_a b + \log_a b) + \log_a b = 3\log_a b$ و به‌طور کلی اگر $a,b>0$ ، $a\neq 1$ و n یک عدد حقیقی باشد، آنگاه

$$\log_a b^n = n\log_a b$$

به خصوص $\log_a a^n=n$.

قرارداد : همواره منظور از $\log a$ عبارت است از $\log_{10} a$. همچنین، لگاریتم در پایه ۱۰ را لگاریتم اعشاری می‌نامیم.

مثال : فرض کنیم $a=\log 2$. نشان دهید $\log 5=1-a$.

حل : می‌دانیم $\log_{10} 10 = 1$، پس طبق مثال بالا، $1 = \log 10 = \log 2 + \log 5$ و در نتیجه $\log 5 = 1-\log 2=1-a$.

کار در کلاس

۱ نشان دهید که اگر $a, b, c > 0$ و $c \neq 1$، آنگاه

$$\log_c \frac{a}{b} = \log_c a - \log_c b$$

۲ اگر $a = \log 2$ و $b = \log 3$، حاصل عبارت‌های زیر را برحسب a و b بنویسید.

الف) $\log 0/75$ ب) $3\log \sqrt[3]{4} - \log 250$ پ) $\log 0/005$

معادلات لگاریتمی

در برخی از مدل‌سازی‌ها به یک معادلهٔ شامل عبارت‌های لگاریتمی می‌رسیم؛ مانند محاسبهٔ شدت زلزله، مشخص کردن ضعیف‌ترین صدای قابل شنیدن یا آستانه شنوایی، پیش‌بینی تعداد جمعیت یک جامعه پس از زمان مشخص و محاسبهٔ نیمه عمر عناصر رادیواکتیو. در حل بسیاری از این معادلات، جواب‌ها با استفاده از خواص لگاریتم به‌دست می‌آیند که به این معادلات، معادلات لگاریتمی می گوییم. منظور از حل معادله لگاریتمی، یافتن مقدار یا مقادیری از متغیر است که در معادله صدق کند. تساوی‌های زیر نمونه هایی از معادلات لگاریتمی هستند :

$$\log(x+1) = 3 \quad , \quad \log_2 x = \log_2 r \quad , \quad \log_3 x + \log_3(x-1) = \log_3 12$$

در حالت کلی داریم :

اگر $a > 0$ و $a \neq 1$ ، آنگاه از تساوی $\log_a x = \log_a y$ می‌توان نتیجه گرفت $x = y$ و بالعکس، اگر $x, y > 0$ و $x = y$ آنگاه $\log_a x = \log_a y$.

مثال : معادلهٔ لگاریتمی $\log_5(x^2 - 2) = \log_5 x$ را حل کنید.

حل : به سادگی می‌توان دید $x = x^2 - 2$ و از این‌رو $x^2 - x - 2 = 0$. از طرفی $x^2 - x - 2 = (x+1)(x-2)$ و در نتیجه ریشه‌های معادله اخیر برابر است با ۲ و ۱-. قسمت مهم حل یک معادله لگاریتمی **آزمایش کردن جواب‌هاست**. در این مثال، چون لگاریتم اعداد نامثبت تعریف نشده است، تنها جواب قابل قبول $x = 2$ است (چرا؟).

مثال : معادله لگاریتمی $3\log_5 x - \log_5 4 = \log_5 16$ را حل کنید.

حل : می‌دانیم $3\log_5 x - \log_5 4 = \log_5\left(\frac{x^3}{4}\right)$ ، بنابراین $\log_5\left(\frac{x^3}{4}\right) = \log_5 16$ و در نتیجه $\frac{x^3}{4} = 16$. از این رو $x^3 = 16 \times 4 = 64$. بنابراین $x = 4$. با جای‌گذاری $x = 4$ در معادله بالا می‌توان دید این جواب قابل قبول است.

فعالیت

معادله‌های لگاریتمی زیر را حل کنید :

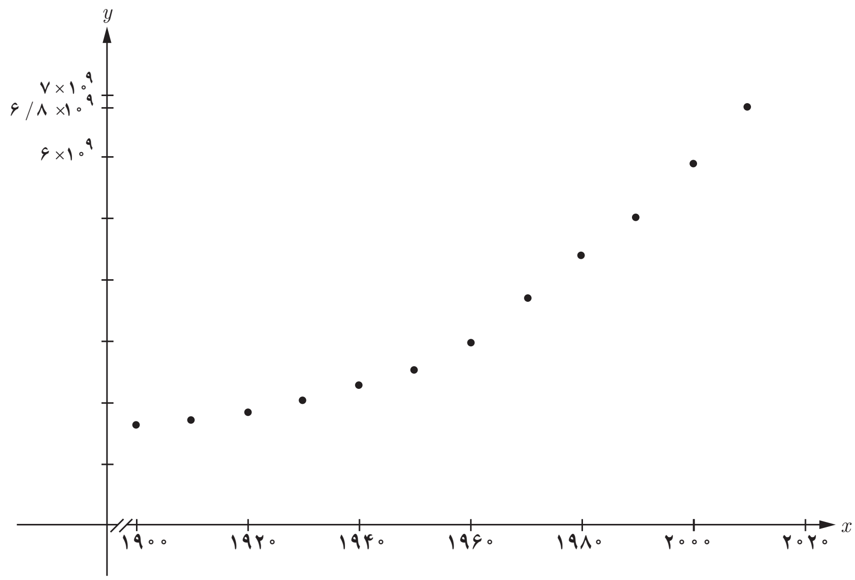
الف) $\log_{۵}(۲x-۱) = \log_{۵}x$ ب) $\log_{۳}(x-۱)+\log_{۳}\left(\frac{x}{۲}+۱\right)=۲$ پ) $\log x+\log(x+۳)=۱$

کاربردهای لگاریتم

مثال : جدول زیر، جمعیت جهان را در قرن بیستم و پایان دهه اول قرن بیست‌ویکم نشان می‌دهد.

سال	۱۹۰۰	۱۹۱۰	۱۹۲۰	۱۹۳۰	۱۹۴۰	۱۹۵۰	۱۹۶۰	۱۹۷۰	۱۹۸۰	۱۹۹۰	۲۰۰۰	۲۰۱۰
جمعیت (میلیون)	۱۶۵۰	۱۷۵۰	۱۸۶۰	۲۰۷۰	۲۳۰۰	۲۵۶۰	۳۰۴۰	۳۷۱۰	۴۴۵۰	۵۲۸۰	۶۰۸۰	۶۸۰۰

الف) باتوجه به جدول، نمودار جمعیت جهان برحسب سال به صورت زیر است :



ب) اگر محور xها بیانگر سال و محور yها بیانگر جمعیت باشد[1]، تابع جمعیت در انتهای هر سال به صورت $g(x)=۰/۰۰۸(۱/۰۱۳۷۶)^{x}$ برآورد می‌شود. به سادگی دیده می‌شود که جمعیت در پایان سال ۲۰۱۶ تقریباً برابر است با :

$g(۲۰۱۶)=۰/۰۰۸\,(۱/۰۱۳۷۶)^{۲۰۱۶} \simeq ۷,۳۸۵,۰۷۴,۵۱۲$.

در اینجا می‌توان حدس زد که در چه سالی جمعیت جهان به ۸ میلیارد خواهد رسید، زیرا داریم :

$$g(x)= ۸\times۱۰^{-۳}\,(۱/۰۱۳۷۶)^{x}=۸\times۱۰^{۹}$$

$$\Rightarrow (۱/۰۱۳۷۶)^{x}=۱۰^{۱۲} \Rightarrow x\log ۱/۰۱۳۷۶=\log ۱۰^{۱۲} \Rightarrow x=\frac{۱۲}{\log ۱/۰۱۳۷۶}\simeq ۲۰۲۱$$

$$(\log ۱/۰۱۳۷۶ \simeq ۰/۰۰۵۹۳۵)$$

۱ــ دقت کنید که نقطه ابتدایی دامنه تابع $g(x)$ نقطه ۱۹۰۰ است.

مثال : ریشتر، مقیاسی برای اندازه گیری بزرگی زمین لرزه و نماد میزان انرژی آزاد شده در زلزله است. اگر بزرگی زمین لرزه برابر M در مقیاس ریشتر باشد، مقدار انرژی آزاد شده بر حسب ارگ (Erg) از رابطهٔ زیر حاصل می‌شود :

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵M.$$

از این رابطه می توان محاسبه کرد که مقدار انرژی آزاد شده در یک زلزله ۶/۶ ریشتری برابر است با :

$$\log E = ۱۱/۸ + ۱/۵\ (۶/۶) = ۲۱/۷ \Rightarrow E = ۱۰^{۲۱/۷}\ Erg.$$

خواندنی

جالب است بدانید که :
در زلزله ۶/۶ ریشتری بم (۱۳۸۲) ۹۰ درصد از سازه‌های این شهر که بیش از ۲۵۰۰ سال قدمت داشت از بین رفت. با توجه به اینکه انرژی آزاد شده در یک زلزله ۸ ریشتری معادل انفجار یک میلیارد تن TNT است. بنابراین انرژی آزاد شده در زلزله بم معادل انفجار $\frac{۶/۶\times۱۰^{۹}}{۸} = ۸۲۵\times۱۰^{۶}$ (۸۲۵ میلیون تن TNT) بوده است.

مثال : نیمه عمر یک نوع ماده هسته‌ای حدود ۲۵ سال است. اگر جرم نمونه‌ای از این ماده، ۲۴ میلی گرم باشد جدول زیر تغییرات جرم نمونه پس از t سال را نشان می‌دهد.

با توجه به جدول جرم باقی‌مانده از این نمونه بعد از گذشت t سال از رابطه $m(t) = \frac{۱}{۲^{\frac{t}{۲۵}}}(۲۴) = ۲۴\times۲^{\frac{-t}{۲۵}}$ به‌دست می‌آید.

بنابراین، به‌عنوان مثال جرم باقی‌مانده پس از ۴۰سال برابر است با :

$$m(۴۰) = ۲۴\left(۲^{-\frac{۴۰}{۲۵}}\right) \simeq ۷/۹۰ \text{ میلی گرم}$$

$m(t)$(جرم برحسب میلی‌گرم)	t (زمان برحسب سال)
۲۴	۰
$\frac{۱}{۲}(۲۴) = ۱۲$	۲۵
$\frac{۱}{۲^{۲}}\times۲۴ = ۶$	۵۰
$\frac{۱}{۲^{۳}}\times۲۴ = ۳$	۷۵
$\frac{۱}{۲^{۴}}\times۲۴ = ۱/۵$	۱۰۰

تمرین

۱ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_{۴} m^{۲} - \log_{۴} m - ۳ = ۰$

ب) $\log_{۲}(۱۲b - ۲۱) - \log_{۲}(b^{۲} - ۳) = ۲$

پ) $\log_{\frac{۱}{۱۰}}(x^{۲} - ۱) = -۱$

۲ الف) در فعالیت ۱ از درس اول این فصل، دیدیم که جرم باکتری‌ها در زمان t از فرمول $m(t) = ۲^{t}$ به‌دست می‌آید. معکوس این تابع را بنویسید و آن را تفسیر کنید.

ب) با استفاده از وارون تابع $m(t)$، برآورد کنید در چه زمانی جرم باکتری‌ها حدود ۵۰۰۰ گرم می‌شود؟

$\log ۲ \simeq ۰/۳۰۱$

۳ درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را بررسی کنید :

الف) $a^{\log_b a} = a \quad (b \neq ۱\,,\, a\,,\, b > ۰)$

ب) $\log_d abc = \log_d a + \log_d b + \log_d c \quad (d \neq ۱\,,\, a\,,\, b\,,\, c\,,\, d > ۰)$

پ) $\log x \log y = \log x + \log y$

ت) لگاریتم هر عدد مثبت، همواره عددی مثبت است.

۴ نیمه عمر عنصری چهار روز و جرم اولیه یک نمونه از آن یک گرم است.

الف) جرم $m(t)$ را که پس از t روز باقی می‌ماند، بیابید.

ب) طی چند روز، این جرم به ۰/۰۱ گرم کاهش می‌یابد؟

۵ عبارات زیر را ساده کنید. $(\log ۳ \simeq ۰/۴۷۷۱\ ,\ \log ۲ \simeq ۰/۳۰۱)$.

الف) $\log(۱۸ \times ۳۷۵)$

ب) $\log\sqrt{۰/۷۵}$

پ) $\log_{۲}\dfrac{\sqrt{۸}}{\sqrt[۴]{۲}}$

۶ اگر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \log_a x$ از نقطهٔ $(\frac{۱}{۲}, -۴)$ عبور کند، مقدار a چند است؟

۷ گزینه‌های درست را با ✓ و گزینه‌های نادرست را با × علامت بزنید.

■ $\log_b a \times \log_a b = ۱$

■ $\log ۵ = \log ۳ + \log ۲$

۸ نیمه عمر یک ماده هسته‌ای ۳۰ سال است. نمونه‌ای از این ماده ۱۲۸ میلی گرم جرم دارد. جرمی که پس از ۳۰۰ سال باقی می‌ماند چقدر است؟

فصل

۴

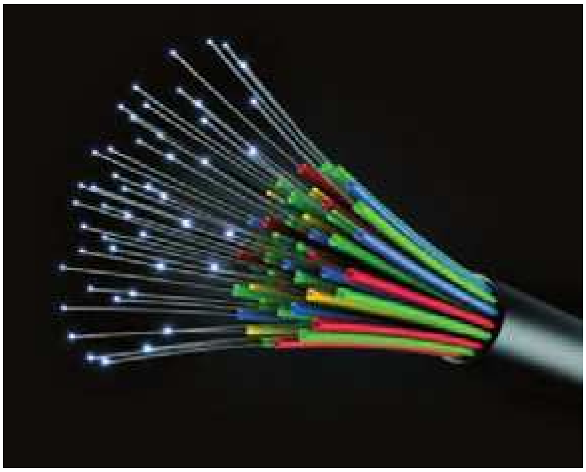
مثلثات

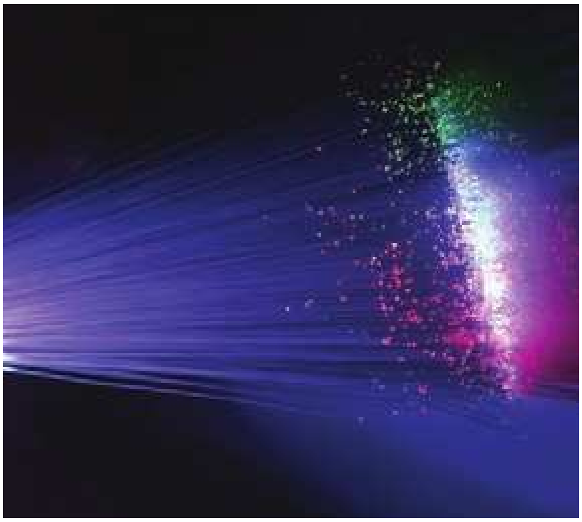
۱ رادیان

۲ نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا

۳ توابع مثلثاتی

۴ روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا





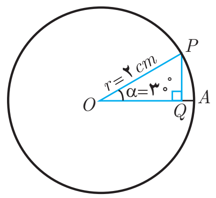
فیبرهای نوری برای انتقال داده‌ها با سرعت بسیار بالا به‌ویژه در خطوط اینترنت استفاده می‌شوند. برای طراحی این فیبرها نیاز است تا امواج نوری به کمک امواج سینوسی شبیه‌سازی شوند.
معمولاً چندین رشته از فیبرهای نوری در یک غلاف پلاستیکی محافظت می‌شود.

درس ۱

رادیان

تاکنون زاویه‌ها را برحسب «درجه» اندازه‌گیری می‌کردیم. استفاده از واحد «درجه» برای اندازه‌گیری زوایا در هندسه بسیار متداول است. اما در برخی محاسبات فنی بهتر است از واحدهای دیگری استفاده شود. در ادامه با یک واحد دیگر اندازه‌گیری زوایا، به نام رادیان، آشنا می‌شویم.

فعالیت

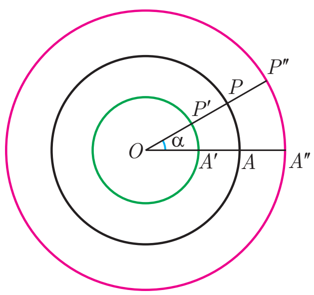


۱ دایرهٔ مقابل به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی‌متر داده شده است.

اندازه ضلع PQ در مثلث $\overset{\Delta}{OPQ}$ را با استفاده از نسبت‌های مثلثاتی سال گذشته به‌دست آورید.

۲ باتوجه به اینکه کمان 30° برابر $\frac{1}{12}$ کل محیط دایره است (چرا؟) می‌توان طول کمان روبه‌رو به زاویه α (یعنی $\overset{\frown}{PA}$) را به‌صورت زیر به‌دست آورد.

$$\overset{\frown}{PA}=\frac{1}{12}\times(\text{محیط دایره})=\frac{1}{12}\times 2\pi\times 2=\frac{4}{12}\pi=\frac{\pi}{3}\,cm$$



اکنون به مرکز O دایره‌های دیگری به شعاع‌های ۱ و ۳ سانتی‌متر رسم می‌کنیم (شکل روبه‌رو).

الف) مطابق فرمول بالا طول کمان‌های $\overset{\frown}{P'A'}$ و $\overset{\frown}{P''A''}$ را که روبه‌رو به زاویه $\alpha=30^\circ$ هستند به‌دست آورید.

$$\overset{\frown}{P'A'}=\cdots\cdots$$

$$\overset{\frown}{P''A''}=\cdots\cdots$$

ب) در هر دایره نسبت طول کمان روبه‌رو به زاویه α به شعاع آن دایره را محاسبه کنید. این نسبت‌ها با هم چه رابطه‌ای دارند؟

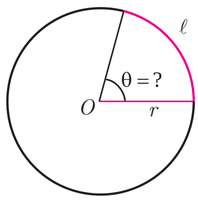
$$\frac{\overset{\frown}{PA}}{OP}=\cdots\cdots \qquad \frac{\overset{\frown}{P'A'}}{OP'}=\cdots\cdots \qquad \frac{\overset{\frown}{P''A''}}{OP''}=\cdots\cdots$$

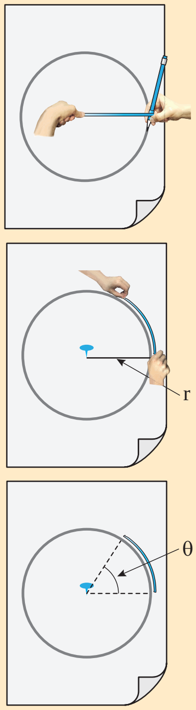
پ) اگر در شکل صفحهٔ قبل دایره‌ای به شعاع r و به مرکز O در نظر بگیریم، آیا نسبت فوق در آن دایره تغییری می‌کند؟ چرا؟ با تکمیل رابطه زیر، به این سؤال پاسخ دهید.

$$\frac{\frac{۱}{۱۲}\times ۲\pi \times r}{r} = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

در سؤال قبل دیدیم که نسبت طول کمان روبه‌رو به زاویه ۳۰° به شعاع، در همه دایره‌ها برابر مقدار ثابت ...... است. اکنون در سؤال زیر به این می‌پردازیم که این نسبت چه زمانی برابر ۱ است.

۳ در یک دایره به شعاع r، مانند شکل زیر، طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ θ (کمان ℓ) برابر طول شعاع دایره است. نسبت طول کمان به شعاع چقدر است؟ اندازهٔ زاویهٔ θ تقریباً چند درجه است؟ (از نقاله استفاده کنید)





به کمک یک تکه نخ یک دایره رسم کنید.

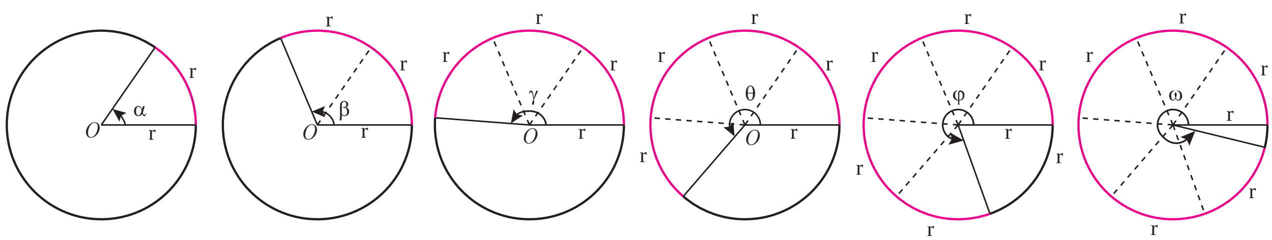
نخ را بر روی محیط دایره قرار دهید.

ابتدا و انتهای نخ را به مرکز وصل کنید تا زاویه‌ای مرکزی به‌وجود آید. توضیح دهید چرا این زاویه یک رادیان است.

همان‌طور که در فعالیت قبل مشاهده کردید نسبت طول کمان روبه‌رو به یک زاویه به شعاع دایره همواره مقداری ثابت است. از این مقدار ثابت برای بیان اندازهٔ زاویه می‌توان استفاده کرد؛ مثلاً در سؤال ۳ فعالیت قبل، این نسبت برای زاویه θ برابر یک است. در این صورت می‌گویند اندازهٔ زاویهٔ θ برابر ۱ **رادیان** است.

> یک رادیان، در هر دایره دلخواه، اندازه زاویه‌ای مرکزی است که طول کمان روبه‌رو به آن برابر طول شعاع دایره است.
> معمولاً از نماد rad برای نمایش اندازه یک زاویه بر حسب رادیان استفاده می‌شود.

در زیر زاویه‌های ۱ تا ۶ رادیان در دایره‌ای به شعاع دلخواه r رسم شده‌اند. در هر شکل به نسبت طول کمان روبه‌رو به هر زاویه به شعاع دقت کنید.



$\alpha = \frac{r}{r} = ۱\ rad$ $\quad$ $\beta = \frac{۲r}{r} = ۲\ rad$ $\quad$ $\gamma = \frac{۳r}{r} = ۳\ rad$ $\quad$ $\theta = \frac{۴r}{r} = ۴\ rad$ $\quad$ $\varphi = \frac{۵r}{r} = ۵\ rad$ $\quad$ $\omega = \frac{۶r}{r} = ۶\ rad$

مثال : اندازه یک زاویهٔ نیم صفحه ($^\circ$۱۸۰) و نیز یک زاویه قائمه ($^\circ$۹۰) برحسب رادیان چقدر است؟

حل : می‌دانیم که طول کمان روبه‌رو به زاویهٔ نیم صفحه، نصف محیط دایره است. بنابراین داریم :

$$\frac{\frac{۲\pi r}{۲}}{r}=\frac{\pi r}{r}=\pi \ rad$$

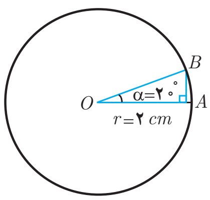
پس یک زاویه $^\circ$۱۸۰ برابر π رادیان می‌باشد. به‌طور مشابه طول کمان روبه‌رو به یک زاویه قائمه، ربع محیط دایره است. پس :

$$\frac{\frac{۲\pi r}{۴}}{r}=\frac{\frac{\pi}{۲}r}{r}=\frac{\pi}{۲} \ rad$$

همواره بین اندازه یک زاویه مانند θ برحسب رادیان و طول کمان l روبه‌رو به آن در یک دایره به شعاع r رابطه زیر برقرار است.

$$\theta=\frac{l}{r}$$

مثال : در شکل مقابل اندازهٔ زاویهٔ α را برحسب رادیان به‌دست آورید، سپس طول $\overset{\frown}{AB}$ را پیدا کنید.



حل : از مثال قبل می‌دانیم که هر زاویهٔ $^\circ$۱۸۰ برابر π رادیان است. بنابراین داریم :

$$\frac{۲۰}{\alpha\ (\text{برحسب رادیان})}=\frac{۱۸۰}{\pi} \Rightarrow \alpha=\frac{۲۰\pi}{۱۸۰}=\frac{\pi}{۹}\ rad$$

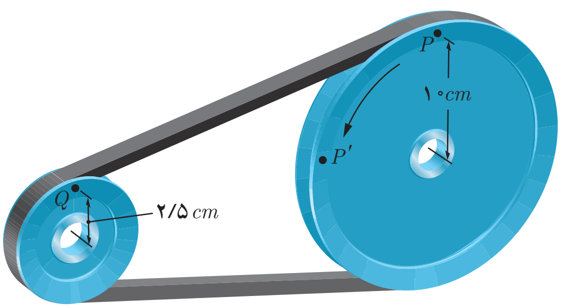
پس زاویه α برابر $\frac{\pi}{۹}$ رادیان است. اکنون برای به‌دست آوردن طول $\overset{\frown}{AB}$ داریم :

$$\alpha=\frac{\overset{\frown}{AB}}{r} \Rightarrow \frac{\pi}{۹}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} \Rightarrow \overset{\frown}{AB}=\frac{۲\pi}{۹}cm$$

اگر D اندازه زاویه‌ای برحسب درجه و R اندازه آن برحسب رادیان باشد، آنگاه :

$$\frac{D}{۱۸۰}=\frac{R}{\pi}$$

مثال : در شکل مقابل، یک تسمه دو قرقره به شعاع‌های $۱۰\,cm$ و $۲/۵\,cm$ را به هم وصل کرده است. بررسی کنید که وقتی قرقرهٔ بزرگ‌تر $\frac{\pi}{۲}$ رادیان می‌چرخد (یعنی نقطهٔ P در موقعیت P' قرار می‌گیرد) قرقرهٔ کوچک‌تر چند رادیان می‌چرخد. ($\pi rad \simeq ۳/۱۴ rad$)



حل : ابتدا مسافتی را که نقطهٔ P بر روی محیط قرقره بزرگ‌تر طی می‌کند به‌دست می‌آوریم.

$$\theta=\frac{\overset{\frown}{PP'}}{r} \Rightarrow \overset{\frown}{PP'}=r\theta=۱۰\times\frac{\pi}{۲}=۵\pi\ \ cm \simeq ۱۵/۷\,cm$$

چون هر دو قرقره با یک تسمه به هم متصل هستند پس قرقرهٔ کوچک‌تر نیز $۵\pi\ cm$ حرکت می‌کند. برای این قرقره داریم:

$$\theta=\frac{l}{r}=\frac{۵\pi}{۲/۵}=\frac{۵\pi}{\frac{۵}{۲}}=۲\pi\ rad$$

بنابراین وقتی قرقره بزرگ‌تر ربع دور می‌چرخد، قرقره کوچک‌تر یک دور کامل می‌چرخد و نقطه Q به مکان خود بازمی‌گردد.

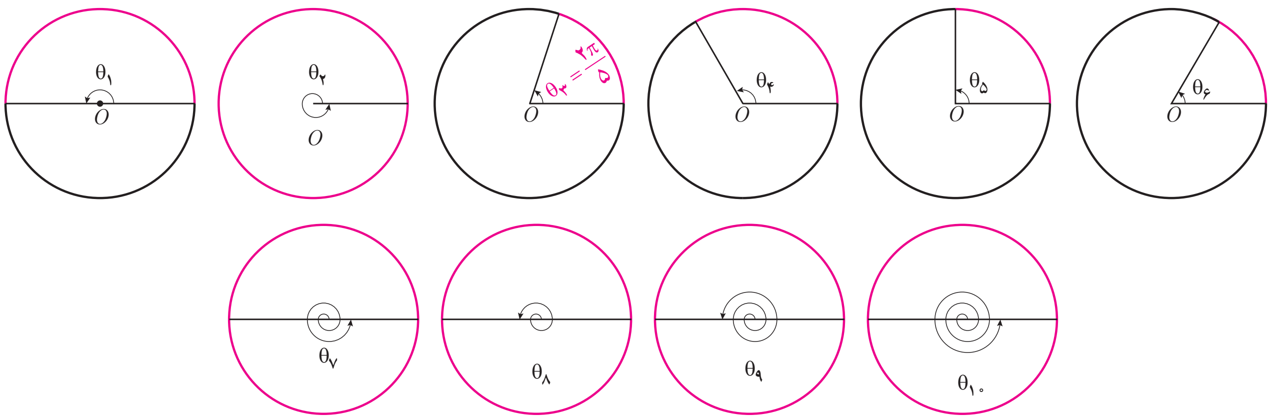
کار در کلاس

۱ در جدول روبه‌رو جاهای خالی را پر کنید.

زاویه برحسب درجه	۰°	۳۰°			۹۰°		۲۷۰°		۳۹۰°	
زاویه برحسب رادیان	۰		$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$		π		۲π		$\frac{۷\pi}{۳}$

۲ در زیر، اندازهٔ برخی از زاویه‌ها بر حسب رادیان داده شده است. مانند نمونه، آنها را با زوایای داده شده در دایره‌های مثلثاتی زیر نظیر کنید.

الف) $\frac{۲\pi}{۶}$ ب) $\frac{۲\pi}{۵}$ پ) $\frac{۲\pi}{۴}$ ت) $\frac{۲\pi}{۳}$ ث) $\frac{۲\pi}{۲}$ ج) ۲π چ) ۳π ح) ۴π خ) ۵π د) ۶π

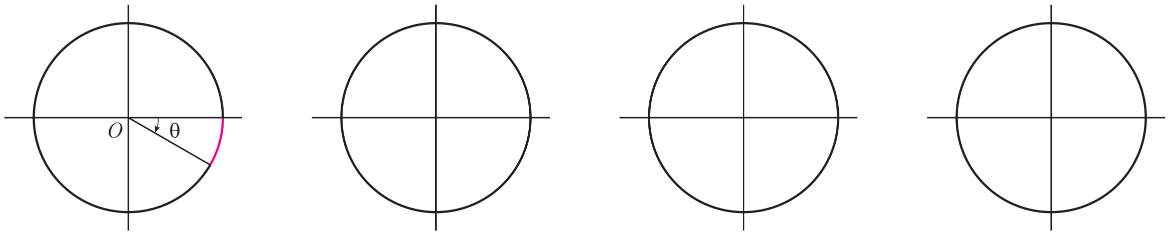


۳ در جدول روبه‌رو، که سال گذشته آن را بر حسب درجه کامل کرده‌اید، مقدار نسبت‌های مثلثاتی خواسته شده را در جاهای خالی بنویسید.

θ(رادیان) / نسبت	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۴}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	۲π
$\sin\theta$	۰				۱		
$\cos\theta$			$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$				
$\tan\theta$		$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$					
$\cot\theta$	تعریف نشده				۰		

تمرین

۱ برای هر یک از زاویه‌های زیر مشخص کنید که انتهای کمان در کدام ربع دایره مثلثاتی قرار می‌گیرد و سپس شکل تقریبی زاویه را همانند نمونه رسم کنید.



$\gamma=\pi-\frac{\pi}{۶}=$ 　 $\beta=\frac{\pi}{۲}-\frac{\pi}{۴}=$ 　 $\alpha=\pi+\frac{\pi}{۳}=$ 　 $\theta=-\frac{\pi}{۶}$

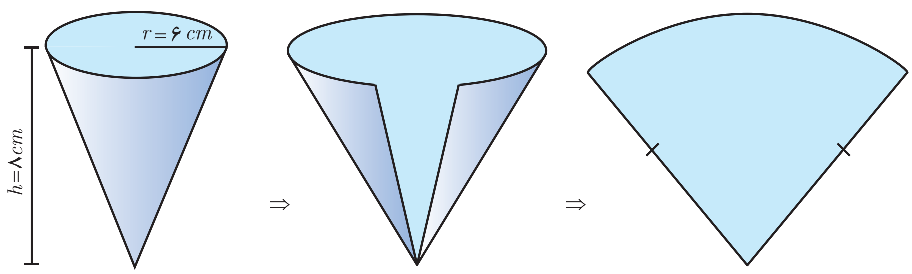
انتهای کمان در ربع .... است. 　 انتهای کمان در ربع .... است. 　 انتهای کمان در ربع .... است. 　 انتهای کمان در ربع چهارم است.

۲ طول برف پاک‌کن عقب خودرویی ۲۴سانتی‌متر است. فرض کنید برف‌پاک‌کن، کمانی به اندازه ۱۲۰° طی می‌کند. $(\pi \simeq ۳/۱۴)$

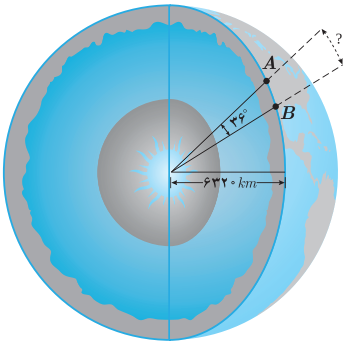
الف) اندازه کمان را برحسب رادیان به‌دست آورید.

ب) طول کمان طی شده توسط نوک برف پاک‌کن چند سانتی‌متر است؟

۳ شکل فضایی و نیز شکل گستردهٔ یک مخروط در زیر داده شده است. شعاع قاعده مخروط $r=۶\,cm$ و ارتفاع آن $h=۸cm$ می‌باشد. اندازه زاویه قطاع[۱] حاصل از شکل گسترده این مخروط چند رادیان است؟



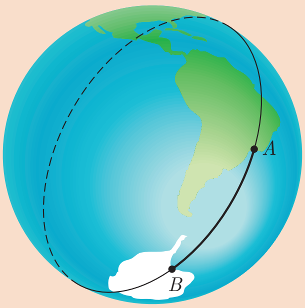
۱ــ به قسمتی از سطح دایره که بین دو شعاع و کمانی از دایره است قطاع گفته می‌شود.



۴ فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B از کرهٔ زمین، که بر روی یک نصف‌النهار قرار دارند، مطابق شکل روبه‌رو، برابر طول کمانی از دایره گذرنده از آن دو نقطه است. با داشتن اندازهٔ شعاع کره زمین فاصله بین دو نقطهٔ داده شده را بیابید.

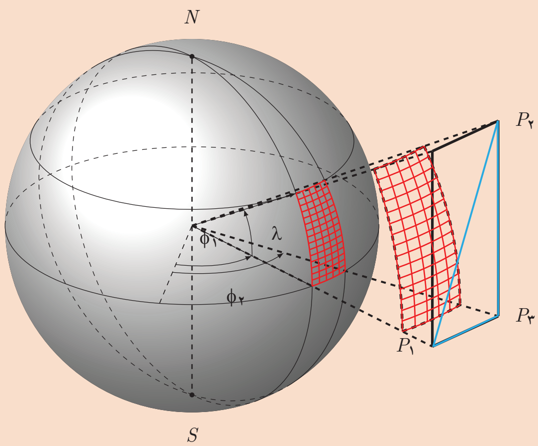
خواندنی

به فاصله بین دو نقطه داده شده در تمرین ۴ در اصطلاح فنی «فاصله ژئودزیک» دو نقطه گفته می‌شود. برای محاسبه فاصله ژئودزیک بین دو نقطه از کرهٔ زمین لزومی ندارد که آن دو نقطه بر روی یک نصف‌النهار باشند. در عمل با استفاده از سیستم مکان‌یابی جهانی (GPS) موقعیت جغرافیایی آن دو نقطه را برحسب طول و عرض جغرافیایی آنها به‌دست می‌آورند و سپس با استفاده از محاسبات پیچیده‌ای فاصله ژئودزیک بین آن دو نقطه را محاسبه می‌کنند. در تمام این محاسبات که در آن از مثلثات کروی استفاده می‌شود باید زوایا برحسب رادیان در نظر گرفته شوند، در غیر این‌صورت محاسبات به مراتب پیچیده‌تر می‌گردد. فاصله ژئودزیک بین دو نقطه از کره زمین کوتاه‌ترین فاصله‌ای است که بین آن دو نقطه می‌توان پیدا کرد. این فاصله، طول کمانی از بزرگ‌ترین دایره‌ای است که از آن دو نقطه می‌گذرد و به آن «دایرهٔ عظیمه» می‌گویند. محاسبه فاصله ژئودزیک بین دو نقطه از کره زمین در طراحی مسیرهای هوایی و دریایی و نیز هدایت ماهواره‌ها بسیار اهمیت دارد. بررسی کنید که چرا برای دو نقطه از کره زمین که روی یک نصف‌النهار قرار دارند، دایره عظیمه همان نصف‌النهار گذرنده از آن دو نقطه می‌باشد.



فاصله ژئودزیک دو نقطه از کره زمین

نصف‌النهارها دایره‌های عظیمه‌ای روی کره زمین تشکیل می‌دهند.



مثلثات کروی در طراحی مسیرهای هوایی و دریایی و نیز محاسبه سطوح و خم‌ها بسیار کاربرد دارد.

درس ۲

نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا

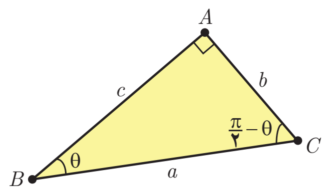
در سال گذشته به مقدار نسبت‌های مثلثاتی برای برخی از زوایای تند (مانند ۳۰°، ۴۵°، ۶۰°) و نیز زوایای مرزی (۰°، ۹۰°، ۱۸۰°، ۲۷۰°، ۳۶۰°) پرداختیم. همچنین علامت نسبت‌های مثلثاتی را در چهار ربع دایره مثلثاتی یاد گرفتیم. اکنون به مقدار این نسبت‌ها برای برخی دیگر از زوایا و رابطهٔ بین آنها می‌پردازیم.

نسبت‌های مثلثاتی زوایای متمّم

می‌دانید که به هر دو زاویه‌ای که مجموع اندازهٔ آنها ۹۰° باشد زاویه‌های متمّم می‌گویند. نسبت‌های مثلثاتی چنین زاویه‌هایی با هم ارتباط دارند. فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا این روابط را پیدا کنید.

فعالیت

یک مثلث قائم‌الزاویه دلخواه مانند شکل زیر را در نظر بگیرید.



با توجه به شکل، دو ستون روبه‌رو را همانند نمونه کامل و سپس مقادیر مساوی در دو ستون را با هم نظیر کنید.

$\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\frac{c}{a}$	$\sin\theta=\frac{b}{a}$
$\cos(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\cdots\cdots$	$\cos\theta=\cdots\cdots$
$\tan(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\cdots\cdots$	$\tan\theta=\cdots\cdots$
$\cot(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\cdots\cdots$	$\cot\theta=\cdots\cdots$

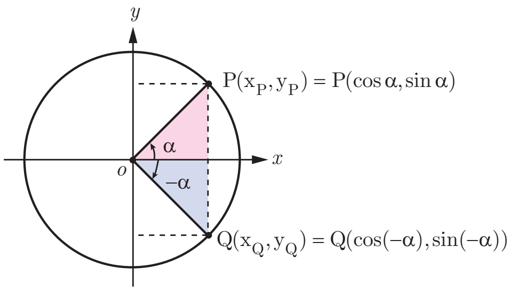
در فعالیت قبل زاویه‌های مورد بحث تند بودند. روابط به‌دست آمده در آنجا در حالت کلی نیز برقرار است. به‌طور کلی برای دو زاویه متمم θ و $\frac{\pi}{۲}-\theta$ همواره روابط روبه‌رو برقرار است.

$$\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\cos\theta$$
$$\cos(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\sin\theta$$
$$\tan(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\cot\theta$$
$$\cot(\frac{\pi}{۲}-\theta)=\tan\theta$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای قرینه

فعالیت

در دایره مثلثاتی روبه‌رو نقطه P انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α است. مختصات نقطه P برحسب نسبت‌های مثلثاتی زاویه α که در سال گذشته آموختید، داده شده است. همچنین با توجه به دستگاه مختصات واضح است که قرینه نقطه $P(x_P, y_P)$ نسبت به محور xها نقطه $Q(x_Q, y_Q) = Q(x_P, -y_P)$ می‌باشد.



الف) باتوجه به رابطهٔ بین مختصات نقاط P و Q روابط مثلثاتی زیر را مانند نمونه تکمیل کنید.

$$x_Q = x_P \Rightarrow \cos(-\alpha) = \cos\alpha$$

$$y_Q = -y_P \Rightarrow \quad ....$$

ب) طرف دوم تساوی‌های زیر را با استفاده از روابط به‌دست آمده از قسمت الف کامل کنید.

$$\tan(-\alpha) =$$

$$\cot(-\alpha) =$$

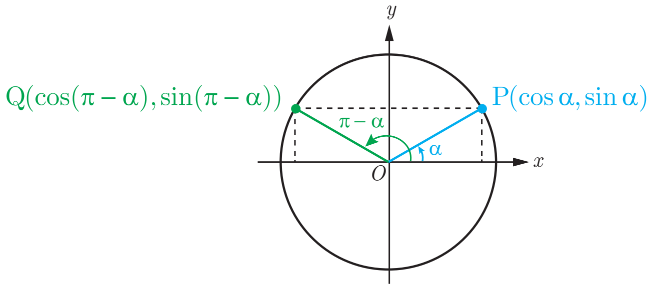
دو زاویهٔ α و $-\alpha$ قرینهٔ یکدیگرند. برای دو زاویهٔ قرینه روابط مثلثاتی زیر برقرار است.

$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha) = -\cot\alpha$$

مقادیر نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مکمل

دو زاویه را مکمل گوییم اگر مجموع آنها 180° باشد. در فعالیت بعد روابط بین مقدار نسبت‌های مثلثاتی برای چنین زاویه‌هایی را به‌دست خواهیم آورد.

فعالیت



در دایره مثلثاتی روبه‌رو نقطه $P(x_P, y_P)$ انتهای کمان روبه‌رو به زاویه α است. با توجه به دستگاه مختصات واضح است که نقطه $Q(x_Q, y_Q) = Q(-x_P, y_P)$ قرینه نقطه P نسبت به محور yها است.

الف) با توجه به مختصات نقاط P و Q روابط زیر را همانند نمونه تکمیل کنید.

$x_Q = -x_P \Rightarrow \cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$

$y_Q = y_P \Rightarrow$ ....

ب) با توجه به روابط قسمت الف، تساوی‌های زیر را تکمیل کنید.

$\tan(\pi-\alpha) =$

$\cot(\pi-\alpha) =$

از فعالیت قبل می‌توان نتیجه گرفت که بین هر دو زاویه مکمل α و π−α روابط زیر برقرار است.

$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha) = -\tan\alpha$$
$$\cot(\pi-\alpha) = -\cot\alpha$$

زوایای α و π+α را در یک دایره مثلثاتی رسم کنید و نقاط انتهایی کمان‌های روبه‌رو به این دو زاویه را به ترتیب $P(x_P, y_P)$ و $Q(x_Q, y_Q)$ بنامید. از دستگاه مختصات واضح است که نقطه Q قرینه نقطه P نسبت به مبدأ مختصات است و از این رو $Q(x_Q, y_Q) = Q(-x_P, -y_P)$.

اکنون با استدلالی مشابه به فعالیت بالا نشان دهید که روابط روبه‌رو برقرار است.

$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$$
$$\cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$$

مثال : مقدار نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا در زیر محاسبه شده است.

$$\sin\left(-\frac{۷\pi}{۶}\right) = -\sin\left(\frac{۷\pi}{۶}\right) = -\sin\left(\pi+\frac{\pi}{۶}\right) = \sin\frac{\pi}{۶} = \frac{۱}{۲}$$

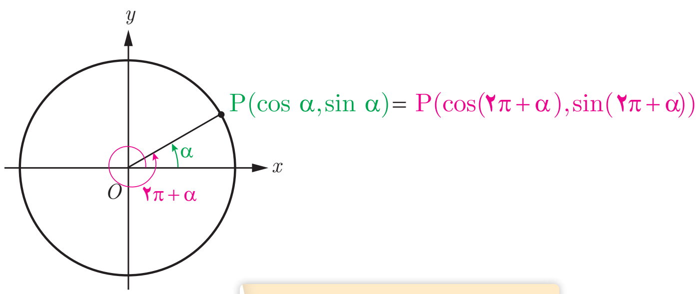
$$\tan(۲۲۵^\circ) = \tan(۱۸۰^\circ+۴۵^\circ) = \tan ۴۵^\circ = ۱$$

$$\cos(۱۲۰^\circ) = \cos(۱۸۰^\circ-۶۰^\circ) = -\cos(۶۰^\circ) = -\frac{۱}{۲}$$

نسبت‌های مثلثاتی زوایای با مجموع یا تفاضل $۲k\pi$ رادیان

زاویه‌هایی مانند α و $۲\pi+\alpha$ در شکل زیر که انتهای کمان‌های آنها برهم منطبق می‌شود را زوایای هم انتها گویند. از آنجا که نقطه P انتهای هر دو کمان می‌باشد لذا نسبت‌های مثلثاتی این دو زاویه باهم برابرند.

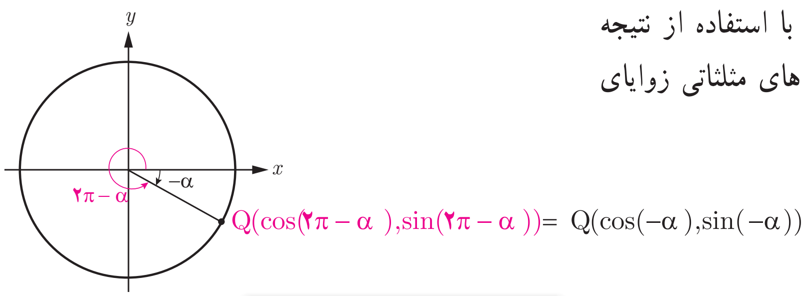
$$\sin(۲\pi+\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(۲\pi+\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(۲\pi+\alpha)=\tan\alpha$$
$$\cot(۲\pi+\alpha)=\cot\alpha$$



این حالت برای بیش از یک دوران کامل، یعنی زوایای به‌صورت $۲k\pi+\alpha$، نیز برقرار است. $(k\in\mathbb{Z})$

$$\sin(۲k\pi+\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(۲k\pi+\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(۲k\pi+\alpha)=\tan\alpha$$
$$\cot(۲k\pi+\alpha)=\cot\alpha$$

از آنجا که زوایای $-\alpha$ و $۲k\pi-\alpha$ $(k\in\mathbb{Z})$ نیز هم انتها هستند (چرا؟)، با استدلالی مشابه بالا و با استفاده از نتیجه فعالیت صفحه قبل نشان دهید که نسبت‌های مثلثاتی زوایای $۲k\pi-\alpha$ به‌صورت زیر برقرارند.



$$\sin(۲k\pi-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(۲k\pi-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(۲k\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(۲k\pi-\alpha)=-\cot\alpha$$

مثال : مقدار نسبت‌های مثلثاتی برخی زوایا در زیر محاسبه شده است.

الف) $\tan(\frac{۵\pi}{۳})=\tan(۲\pi-\frac{\pi}{۳})=-\tan(\frac{\pi}{۳})=-\sqrt{۳}$

ب) $\sin(۴۰۵^\circ)=\sin(۳۶۰^\circ+۴۵^\circ)=\sin(۴۵^\circ)=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

کار در کلاس

۱ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را به‌دست آورید.

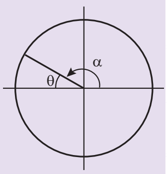
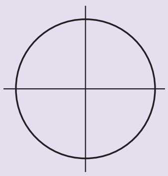
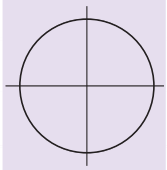
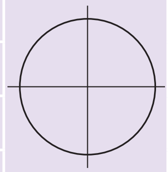
الف) $\sin(۲۱۰^\circ) =$

ب) $\tan(-\frac{۷\pi}{۴}) =$

پ) $\cot(۱۳۵^\circ) =$

ت) $\sin(\frac{۳\pi}{۴}) =$

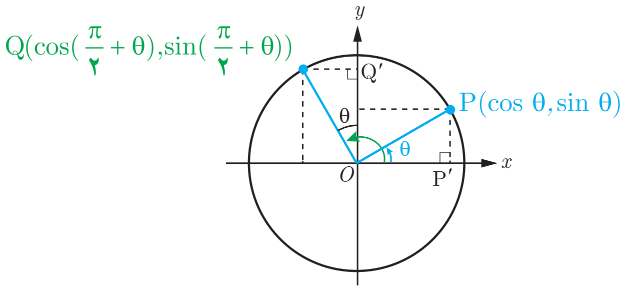
۲ جدول زیر را همانند نمونه کامل کنید. $(۰ < \theta < \frac{\pi}{۲})$

<table>
<tr><td>زاویه
نسبت</td><td colspan="4">$\alpha = \pi - \theta$</td><td colspan="4">$\alpha = \pi + \theta$</td><td colspan="4">$\alpha = ۲k\pi - \theta$</td><td colspan="4">$\alpha = ۲k\pi + \theta$</td></tr>
<tr><td>انتهای کمان</td><td colspan="4">ربع دوم</td><td colspan="4">.....</td><td colspan="4">.....</td><td colspan="4">.....</td></tr>
<tr><td rowspan="4">ترسیم زاویه α و تشخیص علامت نسبت‌ها</td><td rowspan="4"></td><td>نسبت</td><td>+</td><td>−</td><td rowspan="4"></td><td>نسبت</td><td>+</td><td>−</td><td rowspan="4"></td><td>نسبت</td><td>+</td><td>−</td><td rowspan="4"></td><td>نسبت</td><td>+</td><td>−</td></tr>
<tr><td>$\sin\alpha$</td><td>✓</td><td></td><td>$\sin\alpha$</td><td></td><td></td><td>$\sin\alpha$</td><td></td><td></td><td>$\sin\alpha$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\cos\alpha$</td><td></td><td>✓</td><td>$\cos\alpha$</td><td></td><td></td><td>$\cos\alpha$</td><td></td><td></td><td>$\cos\alpha$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\tan\alpha$</td><td></td><td>✓</td><td>$\tan\alpha$</td><td></td><td></td><td>$\tan\alpha$</td><td></td><td></td><td>$\tan\alpha$</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>$\sin\alpha$</td><td colspan="4">$\sin(\pi-\theta) = \sin\theta$</td><td colspan="4"></td><td colspan="4"></td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>$\cos\alpha$</td><td colspan="4">$\cos(\pi-\theta) = -\cos\theta$</td><td colspan="4"></td><td colspan="4"></td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>$\tan\alpha$</td><td colspan="4">$\tan(\pi-\theta) = -\tan\theta$</td><td colspan="4"></td><td colspan="4"></td><td colspan="4"></td></tr>
<tr><td>$\cot\alpha$</td><td colspan="4">$\cot(\pi-\theta) = -\cot\theta$</td><td colspan="4"></td><td colspan="4"></td><td colspan="4"></td></tr>
</table>

۳ برای زوایای قرینهٔ $(\alpha = -\theta)$ از کدام ستون جدول بالا می‌توان کمک گرفت؟ چرا؟

فعالیت

در دایرهٔ مثلثاتی زیر زاویه‌های θ و $\frac{\pi}{۲}+\theta$ رسم شده‌اند.



الف) با توجه به شکل، نشان دهید دو مثلث $O\overset{\Delta}{P}P'$ و $O\overset{\Delta}{Q}Q'$ هم‌نهشت هستند.

ب) از تساوی اضلاع نظیر در دو مثلث فوق روابط زیر را همانند نمونه تکمیل کنید.

$$x_Q=-y_p \Rightarrow \cos(\frac{\pi}{۲}+\theta)=-\sin\theta$$

$y_Q=$ ....

پ) طرف دوم تساوی‌های زیر را با استفاده از روابط قسمت ب کامل کنید.

$\tan(\frac{\pi}{۲}+\theta)=$ ....

$\cot(\frac{\pi}{۲}+\theta)=$ ....

به‌طور کلی برای دو زاویهٔ θ و $\frac{\pi}{۲}+\theta$ روابط زیر برقرار است.

$$\sin(\frac{\pi}{۲}+\theta)=\cos\theta$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲}+\theta)=-\sin\theta$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲}+\theta)=-\cot\theta$$

$$\cot(\frac{\pi}{۲}+\theta)=-\tan\theta$$

تمرین

۱ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را به‌دست آورید.

الف) $\sin(۳۰۰^\circ) =$

ب) $\cot(۷۵۰^\circ) =$

پ) $\cos(-\frac{\pi}{۶}) =$

ت) $\cos(-\frac{۲۳\pi}{۴}) =$

ث) $\sin(\frac{۵\pi}{۴}) =$

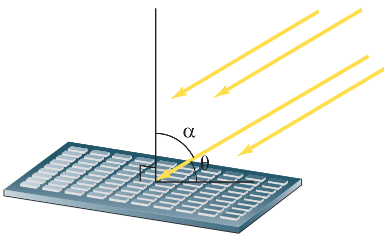
ج) $\tan(-۸۴۰^\circ) =$

چ) $\tan(-۱۵۰^\circ) =$

ح) $\cos(\frac{۹\pi}{۴}) =$

خ) $\tan(\frac{۱۰\pi}{۳}) =$

۲ شدت نور وارد بر یک سلول خورشیدی، با زاویه تابش α در ارتباط است (شکل زیر). اگر شدت نور را با I نشان دهیم، رابطهٔ $I = k\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha)$ که در آن k یک عدد ثابت مثبت است، شدت نور را به‌دست می‌دهد.



الف) با توجه به شکل و با استفاده از روابط مثلثاتی، رابطه شدت نور را بر حسب کسینوس زاویه θ در شکل بازنویسی کنید.

ب) شدت نور را برای زاویه‌های $\theta = ۰$ ، $\theta = \frac{\pi}{۶}$ و $\theta = \frac{\pi}{۳}$ بر حسب k به‌دست آورید.

پ) زاویه θ چقدر باشد تا بیشترین شدت نور به‌دست آید؟ چرا؟ (راهنمایی : از دایره مثلثاتی کمک بگیرید).

۳ درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید (زوایا برحسب رادیان است).

الف) $\cos\theta + \cos(\pi-\theta) = ۰$

ب) $\sin(\frac{\pi}{۲}-\theta) + \cos\theta = ۱$

ج) $\cos(۷) = \cos(-۷)$

د) $\tan(\pi-\theta) = \tan\pi - \tan\theta$

درس ۳

توابع مثلثاتی

در درس‌های قبل مقدار نسبت‌های مثلثاتی را برای برخی زوایا به‌دست آوردیم. اکنون این سؤال به ذهن می‌رسد که آیا می‌توان این نسبت‌ها را برای یک عدد حقیقی تعریف کرد؟ مثلاً عبارات $\sin ۳$ یا $\cos ۳$ چه مفهومی دارند؟ فعالیت زیر به شما کمک می‌کند تا پاسخ این سؤالات را بیابید.

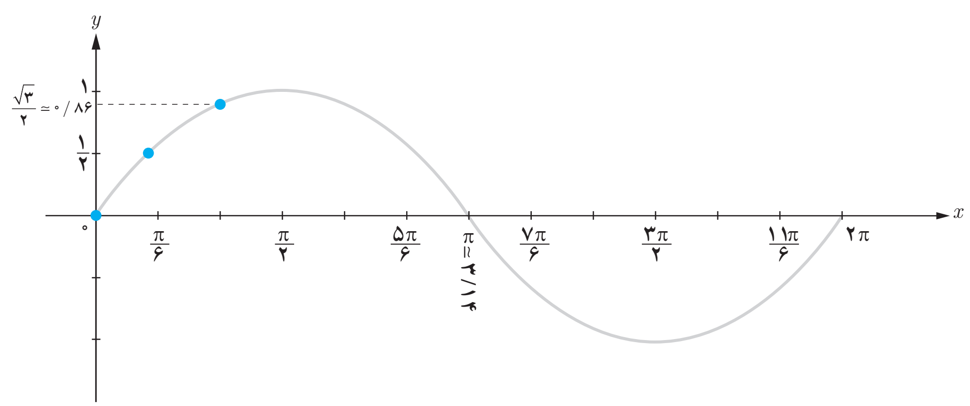
فعالیت

۱ در جدول زیر نسبت سینوس به ازای برخی مقادیر در بازه $[۰,۲\pi]$ مشخص شده است. این جدول را تکمیل کنید.

x (رادیان)	۰	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{\pi}{۲}$	$\frac{۵\pi}{۶}$		$\frac{۷\pi}{۶}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	$\frac{۱۱\pi}{۶}$	۲π
$y=\sin x$	۰	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}\simeq ۰/۸۶$			۰		-۱		

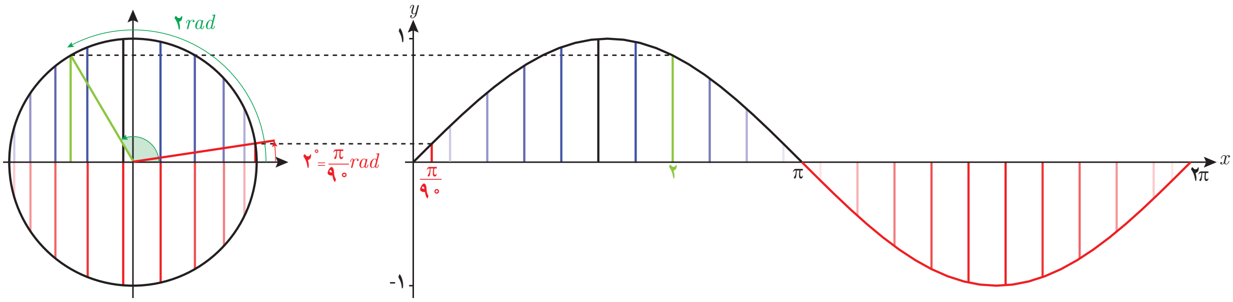
۲ جدول بالا به‌صورت زوج مرتب در زیر داده شده است. باتوجه به جدول فوق مجموعه زوج مرتب‌ها را تکمیل و سپس نقاط به‌دست آمده را در دستگاه مختصات زیر پیدا کنید. آیا نقاط متناظر با زوج‌های مرتب روی منحنی داده شده قرار می‌گیرند؟ آیا این منحنی تابع است؟ (با رسم خطوط موازی محور yها بررسی کنید).

$$f=\left\{(۰,۰),(\frac{\pi}{۶},\frac{۱}{۲}),(\frac{\pi}{۳},\frac{\sqrt{۳}}{۲}),(\frac{\pi}{۲},...),(\frac{۵\pi}{۶},...),(...,۰),(\frac{۷\pi}{۶},...),(\frac{۳\pi}{۲},-۱),(\frac{۱۱\pi}{۶},...),(۲\pi,...)\right\}$$



۳ نمودار داده شده در سؤال قبل منحنی تابع $y=\sin x$ در بازه $[۰,۲\pi]$ می‌باشد. با توجه به نمودار، مقدار $\sin ۱$ کجای محور yها قرار می‌گیرد؟

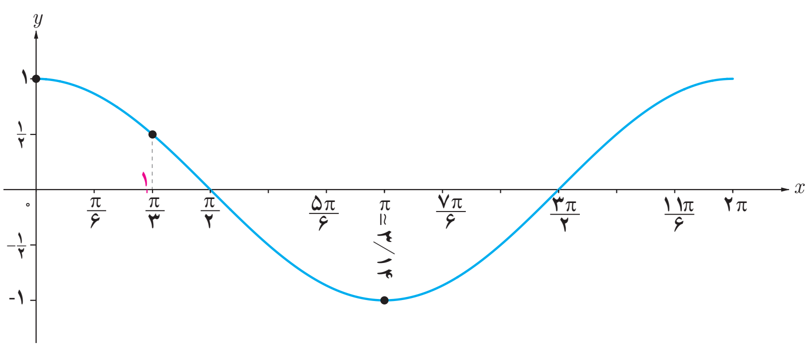
۴ در تابع $y=\sin x$، همیشه x را برحسب رادیان در نظر می‌گیرند مگر آنکه صریحاً گفته شود x بر حسب درجه است یا از نماد x° استفاده شود. باتوجه به ارتباط دایره مثلثاتی و نمودار تابع سینوس که در زیر داده شده، تفاوت $\sin ۲$ و $\sin ۲^{\circ}$ را بیان کنید.



فعالیت

۱ همانند فعالیت قبل، تابع $y=\cos x$ در زیر رسم شده است. مجموعه زوج‌های مرتب داده شده از این تابع را تکمیل کنید و نقاط به‌دست آمده را مانند نمونه بر روی نمودار نمایش دهید.

$$f=\left\{(۰,۱)،(\frac{\pi}{۳},\frac{۱}{۲})،(\frac{\pi}{۲},\ldots)،(\frac{۲\pi}{۳},\ldots)،(\pi,-۱)،(\frac{۴\pi}{۳},\ldots)،(\frac{۳\pi}{۲},\ldots)،(\frac{۵\pi}{۳},\ldots)،(۲\pi,\ldots)\right\}$$

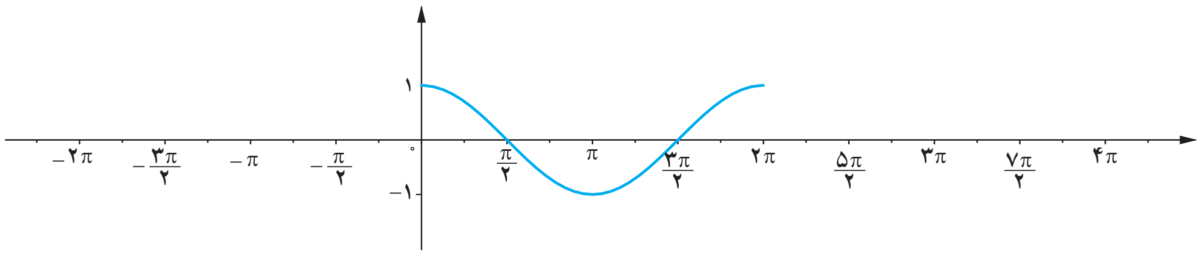


۲ در نمودار بالا ابتدا نقطه نظیر $\sqrt{۲}$ رادیان را بر روی محور xها بیابید و سپس مکان $\cos\sqrt{۲}$ را بر روی محور yها به طور تقریبی پیدا کنید. درستی پاسخ خود را با ماشین حساب بررسی کنید.

خواندنی

در ماشین‌حساب‌های پیشرفته، برای محاسبه نسبت‌های مثلثاتی می‌توان از دو حالت استفاده کرد که یک حالت بر حسب درجه (DEG) و حالت دیگری برحسب رادیان (RAD) است. هنگام استفاده از ماشین حساب باید ابتدا آن را در حالت مورد نظر قرار داد. در ماشین‌حساب زیر آن را در حالت رادیان قرار داده و سپس مقدار $\cos\sqrt{۲}$ را حساب کرده‌اند.

۳ از درس‌های قبل می‌دانیم که $\cos(x+2k\pi)=\cos x$ و نیز $\cos(-x)=\cos x$. با استفاده از این روابط مقدار تابع $y=\cos x$ را در دیگر نقاط داده شده بر روی محور xها به‌دست آورید و نمودار تابع را از دو طرف ادامه دهید. آیا نمودار این تابع در بازه‌های $[2\pi, 4\pi]$ و $[0, 2\pi]$ و $[-2\pi, 0]$ با هم متفاوت هستند؟



۴ باتوجه به نمودار تابع $y=\cos x$ در بازه $[-2\pi, 4\pi]$ به سؤالات زیر پاسخ دهید.

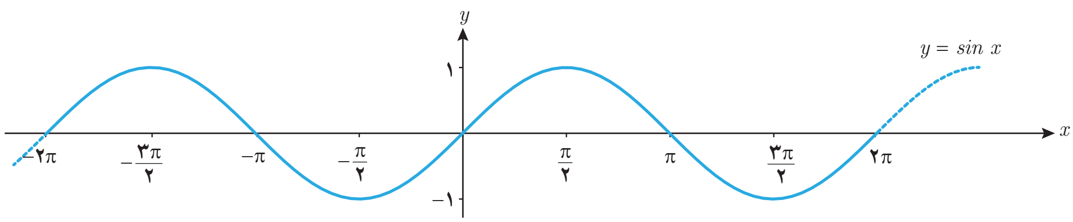
الف) آیا می‌توان بر روی محور xها عددی مانند x_0 یافت که برای آن $\cos x_0 = \frac{1}{3}$ باشد؟

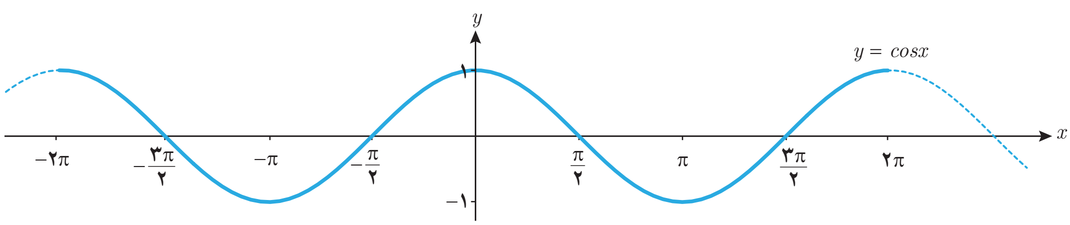
ب) آیا می‌توان بر روی محور xها عددی مانند x_0 یافت که برای آن $\cos x_0 = 2$ باشد؟

پ) بیشترین و کمترین مقدار تابع $y=\cos x$ در این بازه چقدر است؟

تابع‌های $y=\sin x$ و $y=\cos x$ را مثلثاتی گویند. دامنه این توابع مجموعهٔ اعداد حقیقی و برد آنها بازه $[-1,1]$ است. گاهی به نمودار تابع $y=\sin x$ موج سینوسی و به نمودار تابع $y=\cos x$ موج کسینوسی نیز می‌گویند.

همان‌طور که در فعالیت ۲ بررسی شد تابع $y=\cos x$ در بازه‌های به طول 2π تکرار می‌شود. این وضعیت برای تابع $y=\sin x$ نیز برقرار است (چرا؟). با توجه به این ویژگی در توابع مثلثاتیِ بالا، می‌توان نمودار آنها را به‌صورت زیر رسم کرد.





کار در کلاس

درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید.

الف) $\sin x$ یعنی سینوس زاویه‌ای از دایره مثلثاتی که اندازه آن x درجه باشد.

ب) $\sin\sqrt{۵}$ یک عدد حقیقی است.

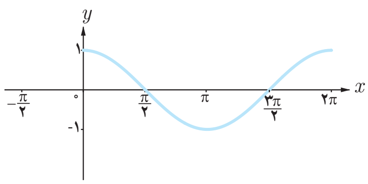
پ) $\cos ۳ = \cos ۳^{\circ}$.

ت) اگر $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$ آنگاه $-۱ < \cos x < ۰$ است.

ث) عددی می‌توان یافت که سینوس آن برابر -۲ باشد.

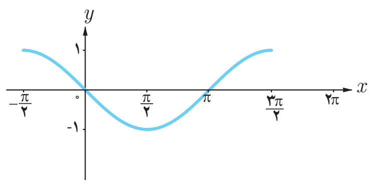
ج) $x = \pi$ صفر تابع $f(x) = \cos x$ است.

مثال : با توجه به نمودار توابع مثلثاتی $y = \sin x$ و $y = \cos x$، نمودار توابع $y = -\cos(x + \frac{\pi}{۲})$ و $y = |\sin x|$ در زیر رسم شده است.



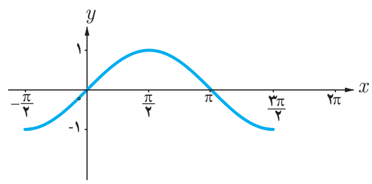
$y = \cos x$

$\Rightarrow$

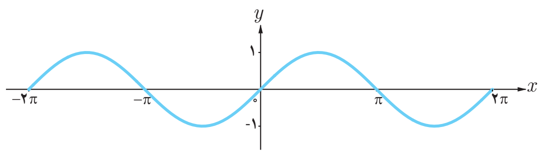


$y = \cos(x + \frac{\pi}{۲})$

$\Rightarrow$

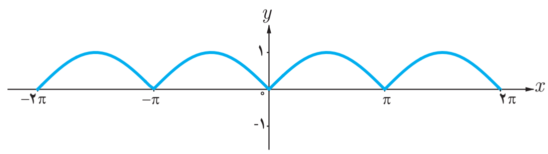


$y = -\cos(x + \frac{\pi}{۲})$



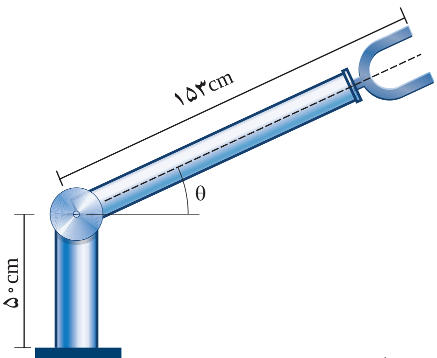
$y = \sin x$

$\Rightarrow$

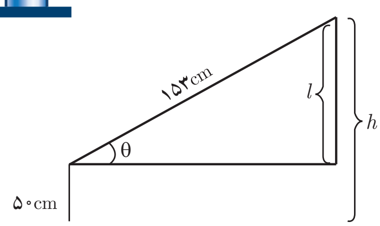


$y = |\sin x|$

مثال : روبات‌ها در زمینه‌های مختلف کاربرد دارند. در طراحی انواع روبات‌ها از توابع مثلثاتی استفاده می‌شود. در شکل روبه‌رو یک روبات صنعتی را که در صنایع خودروسازی کاربرد دارد مشاهده می‌کنید. باتوجه به مقادیر داده شده، ارتفاع نوک گیرهٔ روبات را از سطح زمین به کمک یک تابع مثلثاتی مدل‌سازی کنید. $(۰ \le \theta \le \frac{\pi}{۲})$



حل : کافی است وضعیت روبات را به صورت زیر ترسیم کنیم. اکنون کل ارتفاع نوک گیره از سطح زمین (h) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید :



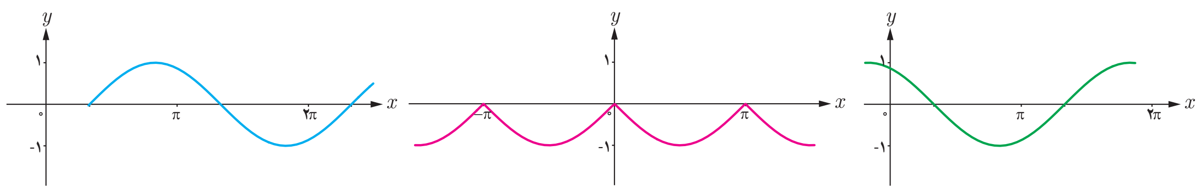
$$\sin\theta = \frac{l}{۱۵۳} \rightarrow l = ۱۵۳\sin\theta$$

$$\Rightarrow h = ۵۰ + l = ۵۰ + ۱۵۳\sin\theta$$

تمرین

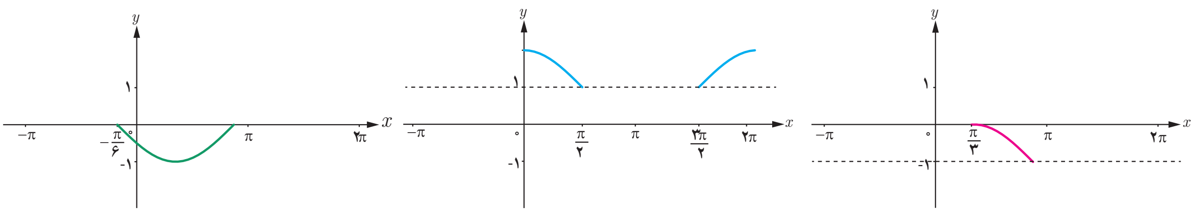
۱ توابع مثلثاتی زیر را با نمودارهای داده شده نظیر کنید.

الف) $y=-|\sin x|$ ب) $y=\cos(x+\frac{\pi}{۶})$ پ) $y=\sin(x-\frac{\pi}{۳})$



۲ در هر یک از نمودارهای زیر بخشی از یک تابع مثلثاتی رسم شده است. با توجه به بخش رسم شده، توابع مثلثاتی داده شده در زیر را به نمودارها نظیر کنید و سپس نمودار را کامل سازید.

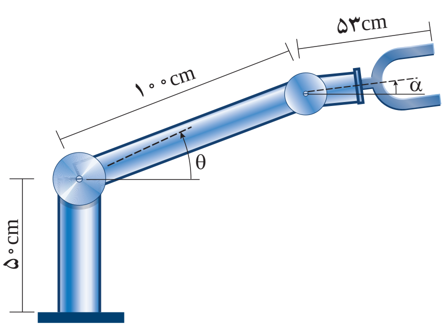
الف) $y=-\sin(x+\frac{\pi}{۶})$ ب) $y=\cos(x-\frac{\pi}{۳})-۱$ پ) $y=۱+|\cos x|$



۳ با توجه به نمودارهای بالا در سؤال ۲، بیشترین و کمترین مقدار توابع مثلثاتی داده شده در آن سؤال در چه نقاطی رخ می‌دهد؟

۴ با توجه به نمودارهای سؤال ۲، کدام‌یک از توابع مثلثاتی داده شده در آن سؤال در بازهٔ $(۰,\pi)$ یک به یک است؟

۵ در طراحی روبات‌های صنعتی برای انعطاف بیشتر در حرکت روبات‌ها، معمولاً دو مفصل مکانیکی برای بازوی آن به صورت روبه‌رو در نظر می‌گیرند.



الف) ارتفاع نوک گیره این روبات را، از سطح زمین، بر اساس توابعی از θ و α مدل‌سازی کنید. $(-\frac{\pi}{۲}\leq\alpha\leq\frac{\pi}{۲}\,,\,۰\leq\theta\leq\frac{\pi}{۲})$

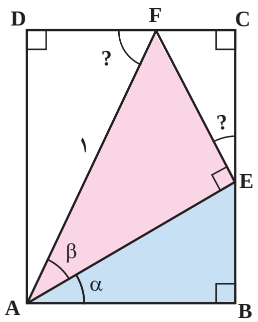
ب) فرض کنید این روبات برای گرفتن یک شیء در ارتفاع ۲۳/۵ cm مفصل دوم خود را در حالت $\alpha=-۳۰^\circ$ قرار داده است. تعیین کنید زاویه θ در این وضعیت چند درجه است؟

درس ۴

روابط مثلثاتی مجموع و تفاضل زوایا

در سال گذشته با تعدادی از اتحادهای مثلثاتی مانند $\sin^۲\alpha + \cos^۲\alpha = ۱$ و $۱+\tan^۲\alpha = \frac{۱}{\cos^۲\alpha}$ $(\cos\alpha \neq ۰)$ آشنا شدید. این اتحادها تنها شامل یک زاویه هستند. اکنون در این درس، روابطی را که در آنها دو زاویه مختلف به‌کار رفته است فرا می‌گیرید.

فعالیت



۱ در شکل روبه‌رو، چهارضلعی $ABCD$ یک مستطیل است. اندازه پاره خط AF برابر ۱ و زوایای α و β داده شده است.

الف) با تکمیل روابط زیر اندازه $F\hat{E}C$ و $A\hat{F}D$ را برحسب α و β به‌دست آورید.

$F\hat{E}C + ۹۰^\circ + A\hat{E}B = ۱۸۰$: زاویه E نیم صفحه است.

$\alpha + ۹۰^\circ + A\hat{E}B = ۱۸۰$: مجموع زوایای داخلی ABE

$\Rightarrow F\hat{E}C = \cdots\cdots$

اضلاع AB و DC باهم موازی و پاره خط AF به‌صورت مورب آن را قطع کرده است. $\Rightarrow A\hat{F}D = \ldots\ldots$

ب) اندازه اضلاع AD و DF از $\overset{\Delta}{ADF}$ را با توجه به اینکه $AF=۱$، برحسب نسبت‌های سینوس و کسینوس $D\hat{F}A$ بنویسید.

پ) اضلاع AE و EF از مثلث قائم‌الزاویه AEF را، که وتر آن برابر ۱ است، برحسب نسبت‌های سینوس و کسینوس زاویه β بنویسید.

ت) اندازهٔ پاره خط‌های BE، EC، FC و AB را برحسب نسبت‌های سینوس و کسینوس زاویه α به‌دست آورید.

ث) از تساوی اضلاع روبه‌رو در مستطیل صفحهٔ قبل روابط زیر به‌دست می‌آید. آنها را باتوجه به قسمت‌های الف تا ث کامل کنید.

$AD = BE+EC \Rightarrow \sin(\alpha+\beta) = \cdots\cdots$

$DF = AB-FC \Rightarrow \cos(\alpha+\beta) = \cdots\cdots$

۲ توضیح دهید چرا اگر اندازهٔ پاره خط AF برابر یک نباشد کماکان روابط فوق برقرار است.

در فعالیت فوق زوایای به کار رفته همگی تند بودند. می‌توان با استفاده از خواص توابع مثلثاتی نشان داد که این روابط برای همه زوایا برقرار است. بنابراین همواره داریم:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

همچنین با تبدیل β به $-\beta$ و استفاده از نسبت‌های مثلثاتی زوایای قرینه می‌توان به دست آورد:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin(\alpha+(-\beta)) = \sin\alpha\cos(-\beta) + \cos\alpha\sin(-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$

و نیز

$$\cos(\alpha-\beta) = \cos(\alpha+(-\beta)) = \cos\alpha\cos(-\beta) - \sin\alpha\sin(-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

پس همواره داریم:

$$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$$

مثال: مقدار $\sin ۷۵^\circ$ در زیر محاسبه شده است.

$$\sin ۷۵^\circ = \sin(۴۵^\circ + ۳۰^\circ) = \sin ۴۵^\circ \cos ۳۰^\circ + \cos ۴۵^\circ \sin ۳۰^\circ = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} + \frac{\sqrt{۲}}{۲} \times \frac{۱}{۲} = \frac{\sqrt{۶}+\sqrt{۲}}{۴}$$

مثال: درستی رابطهٔ $\tan(\frac{\pi}{۲}+\theta) = -\cot\theta$ را نشان دهید.

$$\tan(\frac{\pi}{۲}+\theta) = \frac{\sin(\frac{\pi}{۲}+\theta)}{\cos(\frac{\pi}{۲}+\theta)} = \frac{\overbrace{\sin\frac{\pi}{۲}}^{۱}\cos\theta + \cancel{\cos\frac{\pi}{۲}}^{\,\circ}\sin\theta}{\cancel{\cos\frac{\pi}{۲}}_{\circ}\cos\theta - \underbrace{\sin\frac{\pi}{۲}}_{۱}\sin\theta} = \frac{\cos\theta}{-\sin\theta} = -\cot\theta$$

تمرین

۱ مقدار نسبت‌های مثلثاتی زیر را محاسبه کنید.

الف) $\cos 15^\circ$

ب) $\tan 105^\circ$

پ) $\sin \frac{\pi}{12}$

ت) $\sin 120^\circ$

ث) $\cos 135^\circ$

۲ فرض کنید $\cos\alpha = \frac{4}{5}$ و $\cos\beta = -\frac{12}{13}$ و انتهای کمان α در ربع اول و انتهای کمان β در ربع دوم قرار دارد. اکنون به سؤالات زیر پاسخ دهید.

الف) مقدار دقیق $\sin(\alpha+\beta)$ و $\cos(\alpha-\beta)$ چیست؟

ب) انتهای زاویه $\alpha+\beta$ در کدام ربع قرار می‌گیرد؟

۳ با استفاده از روابط نسبت‌های مجموع دو زاویه نشان دهید که :

الف) $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

ب) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

پ) $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

ت) $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

۴ نسبت‌های مثلثاتی سینوس و کسینوس را برای زاویهٔ $22/5^\circ$ به‌دست آورید.

فصل ۵

حد و پیوستگی

جادهٔ نهبندان ـ شهداد

درس ۱

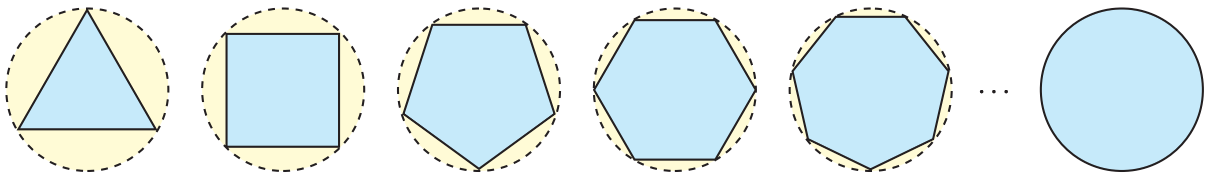
مفهوم حد و فرایندهای حدی

بیشتر پدیده‌های طبیعی و مسائل محیط پیرامون را می‌توان مدل‌سازی نمود و مدل ریاضی بسیاری از این پدیده‌ها، به‌صورت یک تابع درمی‌آید.

گاهی اوقات لازم است، برای تحلیل یک پدیده، رفتار تابع متناظر آن را در نزدیکی یک نقطه مورد ارزیابی قرار دهیم. مفهوم «حد» ابزار مناسبی است که می‌تواند در تحلیل رفتار تابع به ما کمک شایانی بنماید.

فعالیت

در شکل زیر، شعاع دایره‌ها، برابر ۱ واحد است.



۱ با افزایش اضلاع چندضلعی‌های محاط در دایره، مساحت چندضلعی به مساحت چه شکلی نزدیک می‌شود؟

۲ مساحت دایره‌ای به شعاع ۱ چقدر است؟

۳ اگر مقدار تقریبی عدد π تا ۵ رقم اعشار را برابر π=۳/۱۴۱۵۹ در نظر بگیریم و مساحت nضلعی منتظم واقع در درون دایره را با A_n نشان دهیم، جدول زیر مقادیر A_n را به ازای برخی $n\in \mathbb{N}$ نشان می‌دهد :

n	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۲۰۰	۳۰۰	۴۰۰	۵۰۰	۱۰۰۰
A_n	۱/۲۹۹۰۳	۲	۲/۳۷۷۶۴	۲/۵۹۸۰۷	۲/۷۳۶۰۸	۲/۸۲۸۴۲	۲/۸۹۲۵۴	۲/۹۳۸۹۲	۳/۱۴۱۰۷	۳/۱۴۱۳۶	۳/۱۴۱۴۶	۳/۱۴۱۵۰	۳/۱۴۱۵۷

۴ با توجه به این جدول، هرچه تعداد اضلاع چندضلعی‌های داخل دایره زیاد می‌شود، جملات دنباله A_n (مساحت n ضلعی درون دایره) به عدد . . . که برابر مساحت دایره است نزدیک می‌شوند.

مساحت چندضلعی‌های منتظم درون دایره (محاطی) را به هر اندازه که بخواهیم، می‌توانیم به مساحت دایره نزدیک کنیم، به شرط آنکه تعداد اضلاع را به اندازه کافی زیاد کنیم.

خواندنی

عدد π (پی) سرگذشتی حداقل ۳۷۰۰ ساله دارد. پی یکی از مشهورترین عددها در دنیای ریاضی است و با نماد π، یکی از حروف الفبای یونانی نشان داده می‌شود. ساده‌ترین و بهترین راه معرفی π این است :

$$\pi = \frac{\text{محیط دایره}}{\text{قطر دایره}}$$

π یک عدد گنگ است و در طول این ۳۷ قرن، دانشمندان زیادی سعی کرده‌اند مقدار دقیق آن را حساب کنند. قدیمی‌ترین محاسبهٔ به‌دست آمده، به ۱۷۰۰ سال قبل از میلاد مربوط می‌شود. این محاسبات روی پاپیروسی نوشته شده است که درحال حاضر، در موزه‌ای در «مسکو» نگهداری می‌شود. حدود ۲۴۰ سال قبل از میلاد، ارشمیدس اولین روش کلاسیک را برای تعیین مقدار تقریبی عدد π ارائه داد.

ارشمیدس با استفاده از چندضلعی‌های محاطی و محیطی درون و بیرون یک دایره به شعاع واحد به محاسبه تقریبی عدد π پرداخت. او با ۶ضلعی منتظم شروع و مرتباً تعداد اضلاع را دو برابر کرد و با استفاده از ۹۶ ضلعی‌های منتظم محیطی و محاطی مقدار π را با تقریب بسیار خوبی $(۳/۲۱۵۰ > \pi > ۳/۱۰۵۸)$ به‌دست آورد.

غیاث‌الدین جمشید کاشانی معروف به «الکاشی» در کتاب رسالهٔ محیطیه π را تا ۱۷ رقم پس از ممیز حساب کرده است.

اگر می‌خواهید عدد π را تا ده رقم اعشار به خاطر بسپارید تعداد حروف کلمات، در بیت دوم این شعر به شما کمک خواهد کرد :

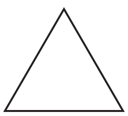
گر کسی از تو بپرسد ره دانستن π — پاسخی ده که هنرمند تو را آموزد

خرد و دانش و آگاهی دانشمندان — ره سرمنزل مقصود بما آموزد

۳ ۱ ۴ ۱ ۵ ۹ — ۲ ۶ ۵ ۳ ۵

$\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶۵۳۵ \ldots$

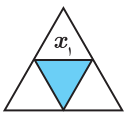
فعالیت



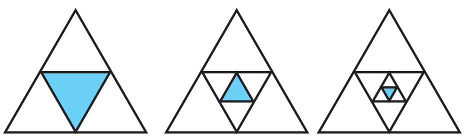
یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲ را درنظر بگیرید، اندازه محیط این مثلث برابر ۶ می‌باشد.

۱ مطابق شکل، وسط اضلاع را به هم وصل می‌کنیم تا مثلث جدیدی ایجاد شود، اندازه ضلع مثلث جدید را x_1 و اندازه محیط آن را P_1 می‌نامیم.

در این صورت داریم : $x_1 = \ldots\ldots$ و $P_1 = \ldots\ldots$



۲ اگر عمل وصل کردن وسط ضلع‌های مثلث‌های جدید را ادامه دهیم و در مرحله nام طول ضلع مثلث به‌وجود آمده را با x_n و محیط آن را با P_n نمایش دهیم، با توجه به شکل‌های زیر، جدول داده شده را تکمیل کنید :



(۱) (۲) (۳)

x_n	۱	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۴}$	$\frac{۱}{۸}$			$\ldots$	$\frac{۱}{۲^n}$
P_n	۳	$\frac{۳}{۲}$	$\frac{۳}{۴}$				$\ldots$	

۳ اندازه اضلاع مثلث‌ها، به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

۴ اندازه محیط این مثلث‌ها، به چه عددی نزدیک می‌شوند؟

در فعالیت قبل، اگر طول ضلع اولیه را x درنظر بگیریم و f تابعی باشد که محیط مثلث را برحسب ضلع آن بیان می‌کند، آن‌گاه داریم $f(x) = ۳x$.

همان‌طور که مشاهده کردیم، وقتی طول ضلع مثلث ها (مقدار متغیر x) به عدد صفر نزدیک می‌شود، محیط مثلث‌ها، یعنی مقادیر تابع f، نیز به عدد صفر نزدیک می‌شوند.

مثال : رفتار تابع f، با ضابطه $f(x)=\frac{x^۲-۴}{x-۲}$ را در اطراف نقطه $a=۲$ بررسی نمایید.

حل : تابع f، به ازای هر عدد حقیقی x به جز $x=۲$ تعریف شده است. به ازای هر $x\neq ۲$، ضابطه تابع را می‌توان ساده کرد و به‌صورت زیر نوشت :

$$f(x)=\frac{(x-۲)(x+۲)}{x-۲}=x+۲$$

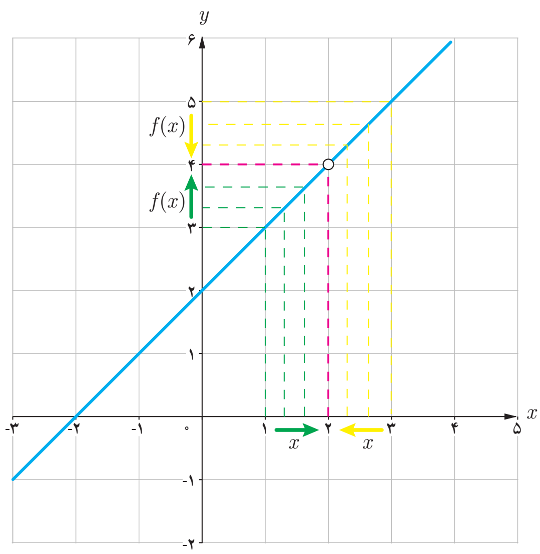
در جدول زیر، مقادیر تابع f را به ازای برخی مقادیر کوچک‌تر از ۲، که به‌تدریج از سمت چپ به عدد ۲ نزدیک می‌شوند، و نیز برخی مقادیر بزرگ‌تر از ۲، که به‌تدریج از سمت راست به ۲ نزدیک می‌شوند، محاسبه کرده‌ایم :

x از چپ به عدد ۲ نزدیک می‌شود — x از راست به عدد ۲ نزدیک می‌شود

x	۱	۱/۵	۱/۹	۱/۹۹	۱/۹۹۹	→	۲	←	۲/۰۰۰۱	۲/۰۰۱	۲/۰۱	۲/۵	۳
$f(x)$	۳	۳/۵	۳/۹	۳/۹۹	۳/۹۹۹	→	?	←	۴/۰۰۰۱	۴/۰۰۱	۴/۰۱	۴/۵	۵

$f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می‌شود — $f(x)$ به عدد ۴ نزدیک می‌شود

با توجه به جدول فوق، مشاهده می‌کنیم که، با نزدیک شدن x به عدد ۲ (از راست و از چپ) مقادیر $f(x)$، به عدد ۴ نزدیک می‌شوند.



درستی این مطلب را از روی نمودار تابع نیز می‌توان دید :
نمودار تابع f، خط راست $y=x+۲$ است که یک نقطه از آن، یعنی نقطه $(۲,۴)$ حذف شده است.

با وجود اینکه مقدار تابع در نقطهٔ ۲ تعریف نشده است ولی با توجه به نمودار تابع، وقتی x را با مقادیر بزرگ‌تر و یا کوچک‌تر از ۲ (اما مخالف ۲) به عدد ۲ نزدیک می‌کنیم، مقادیر تابع f به عدد ۴ نزدیک می‌شوند. به عبارت دیگر وقتی $x\to ۲$ (یعنی x به سمت ۲ میل می‌کند)، مقادیر تابع f به عدد ۴ نزدیک می‌شوند. در این صورت می‌گوییم، حد تابع f وقتی x به ۲ نزدیک می‌شود برابر ۴ است و می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to ۲} f(x)=۴$$

در مثال بالا، رفتار تابعی مانند f را در اطراف نقطه‌ای مانند a بررسی و مشاهده کردیم که وقتی متغیر x به a نزدیک می‌شود مقادیر تابع f نیز به یک عدد مشخص، نزدیک می‌شوند. این مفهوم را «حدگیری» از تابع f در نقطه a می‌نامیم.

کار در کلاس

توابع f ، g و h با ضابطه‌های $f(x)=x+۳$ ، $g(x)=\dfrac{x^۲-۹}{x-۳}$ و $h(x)=\begin{cases} x+۳ & x\neq ۳ \\ ۴ & x=۳ \end{cases}$ را درنظر بگیرید :

۱ مقادیر زیر را در صورتی که تعریف شده باشند به دست آورید :

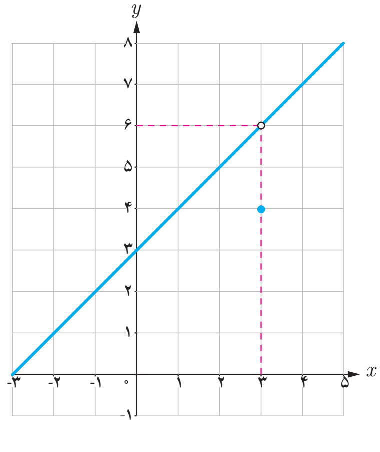
$h(۳)=\cdots$ $g(۳)=\cdots$ $f(۳)=\cdots$

۲ با تکمیل جدول زیر، حدس بزنید که وقتی مقادیر x را به عدد ۳ نزدیک می‌کنیم، مقادیر توابع f ، g و h هرکدام به چه عددی نزدیک می‌شوند.

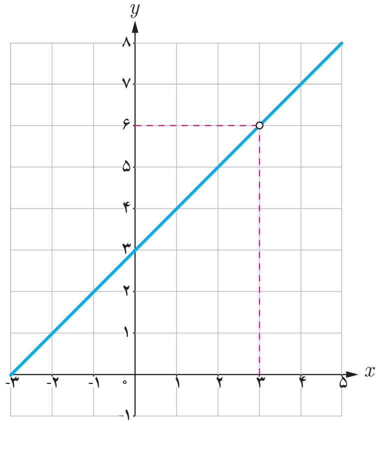
x	۲/۹	۲/۹۹	۲/۹۹۹	۲/۹۹۹۹	→	۳	←	۳/۰۰۰۰۱	۳/۰۰۰۱	۳/۰۰۱	۳/۰۱	۳/۱
$f(x)$	۵/۹	۵/۹۹	۵/۹۹۹	۵/۹۹۹۹	→	?	←	۶/۰۰۰۰۱	۶/۰۰۰۱	۶/۰۰۱	۶/۰۱	۶/۱
$g(x)$	....	....	....	....	→	?	←	....	....	....	....	....
$h(x)$	....	....	....	....	→	?	←	....	....	....	....	....

۳ نمودارهای توابع f، g و h به‌صورت زیر رسم شده است.

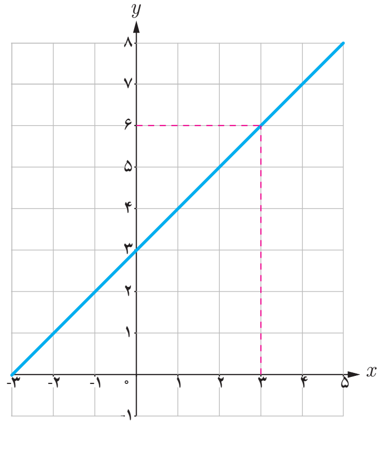
از روی نمودار، توضیح دهید که وقتی مقادیر x را به ۳ نزدیک می‌کنیم، مقادیر $f(x)$، $g(x)$ و $h(x)$ هرکدام به چه عددی نزدیک می‌شوند.



نمودار h



نمودار g



نمودار f

۴ حد هر سه تابع وقتی x به عدد ۳ نزدیک می‌شود برابر ... است به عبارت دیگر :

$$\lim_{x\to ۳} f(x) = \cdots \qquad \lim_{x\to ۳} g(x) = \cdots \qquad \lim_{x\to ۳} h(x) = \cdots$$

۵ با توجه به جدول صفحه قبل و نمودار و ضابطه سه تابع، تفاوت‌ها و شباهت‌های این سه تابع را بیان کنید.

از کار در کلاس قبل نتیجه می‌گیریم که :

الف) ممکن است یک تابع در نقطه a تعریف نشده باشد، اما حد این تابع وقتی x به a نزدیک می‌شود موجود باشد. (مانند تابع g در نقطه ۳)

ب) ممکن است یک تابع درنقطه a تعریف شده باشد و در این نقطه دارای حد نیز باشد، ولی مقدار این حد با مقدار تابع در a برابر نباشد. (مانند تابع h در نقطه ۳).

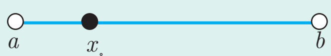
در حقیقت با اینکه سه تابع داده شده از نظر مقدار در نقطه ۳ با هم متفاوت‌اند و حتی تابع g در نقطه ۳ تعریف نشده است ولی در اطراف نقطه ۳ رفتار کاملاً یکسانی دارند، یعنی حد هر سه تابع وقتی x به ۳ نزدیک می‌شود برابر با ۶ است.

با توجه به مفهوم حد، به نظر می‌رسد برای آنکه بتوان مقادیر متغیر را از دو طرف (چپ و راست) به عددی مانند a، نزدیک نمود، کافی است تابع موردنظر در یک بازهٔ باز شامل a تعریف شده باشد. البته در محاسبه حد تابع در نقطه a، رفتار تابع در دو طرف نقطه a اهمیت دارد، پس لزومی ندارد خود a در دامنه تابع باشد. بنابراین لازم است به تعریف همسایگی یک نقطه که یکی از مفاهیم اساسی برای تعریف حد تابع در یک نقطه می‌باشد بپردازیم :

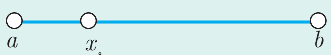
تعریف

اگر x_0 یک عدد حقیقی باشد، هر بازهٔ باز شامل x_0 را یک همسایگی x_0 می‌نامیم.

بنابراین اگر $x_0 \in (a,b)$، آن‌گاه بازهٔ (a,b) یک همسایگی x_0 است.



اگر نقطه x_0 را از این بازه حذف کنیم، مجموعه $(a,b)-\{x_0\}$ را همسایگی محذوف x_0 می‌نامیم.



به همین ترتیب :

اگر $r>0$، در این صورت بازه (x_0, x_0+r) را یک همسایگی راست و بازهٔ (x_0-r, x_0) را یک همسایگی چپ x_0 می‌نامیم.

کار در کلاس

۱ یک همسایگی، یک همسایگی محذوف، یک همسایگی راست و یک همسایگی چپ برای ۳، مثال بزنید.

۲ آیا بازهٔ (۲,۳) یک همسایگی ۲ می‌باشد؟ چرا؟

تعریف حد یک تابع

فرض کنیم تابع f در یک همسایگی عدد a (به جز احتمالاً در خود a) تعریف شده باشد. می‌گوییم «حد تابع f وقتی x به a نزدیک می‌شود برابر عدد حقیقی L است»، هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به L نزدیک کرد، به‌شرط آنکه متغیر x (با مقادیر مخالف a از دوطرف) به قدر کافی به a، نزدیک شود.

در این صورت می نویسیم : $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$

عدد L را حد تابع f در a می‌نامیم.

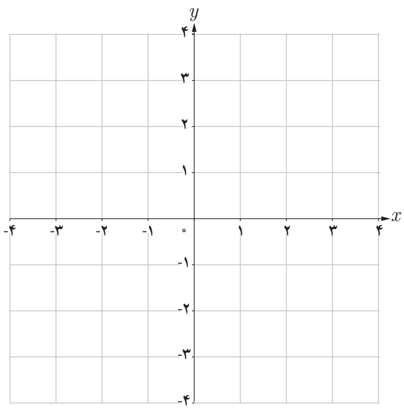
کار در کلاس

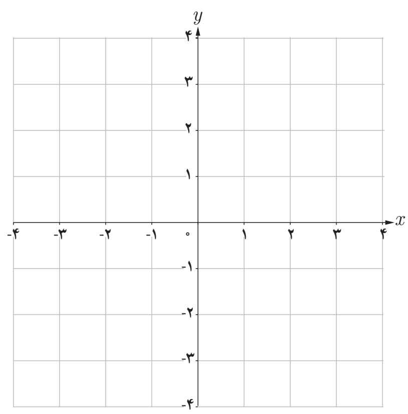
۱ نمودار تابعی مانند f را رسم کنید که در همسایگی راست نقطه ۲− تعریف شده باشد ولی در همسایگی چپ آن تعریف نشده باشد.

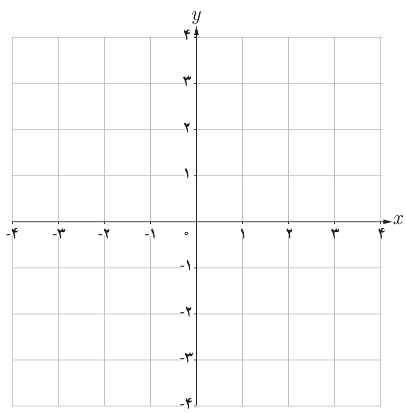
۲ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه ۱ دارای حد باشد ولی حد آن با مقدار تابع در این نقطه برابر نباشد.

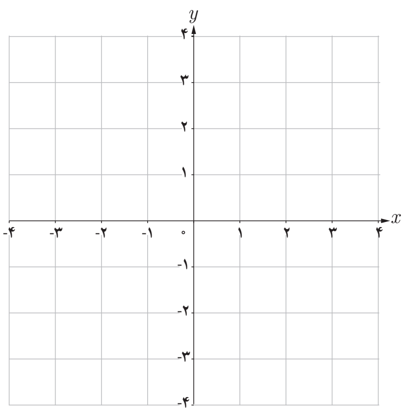
۳ نمودار دو تابع f و g را طوری رسم کنید که هردو در یک همسایگی نقطه ۳ تعریف شده باشند و $f(۳)\neq g(۳)$.

۴ نمودار دو تابع f و g را طوری رسم کنید که هر دو در نقطه ۲ دارای حد یکسان باشند و f در ۲ تعریف شده باشد اما تابع g در ۲ تعریف نشده باشد.


(۱)

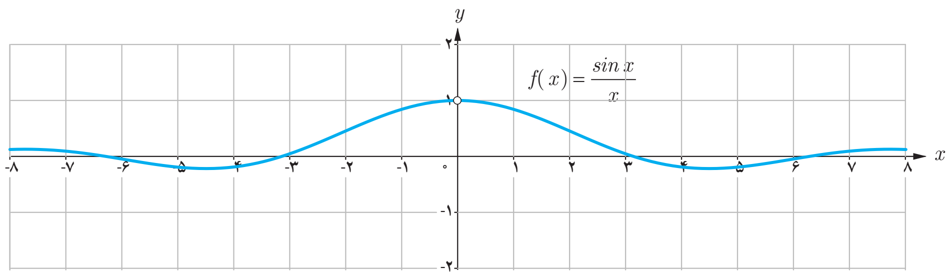

(۴)


(۳)


(۲)

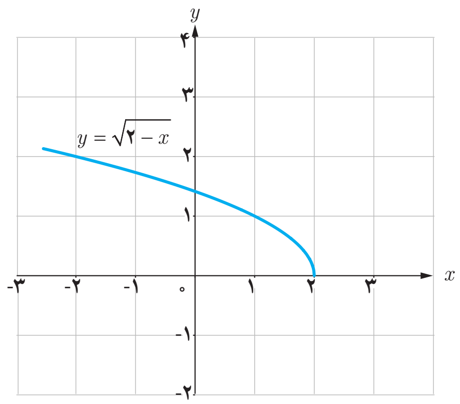
۵ تابع f با ضابطه $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ در نقطه صفر تعریف نشده است. در جدول روبه‌رو برخی مقادیر این تابع در اطراف صفر داده شده است. با توجه به جدول و نمودار تابع f، مقدار $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{\sin x}{x}$ را به دست آورید. (محور xها برحسب رادیان است).

x	$\dfrac{\sin x}{x}$
±۱	۰/۸۴۱۴۷۰۹۸
±۰/۵	۰/۹۵۸۸۵۱۰۸
±۰/۴	۰/۹۷۳۵۴۵۸۶
±۰/۳	۰/۹۸۵۰۶۷۳۶
±۰/۲	۰/۹۹۳۳۴۶۶۵
±۰/۱	۰/۹۹۸۳۳۴۱۷
±۰/۰۵	۰/۹۹۹۵۸۳۳۹
±۰/۰۱	۰/۹۹۹۹۸۳۳۳
±۰/۰۰۵	۰/۹۹۹۹۹۵۸۳
±۰/۰۰۱	۰/۹۹۹۹۹۹۸۳



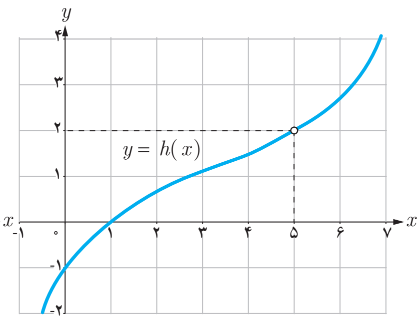
مثال: آیا تابع $f(x)=\sqrt{۲-x}$ در نقطه $x=۲$ حد دارد؟ چرا؟

حل: می‌دانیم دامنه تابع به صورت $D_f=(-\infty,۲]$ می‌باشد.
چون تابع f در هیچ همسایگی محذوف ۲، تعریف نشده است (مقادیر بیشتر از ۲ در دامنه تابع نیست) بنابراین، تابع f در نقطه $x=۲$ حد ندارد.

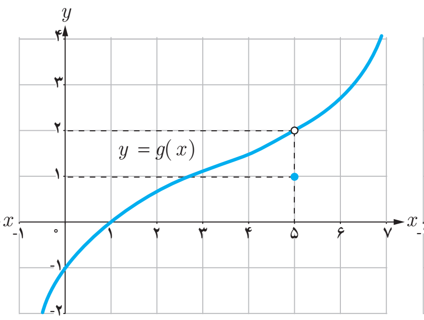


تمرین

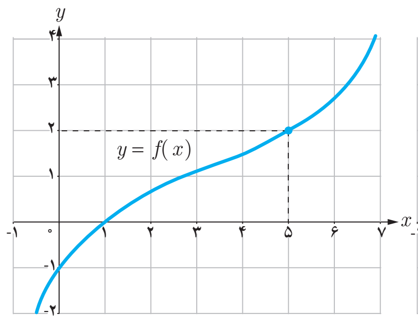
۱ نمودار سه تابع f، g و h به صورت زیر داده شده است. مقدار حد این توابع را در نقطهٔ $x=۵$، مشخص کنید.



$\lim\limits_{x\to ۵} h(x)=\ldots$

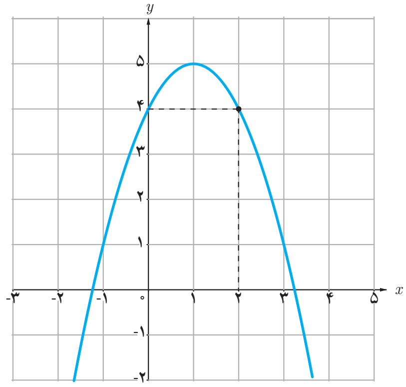


$\lim\limits_{x\to ۵} g(x)=\ldots$

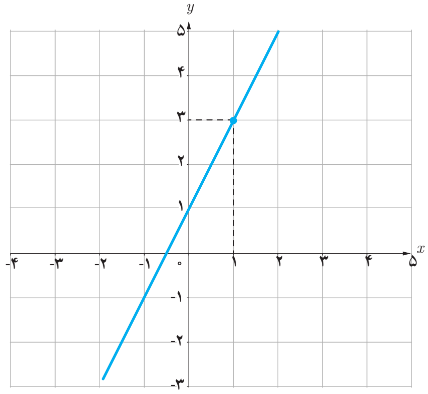


$\lim\limits_{x\to ۵} f(x)=\ldots$

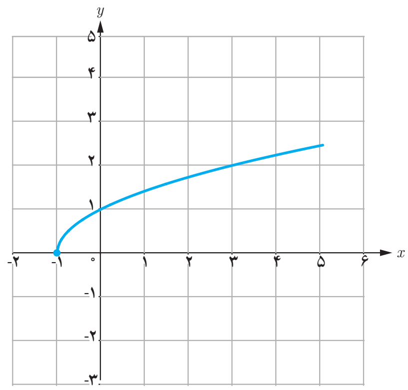
۲ با استفاده از نمودار، مقدار حد توابع زیر را، در صورت وجود، در نقاط داده شده به دست آورید.



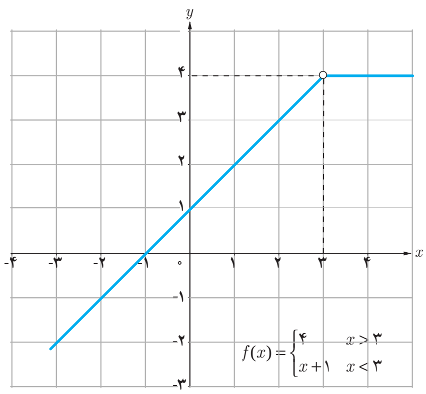
$\lim\limits_{x \to ۲} (-x^۲ + ۲x + ۴) =$



$\lim\limits_{x \to ۱} (۲x + ۱) =$



$\lim\limits_{x \to -۱} \sqrt{x+۱} =$



$\lim\limits_{x \to ۳} f(x) =$

۳ با تکمیل هر یک از جدول‌های زیر، مقدار حد هر تابع را در نقطهٔ موردنظر بیابید.

الف) $\lim\limits_{x \to ۰} (-۳x+۴) = \dots$

x	-۱	$-۰/۹$	$-۰/۱$	$-۰/۰۱$	$\rightarrow$	۰	$\leftarrow$	۰/۰۰۱	۰/۰۱	۰/۱	۰/۵	۱
$f(x)$	…	…	…	…	$\rightarrow$	?	$\leftarrow$	…	…	…	…	…

ب) $\lim\limits_{x \to -۱} f(x) = \dots$ ، $f(x)=\begin{cases} x-۴ & x \neq -۱ \\ ۳ & x=-۱ \end{cases}$

x	-۲	$-۱/۵$	$-۱/۱$	$-۱/۰۱$	$-۱/۰۰۱$	$\rightarrow$	-۱	$\leftarrow$	$-۰/۹۹۹$	$-۰/۹۹$	$-۰/۹$	$-۰/۸$
$f(x)$	…	…	…	…	…	$\rightarrow$	?	$\leftarrow$	…	…	…	…

۴ تابع f با ضابطه $f(x)=\begin{cases}3x-1 & x>2\\ x+3 & x<2\end{cases}$ را در نظر بگیرید :

الف) آیا تابع f در نقطه $x=2$، تعریف شده است؟

ب) با رسم نمودار f و یا نوشتن جدول مقادیر f در همسایگی محذوف ۲ مقدار $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ را به دست آورید.

۵ تابع g با ضابطه $g(x)=\begin{cases}-1 & x\in \mathbb{Z}\\ 2 & x\notin \mathbb{Z}\end{cases}$ را در نظر بگیرید :

الف) نمودار g را در فاصله $[-4,2]$ رسم کنید.

ب) با استفاده از نمودار g، حدود زیر را محاسبه کنید.

$\lim\limits_{x\to \sqrt{2}} g(x)=....$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to 1} g(x)=....$

۶ تابع f با ضابطه $f(x)=\dfrac{\sqrt{1-x^2}}{x}$ را درنظر بگیرید :

الف) دامنه تابع f را به دست آورید.

ب) دامنه تابع شامل همسایگی محذوف کدام نقطه است؟

پ) آیا این تابع در همسایگی ۰/۹ تعریف شده است؟

ت) آیا تابع f در همسایگی چپ $x=1$ تعریف شده است؟ در همسایگی راست $x=1$ چطور؟

۷ اگر بازهٔ $(x-1, 2x+3)$ یک همسایگی ۲ باشد، مجموعه مقادیر x را به دست آورید.

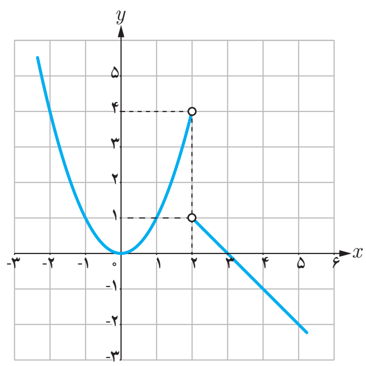
درس ۲

حدهای یک‌طرفه (حد چپ و حد راست)

در درس قبل دیدیم که تابع $f(x)=\sqrt{۲-x}$ در نقطهٔ ۲ حد ندارد. (چون در هیچ همسایگی راست ۲ تعریف نشده است.) ولی با توجه به اینکه دامنهٔ این تابع بازهٔ $(-\infty,۲]$ می‌باشد می‌توانیم رفتار تابع را در همسایگی چپ ۲ بررسی نماییم. گاهی لازم است، رفتار تابع را وقتی متغیر x با مقادیر بزرگ‌تر از a به a نزدیک می‌شود یا وقتی متغیر x با مقادیر کوچک‌تر از a به a نزدیک می‌شود بررسی و توصیف نماییم.

فعالیت

نمودار تابع $f(x)=\begin{cases}-x+۳ & x>۲\\ x^۲ & x<۲\end{cases}$ به صورت روبه‌رو است :



الف) اگر متغیر x با مقادیر بزرگ‌تر از ۲ به ۲ نزدیک شود آن‌گاه مقادیر $f(x)$ به عدد... نزدیک می‌شوند.

ب) اگر x با مقادیر کوچک‌تر از ۲ به ۲ نزدیک شود آن‌گاه مقادیر $f(x)$ به عدد... نزدیک می‌شوند.

پ) آیا تابع f در نقطهٔ $x=۲$ حد دارد؟

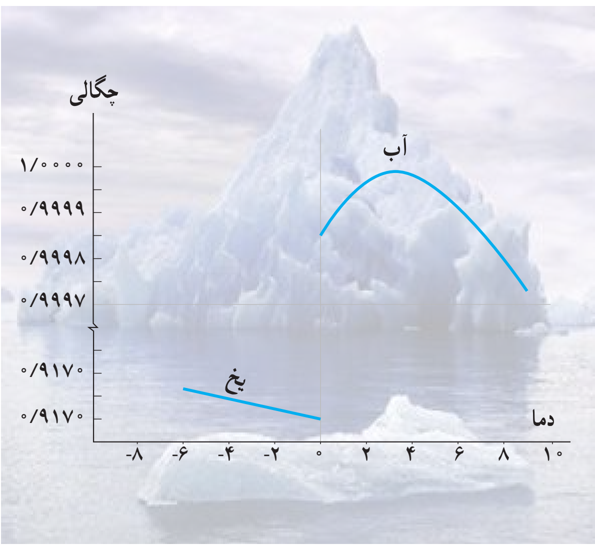
خواندنی

حتماً متوجه شده‌اید که یخ همیشه بر روی آب شناور است. توده یخ هرچقدر بزرگ باشد، باز هم در آب غرق نمی‌شود؛ مانند کوه‌های بزرگ یخ که بر روی آب دریاها و اقیانوس‌ها شناورند. آیا می‌دانید چرا یخ در آب غرق نمی‌شود؟

به‌طور کلی وقتی مایعی به شکل جامد درمی‌آید، منقبض می‌شود و مولکول‌هایش به هم نزدیک‌تر می‌شوند. به همین دلیل حجم ماده، کم می‌شود و چگالی آن افزایش می‌یابد. بنابراین مواد در حالت جامد سنگین‌تر از زمانی‌اند که به شکل مایع درآمده‌اند.

ولی آب مایعی است که خاصیت غیرعادی دارد. آب پس از انجماد به جای منقبض شدن، منبسط می‌شود؛ درنتیجه حجمش افزایش می‌یابد. تراکم یخ نه دهم آب است؛ به عبارت دیگر از نه لیتر آب ده لیتر یخ به‌دست می‌آید. به همین جهت وزن یخ، کمتر از آب هم حجمش است. به این ترتیب وقتی یخ درون آب قرار می‌گیرد، تنها نه دهم آن در آب فرو می‌رود و ۰/۱ دیگرش بر روی آب شناور می‌ماند.

نمودار چگالی آب و یخ بر حسب دما به صورت روبه‌رو است :



در فعالیت صفحهٔ قبل، مشاهده کردیم که وقتی از سمت راست (با مقادیر بزرگ‌تر از۲) به ۲ نزدیک می‌شویم، مقادیر تابع به عدد ۱ نزدیک می‌شوند و اگر از سمت چپ (با مقادیرکمتر از ۲) به ۲ نزدیک شویم مقادیر تابع به عدد ۴ نزدیک می‌شوند. چون این دو مقدار با هم مساوی نیستند، پس وقتی x در یک همسایگی محذوف ۲ به عدد ۲ نزدیک می‌شود، مقادیر $f(x)$ به عدد مشخصی نزدیک نمی‌شوند و درنتیجه این تابع در ۲ حد ندارد.

تعریف حد راست :

اگر تابع f در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد می‌گوییم حد راست تابع f در نقطه $x=a$ برابر عدد $L_۱$ است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به $L_۱$ نزدیک کرد، به‌شرط آنکه متغیر x (از سمت راست) به قدر کافی به a، نزدیک شود.

در این صورت می‌نویسیم : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=L_۱$

تعریف حد چپ :

اگر تابع f در یک همسایگی چپ نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد می‌گوییم حد چپ تابع f در نقطه $x=a$ برابر عدد $L_۲$ است هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به $L_۲$ نزدیک کرد، به‌شرط آنکه متغیر x (از سمت چپ) به قدر کافی به a، نزدیک شود.

در این صورت می‌نویسیم : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=L_۲$

اگر تابعی در یک همسایگی محذوف نقطه‌ای مانند a، تعریف شده باشد، آن‌گاه با توجه به مفهوم حد راست و حد چپ می‌توان گفت :

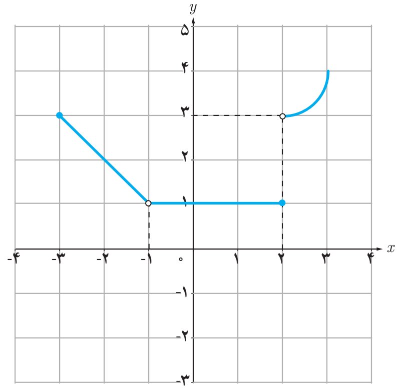
حد تابع f در نقطه $x=a$ وجود دارد اگر و تنها اگر حد چپ و راست تابع f در $x=a$ موجود و با هم برابر باشند.

نتیجه

اگر حد چپ و حد راست f در نقطه $x=a$، دو مقدار متمایز باشند آن‌گاه تابع f در نقطه $x=a$، حد ندارد.

کار در کلاس

۱ با توجه به نمودار f، حدهای خواسته‌شده را، در صورت وجود، به‌دست آورید.



$\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ ... $\qquad \lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ ... $\qquad \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$ ...

$\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ ... $\qquad \lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ ... $\qquad \lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$ ...

$\lim\limits_{x\to -3} f(x)$ ... $\qquad \lim\limits_{x\to -3^-} f(x)$ ... $\qquad \lim\limits_{x\to -3^+} f(x)$ ...

$\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ ... $\qquad \lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ ... $\qquad \lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ ...

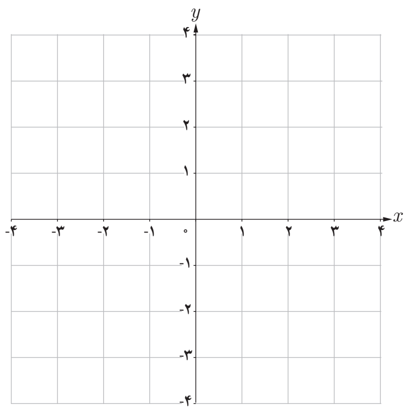
۲ نموداری از یک تابع رسم کنید که:

الف) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد.

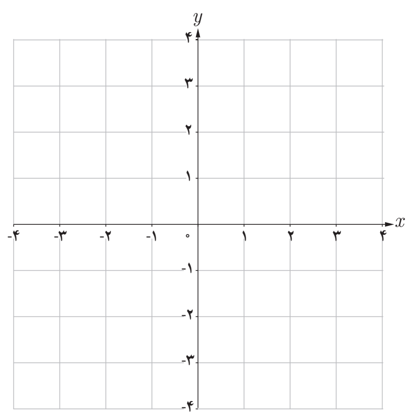
ب) در یک همسایگی محذوف ۲ تعریف شده باشد ولی در این نقطه حد نداشته باشد.

پ) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد نداشته باشد.

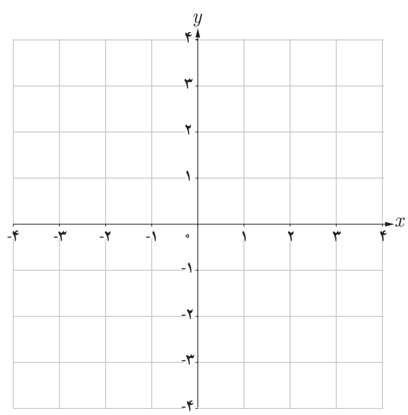
ت) در یک همسایگی ۲ تعریف شده باشد و در این نقطه حد داشته باشد ولی حد آن با مقدار تابع در نقطه ۲، یکسان نباشد.



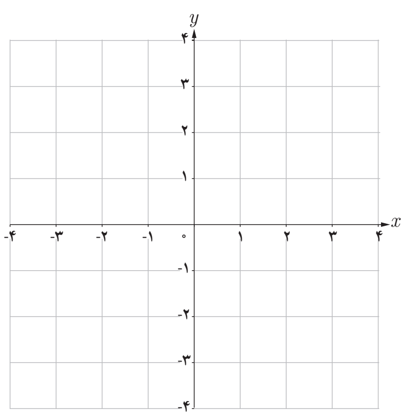
(الف)



(ب)

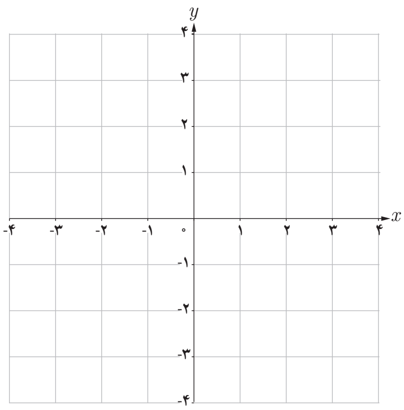


(پ)



(ت)

فعالیت



۱ نمودار تابع $f(x)=[x]$ را در فاصله $[-۱,۲]$رسم کنید.

۲ اگر x از طرف چپ به عدد ۱ نزدیک شود، آن‌گاه مقادیر

$f(x)$ به عدد ... نزدیک می‌شوند، بنابراین :

$$\lim_{x\to ۱^-} f(x)=.....$$

۳ حد راست تابع f در نقطه $x=۱$ را به دست آورید.

۴ آیا تابع f در نقطه $x=۱$ حد دارد؟ چرا؟

در فعالیت قبل مشاهده کردیم که در بازهٔ $(۱,۲)$ که یک همسایگی راست ۱ می‌باشد نمودار تابع $f(x)=[x]$ بر نمودار تابع ثابت $g(x)=۱$ منطبق است و داریم $\lim_{x\to ۱^+}[x]=\lim_{x\to ۱^+} g(x)=۱$.

به همین ترتیب، در $(۰,۱)$ که یک همسایگی چپ ۱ می‌باشد نمودار تابع $f(x)=[x]$ بر نمودار تابع ثابت $h(x)=۰$ منطبق است و داریم $\lim_{x\to ۱^-}[x]=\lim_{x\to ۱^-} h(x)=۰$.

اگر دو تابع f و g در یک همسایگی راست نقطه‌ای مانند a با هم برابر باشند و حد راست یکی از آنها در a وجود داشته باشد آن‌گاه حد راست تابع دیگر نیز در a وجود دارد و مقدار این دو حد با هم برابرند، یعنی :

اگر $\lim_{x\to a^+} f(x)=L$ آن‌گاه $\lim_{x\to a^+} g(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=L$.

به طریق مشابه، دو تابعی که در یک همسایگی چپ نقطه a با هم برابرند مقدار حد چپ آنها در نقطه a (درصورت وجود) یکسان است.

بنابراین، دو تابع که در یک همسایگی نقطه a (به‌جز احتمالاً خود a) با هم برابر باشند مقدار حد آنها در نقطه a (در صورت وجود) یکسان است.

مثال : مقدار حد راست تابع $f(x)=\frac{[x]}{x}$ را در نقطهٔ $x=۰$ به دست آورید.

حل : می‌دانیم روی بازهٔ $(۰,۱)$ مقدار $[x]$ برابر صفر است، پس روی بازهٔ $(۰,۱)$ تابع f با تابع ثابت $g(x)=۰$ برابر است بنابراین :

$$\lim_{x\to ۰^+}\frac{[x]}{x}=\lim_{x\to ۰^+} g(x)=۰$$

کار در کلاس

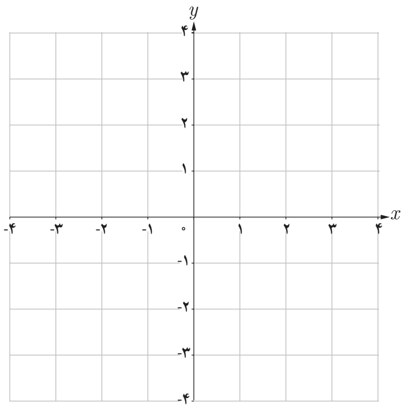
۱ تابع f با ضابطه $f(x)=\frac{|x|}{x}$ را درنظر بگیرید:

الف) با استفاده از تعریف قدرمطلق، تابع f را به صورت دوضابطه‌ای بنویسید.

ب) نمودار تابع f را رسم کنید.

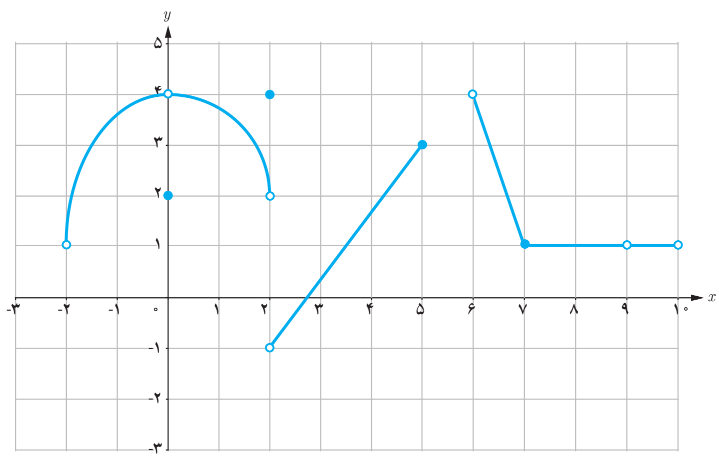
پ) با استفاده از نمودار f، حد چپ و حد راست تابع در صفر را به‌دست آورید.

ت) آیا تابع f در نقطهٔ صفر حد دارد؟ چرا؟



تمرین

۱ نمودار تابع f به صورت زیر است. حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید.



الف) $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

پ) $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$

ت) $\lim\limits_{x\to 6^-} f(x)$

ث) $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$

ج) $\lim\limits_{x\to 8} f(x)$

چ) $\lim\limits_{x\to 9} f(x)$

۲ با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} ۲x+۱ & x>۰ \\ x^{۲}+۲x & x<۰ \end{cases}$ به سؤالات زیر پاسخ دهید :

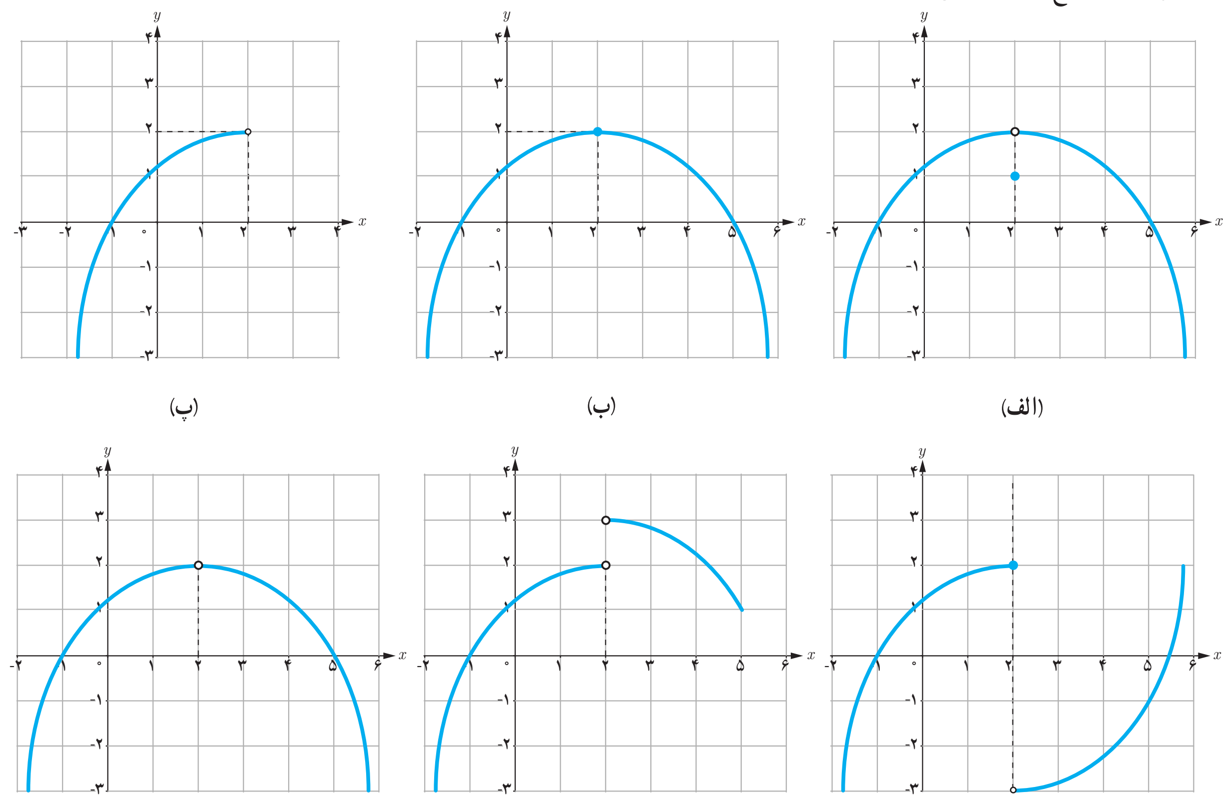
الف) اگر x از طرف چپ به عدد صفر نزدیک شود آن‌گاه مقادیر $f(x)$ به عدد . . . نزدیک می‌شوند، بنابراین :

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x) = \dots$$

ب) حد راست تابع f در نقطهٔ $x=۰$ را به دست آورید.

پ) آیا تابع f در نقطهٔ $x=۰$ حد دارد؟ چرا؟

۳ با توجه به نمودارهای توابع داده شده در زیر، هر کدام از گزاره‌های پایین صفحه در مورد چند تا از این توابع برقرار است؟ در هر مورد توابع را مشخص کنید.



(الف) (ب) (پ) (ت) (ث) (ج)

ــ تابع در همسایگی محذوف ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد.

ــ تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد ولی مقدار حد با مقدار تابع در این نقطه برابر نیست.

ــ تابع در همسایگی چپ ۲ تعریف شده و در این نقطه حد ندارد.

ــ تابع در همسایگی ۲ تعریف شده و در این نقطه حد دارد و حد آن برابر مقدار تابع در این نقطه است.

ــ تابع در نقطه ۲ تعریف نشده ولی در این نقطه حد دارد.

ــ تابع در همسایگی راست ۲ تعریف شده ولی در این نقطه حد ندارد.

۴ با توجه به دامنه تابع، در مورد حد چپ تابع f با ضابطه $f(x)=\sqrt{x^{۲}-x}$ در نقطهٔ $x=۱$ چه می‌توان گفت؟

۵ با توجه به دامنه تابع، در مورد حد راست تابع $f(x)=\dfrac{x}{[x]-۲}$ در نقطه $x=۲$ چه می‌توان گفت؟

۶ با رسم نمودار تابع $f(x)=-(x-۱)^{۲}+۲$، حدود زیر را مشخص کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۱}[f(x)]$ ب) $\left[\lim\limits_{x\to ۱} f(x)\right]$

([ ] نماد جزء صحیح است)

۷ با رسم نمودار تابع $f(x)=|x|$:

الف) مقدار $\lim\limits_{x\to ۰}|x|$ را به‌دست آورید.

ب) اگر $a\in\mathbb{R}$ یک عدد دلخواه باشد آیا تساوی $\lim\limits_{x\to a}|x|=|a|$ برقرار است؟

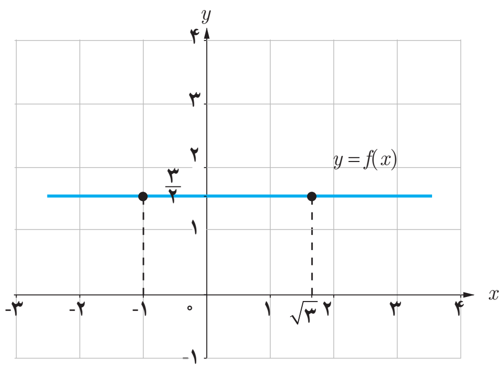
درس ۳

قضایای حد

در بخش‌های قبل برای محاسبه حد توابع، با دو روش تکمیل جدول و رسم نمودار آشنا شدید. همان‌طور که مشاهده کردید تکمیل جدول زمان‌بر و رسم نمودار بعضی از توابع نیز مشکل است. در این بخش به بیان قضایایی درباره حد می‌پردازیم که با استفاده از آنها، حد بسیاری از توابع را می‌توان به آسانی محاسبه کرد.

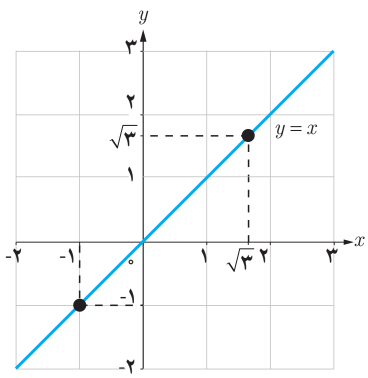
فعالیت

الف) فرض کنید f تابع ثابت $\frac{۳}{۲}$ باشد. با توجه به نمودار تابع، مقدار حدهای زیر را بیابید.



$$\lim_{x\to\sqrt{۳}} f(x)= \dots \qquad \lim_{x\to -۱} f(x)= \dots$$

ب) فرض کنید g تابع همانی باشد، یعنی برای هر عدد حقیقی x داشته باشیم $g(x)=x$. با توجه به نمودار، مقدار حدهای زیر را بیابید.



$$\lim_{x\to\sqrt{۳}} g(x)= \dots \qquad \lim_{x\to -۱} g(x)= \dots$$

قضیه :

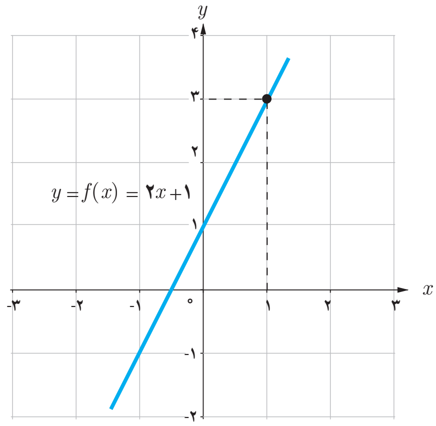
الف) حد تابع ثابت $f(x)=c$ در هر عدد دلخواه a برابر مقدار ثابت c است. یعنی، $\lim_{x\to a} c=c$

ب) حد تابع همانی $g(x)=x$ در هر عدد دلخواه a، برابر a است. یعنی، $\lim_{x\to a} x=a$

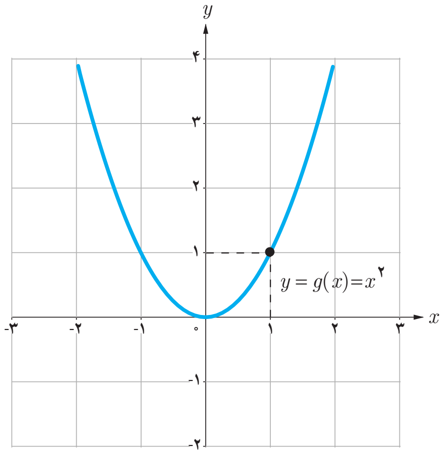
فعالیت

توابع $f(x)=۲x+۱$ و $g(x)=x^{۲}$ را در نظر بگیرید.

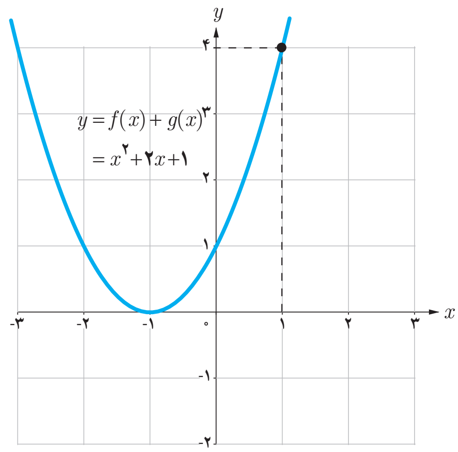
الف) با توجه به نمودار توابع f، g، $f+g$ و $f-g$، مقدار حدهای خواسته شده را بیابید.



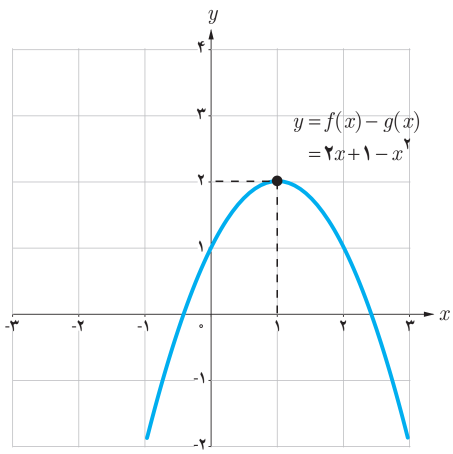
$\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=\cdots$



$\lim\limits_{x\to ۱} g(x)=\cdots$



$\lim\limits_{x\to ۱}\big(f(x)+g(x)\big)=\cdots$



$\lim\limits_{x\to ۱}\big(f(x)-g(x)\big)=\cdots$

ب) با استفاده از قسمت (الف)، درستی این تساوی‌ها را بررسی کنید.

$$\lim_{x\to ۱}\big(f(x)+g(x)\big)=\lim_{x\to ۱} f(x)+\lim_{x\to ۱} g(x)$$

$$\lim_{x\to ۱}\big(f(x)-g(x)\big)=\lim_{x\to ۱} f(x)-\lim_{x\to ۱} g(x)$$

قضیه : اگر دو تابع f و g در نقطه $x=a$ حد داشته باشند و $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L_1$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=L_2$ ، آن‌گاه

الف) (حد مجموع) مجموع این دو تابع در $x=a$ حد دارد و داریم :

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=L_1+L_2$$

ب) (حد تفاضل) تفاضل این دو تابع در $x=a$ حد دارد و داریم :

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)=L_1-L_2$$

پ) (حد حاصل‌ضرب) حاصل‌ضرب این دو تابع در $x=a$ حد دارد و داریم :

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)g(x)\right)=\left(\lim_{x\to a} f(x)\right).\left(\lim_{x\to a} g(x)\right)=L_1.L_2$$

ت) (حد خارج قسمت) به شرط آنکه $L_2\neq 0$، تابع $\frac{f}{g}$ در $x=a$ حد دارد و داریم :

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}=\frac{L_1}{L_2}$$

کار در کلاس

فرض کنید $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجود و c یک عدد دلخواه است. با استفاده از قضیهٔ فوق، توضیح دهید چرا تساوی‌های زیر برقرارند؟

الف) $\lim\limits_{x\to a} cf(x)=c\lim\limits_{x\to a} f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to a} f^2(x)=\left(\lim\limits_{x\to a} f(x)\right)^2$

پ) $\lim\limits_{x\to a}\left(-f(x)\right)=-\lim\limits_{x\to a} f(x)$

ت) $\lim\limits_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$ (به شرط آنکه $\lim\limits_{x\to a} f(x)\neq 0$)

تذکر : قضیه قبل را می‌توان برای سه تابع و بیشتر نیز بیان کرد. یعنی، اگر n یک عدد طبیعی و توابع f_1، ...، f_n همگی در نقطه $x=a$ حد داشته باشند، آن‌گاه :

$$\lim_{x\to a}\left(f_1(x)+\cdots+f_n(x)\right)=\lim_{x\to a}f_1(x)+\cdots+\lim_{x\to a}f_n(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left(f_1(x)\times\cdots\times f_n(x)\right)=\lim_{x\to a}f_1(x)\times\cdots\times\lim_{x\to a}f_n(x)$$

به‌ویژه، اگر تابع f در نقطه $x=a$ حد داشته باشد آن‌گاه :

$$\lim_{x\to a}\left(f(x)\right)^n=\left(\lim_{x\to a}f(x)\right)^n$$

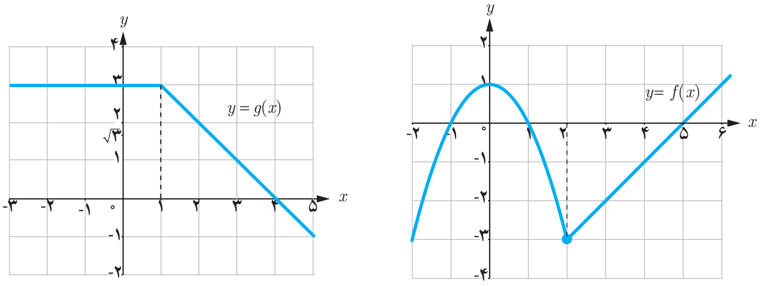
که در حالت خاص، اگر تابع f را تابع همانی $f(x)=x$ انتخاب کنیم، نتیجه می‌شود :

$$\lim_{x\to a}x^n=a^n$$

مثال : دو تابع $f(x)=\begin{cases}1-x^2 & x<2\\ x-5 & x\geq 2\end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases}3 & x<1\\ 4-x & x\geq 1\end{cases}$ را در نظر بگیرید.

حد توابع $f+g$، $f-g$، $f.g$ و $\dfrac{f}{g}$ را در نقطه $x=2$ به‌دست آورید.

حل : ابتدا حد دو تابع f و g را در نقطه $x=2$ محاسبه می‌کنیم. برای این منظور، نمودار دو تابع را رسم می‌کنیم.



با توجه به نمودارها داریم : $\lim_{x\to 2}f(x)=-3$ و $\lim_{x\to 2}g(x)=2$.

اکنون با استفاده از قضیه، به محاسبه حدهای مورد نظر می‌پردازیم :

$$\lim_{x\to 2}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to 2}f(x)+\lim_{x\to 2}g(x)=-3+2=-1$$

$$\lim_{x\to 2}\left(f(x)-g(x)\right)=\lim_{x\to 2}f(x)-\lim_{x\to 2}g(x)=-3-2=-5$$

$$\lim_{x\to 2}\left(f(x)g(x)\right)=\left(\lim_{x\to 2}f(x)\right)\left(\lim_{x\to 2}g(x)\right)=(-3)(2)=-6$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to 2}f(x)}{\lim_{x\to 2}g(x)}=\frac{-3}{2}$$

مثال :

$$۱)\ \lim_{x\to\sqrt{۲}}(x^{۴}+۳x-۱)=\lim_{x\to\sqrt{۲}}x^{۴}+\lim_{x\to\sqrt{۲}}۳x-\lim_{x\to\sqrt{۲}}۱$$

$$=(\lim_{x\to\sqrt{۲}}x)^{۴}+۳\lim_{x\to\sqrt{۲}}x-\lim_{x\to\sqrt{۲}}۱$$

$$=\left(\sqrt{۲}\right)^{۴}+۳\left(\sqrt{۲}\right)-۱=۴+۳\sqrt{۲}-۱=۳+۳\sqrt{۲}$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۳}x|x|=\left(\lim_{x\to ۳}x\right)\times\left(\lim_{x\to ۳}|x|\right)=۳\times|۳|=۹$$

$$۳)\ \lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{۴x^{۲}+۷}{۱-x}=\frac{\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}(۴x^{۲}+۷)}{\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}(۱-x)}=\frac{۴\left(\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}x\right)^{۲}+۷}{۱-\lim_{x\to\frac{۱}{۲}}x}=\frac{۴(\frac{۱}{۲})^{۲}+۷}{۱-\frac{۱}{۲}}=۱۶$$

قضیه :

هر چند جمله‌ای مانند $p(x)=b_nx^n+b_{n-۱}x^{n-۱}+\dots+b_۱x+b_۰$ در هر نقطه دلخواه a حد دارد و مقدار حد با مقدار چند جمله‌ای در نقطه a برابر است. یعنی :

$$\lim_{x\to a}(b_nx^n+b_{n-۱}x^{n-۱}+\dots+b_۰)=b_na^n+b_{n-۱}a^{n-۱}+\dots+b_۰$$

کار در کلاس

الف) مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$۱)\ \lim_{x\to -۱}x^{۴}$$

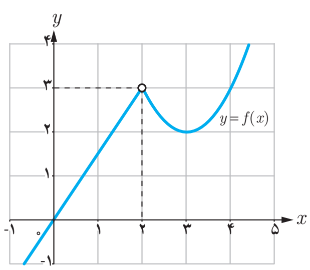
$$۲)\ \lim_{x\to ۱۰}(۵x^{۳}-۶|x|+۱)$$

$$۳)\ \lim_{x\to ۲}\frac{x^{۲}+۴x+۴}{۴x^{۳}-۷x+۱}$$

$$۴)\ \lim_{x\to\frac{۱}{۲}}\frac{x-[x]}{۱-x}$$

ب) نمودار تابع f در شکل روبه‌رو رسم شده است.

مقدار $\lim_{x\to ۲}x\,f(x)$ را بیابید.

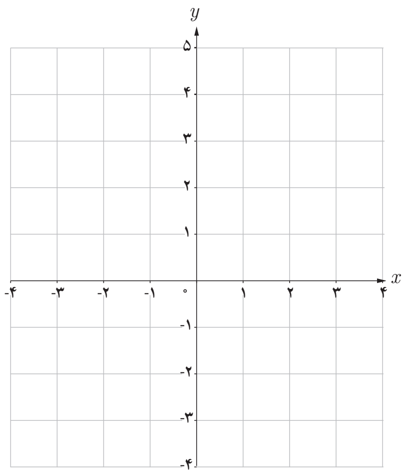


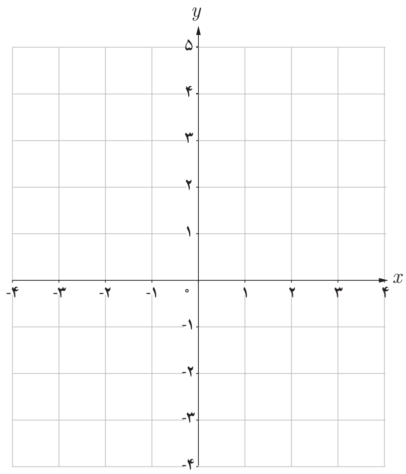
فعالیت

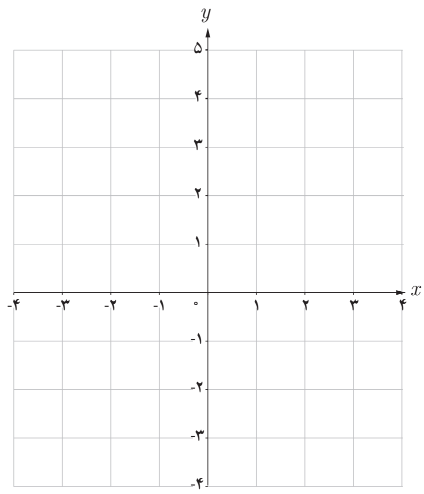
دو تابع $f(x)=\begin{cases} ۴ & x\leq ۲ \\ ۳ & x>۲ \end{cases}$ و $g(x)=\begin{cases} -۲ & x\leq ۲ \\ -۱ & x>۲ \end{cases}$ را در نظر بگیرید.

الف) ضابطه تابع $f+g$ را بیابید.

ب) نمودار توابع f، g و $f+g$ را رسم کنید.







پ) آیا حد دو تابع f و g در $x=۲$ وجود دارد؟

ت) آیا حد تابع $f+g$ در $x=۲$ وجود دارد؟

ث) آیا می‌توان از قضیه حد مجموع برای محاسبه حد $f+g$ در $x=۲$ استفاده کرد؟ چرا؟

برای استفاده از قضیه حد مجموع، حد تفاضل و ...، ابتدا باید توجه کنیم که حد توابع f و g در نقطه $x=a$ موجود باشند.

کار در کلاس

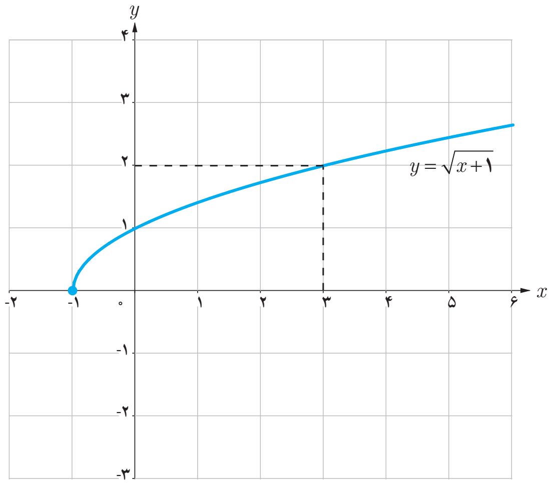
فرض کنید توابع f و g در یک همسایگی محذوف نقطه a تعریف شده‌اند.

الف) اگر $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ موجود باشد، آیا می‌توان نتیجه گرفت $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ وجود دارند؟ چرا؟

ب) ثابت کنید اگر $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ و $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ موجود باشند، آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ نیز وجود دارد.

فعالیت

در شکل روبه‌رو نمودار تابع $f(x)=\sqrt{x+1}$ رسم شده است.



الف) با توجه به نمودار، مقدار حد $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x+1}$ را بیابید.

ب) آیا تساوی $\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{x+1}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 3}(x+1)}$ برقرار است؟

قضیه :

فرض کنید تابع f در نقطه a حد دارد.

اگر تابع f در یک همسایگی محذوف a نامنفی باشد آن‌گاه داریم :
$$\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{\lim_{x\to a} f(x)}$$

به‌طور کلی، برای هر عدد طبیعی n، اگر $\sqrt[n]{f(x)}$ در یک همسایگی a تعریف شده باشد، آن‌گاه داریم :
$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)}=\sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

مثال :

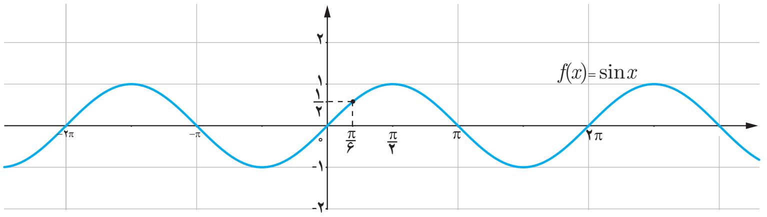
۱) $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[n]{x}=\sqrt[n]{a}$ (برای nهای زوج a باید مثبت باشد)

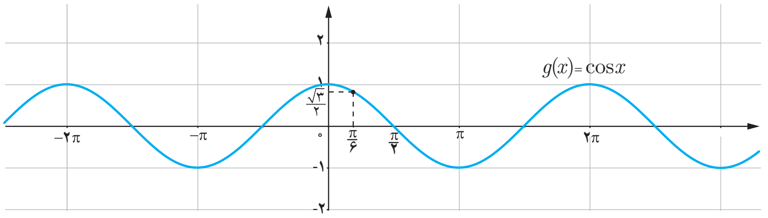
۲) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2x-1}}{3x-4}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 1}\sqrt{2x-1}}{\lim\limits_{x\to 1}(3x-4)}=\dfrac{\sqrt{\lim\limits_{x\to 1}(2x-1)}}{\lim\limits_{x\to 1}(3x-4)}=\dfrac{\sqrt{2(1)-1}}{3(1)-4}=-1$

حد توابع مثلثاتی

فعالیت

نمودارهای توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ در زیر رسم شده‌اند.





الف) مقدار حدهای زیر را بیابید.

۱) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۶}} \sin x = \cdots$

۲) $\lim\limits_{x \to \pi} \sin x = \cdots$

۳) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{۶}} \cos x = \cdots$

۴) $\lim\limits_{x \to \pi} \cos x = \cdots$

ب) آیا مقدار حد تابع $f(x)=\sin x$ در $\frac{\pi}{۶}$ با مقدار $\sin(\frac{\pi}{۶})$ برابر است؟

پ) آیا مقدار حد تابع $g(x)=\cos x$ در $\frac{\pi}{۶}$ با مقدار $\cos(\frac{\pi}{۶})$ برابر است؟

قضیه : برای هر عدد حقیقی a،

$$\lim_{x \to a} \sin x = \sin a \quad \text{و} \quad \lim_{x \to a} \cos x = \cos a$$

مثال :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{۶}} (۲\cos^۲ x - \sin x) = ۲\cos^۲(\frac{\pi}{۶}) - \sin(\frac{\pi}{۶}) = ۲(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲ - \frac{۱}{۲} = ۱$$

کار در کلاس

مقدار حدهای زیر را بیابید.

$$۱)\ \lim_{x\to -\pi} \frac{\pi \cos x}{x}$$

$$۲)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{۳}} \frac{\sin x}{\cos x}$$

تذکر : همه قضایا و فعالیت‌های بیان شده دربارهٔ حد (دوطرفه)، برای حد چپ و حد راست نیز برقرارند. به‌عنوان مثال، اگر حد چپ توابع f و g در a موجود باشند، آن‌گاه :

$$\lim_{x\to a^-} \big(f(x)+g(x)\big) = \lim_{x\to a^-} f(x) + \lim_{x\to a^-} g(x)$$

مثال :

$$۱)\ \lim_{x\to a^+} x^n = \lim_{x\to a^+} \overbrace{(x\times\cdots\times x)}^{n\ \text{بار}} = (\lim_{x\to a^+} x)\times\cdots\times(\lim_{x\to a^+} x) = a\times\cdots\times a = a^n$$

$$۲)\ \lim_{x\to ۱^-} \frac{x-[x]}{x^۲+۲} = \frac{\lim_{x\to ۱^-}(x-[x])}{\lim_{x\to ۱^-}(x^۲+۲)} = \frac{\lim_{x\to ۱^-} x - \lim_{x\to ۱^-}[x]}{\lim_{x\to ۱^-} x^۲ + \lim_{x\to ۱^-} ۲} = \frac{۱-۰}{۳} = \frac{۱}{۳}$$

$$۳)\ \lim_{x\to ۰^+} (\cos x - \sin x) = \cos(۰) - \sin(۰) = ۱$$

کار در کلاس

مقدار حد $\lim_{x\to ۲^+} \frac{\sqrt{x-۲}}{[x]+۲}$ را بیابید.

تمرین

۱ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۹}(\sqrt{x}-۹)^{۳}$

ب) $\lim\limits_{x\to -۱}(-۶x^{۷}-۴x^{۲}+۵)$

پ) $\lim\limits_{x\to -\frac{۵}{۳}}\dfrac{(x+\pi)(۳x+۵)}{(۳x+۶)(x^{۳}+۱)}$

ت) $\lim\limits_{x\to \sqrt{۲}^{+}}\dfrac{۱-x^{۲}}{x^{۲}-۴}$

ث) $\lim\limits_{x\to \frac{۱}{۲}}\sqrt{۴x^{۲}+۶x}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۰^{+}}\dfrac{\sin x}{x+\cos x}$

چ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}}\dfrac{|\cos x|}{x-\pi}$

۲ فرض کنید f یک تابع باشد، به طوری که $\lim\limits_{x\to ۱}f(x)=۳$ و $\lim\limits_{x\to ۲}f(x)=۳$. آیا می‌توان گفت f حتماً تابع ثابت ۳ است؟

۳ تابع g را به گونه‌ای تعریف کنید که داشته باشیم : $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{g(x)}{x^{۲}-۱}=۴$.

۴ نشان دهید اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to a}(f(x)-L)=۰$. آیا عکس این مطلب نیز برقرار است؟

۵ توابع زیر را در نظر بگیرید.

$$y=۳x+۲ \quad , \quad y=x^{۲}-۱ \quad , \quad y=[x]-۱ \quad \quad y=\begin{cases} -۲ & x<۱ \\ ۲ & x>۱ \end{cases}$$

الف) مقدار حد هر یک از توابع فوق در $x=۱$ را (در صورت وجود) بیابید.

ب) با انتخاب توابع f و g از بین چهار تابع فوق، جدول زیر را کامل کنید.

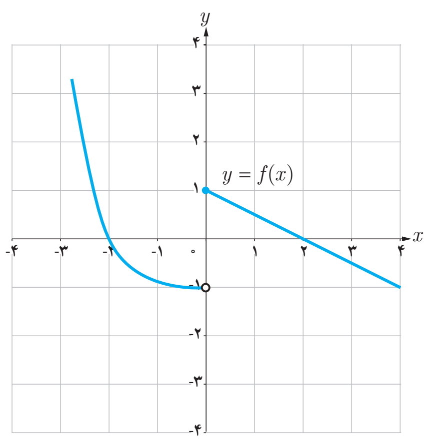
هر سه تابع f، g و $f+g$ در ۱ حد دارند.	$f(x)=\cdots$	$g(x)=\cdots$	$f(x)+g(x)=\ldots$
تابع $f.g$ در ۱ حد دارد اما تابع f در ۱ حد ندارد.	$f(x)=\cdots$	$g(x)=\cdots$	$f(x)\ g(x)=\cdots$
توابع f و g در ۱ حد راست دارند اما تابع $\frac{f}{g}$ در ۱ حد راست ندارد.	$f(x)=\cdots$	$g(x)=\cdots$	$\frac{f(x)}{g(x)}=\cdots$
تابع $f^{۲}$ در ۱ حد دارد اما تابع f در ۱ حد ندارد.	$f(x)=\cdots$		$f^{۲}(x)=\cdots$
تابع f در ۱ حد دارد اما تابع $\sqrt{f}$ در ۱ حد ندارد.	$f(x)=\cdots$		$\sqrt{f(x)}=\cdots$

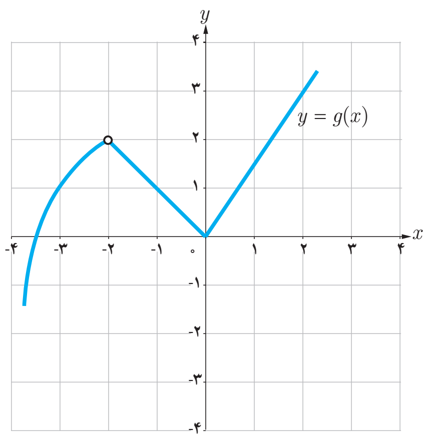
۶ اگر حد تابع f در a موجود باشد اما تابع g در a حد نداشته باشد در مورد وجود حد تابع $f+g$ در a چه می‌توان گفت؟

۷ مقدار b را طوری تعیین کنید که تابع زیر در $x=-۱$ حد داشته باشد:

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^{۲}+[x]}{|x|} & x<-۱ \\ ۳x+b & x>-۱ \end{cases}$$

۸ در شکل زیر نمودار توابع f و g رسم شده‌اند. با استفاده از نمودارها، مقدار حدهای زیر را بیابید.





$$\lim_{x\to -۲}\left(۲g(x)-f(x)\right)$$

$$\lim_{x\to ۰}\frac{g(x)}{f(x)}$$

$$\lim_{x\to -۳}-۳\sqrt{g(x)}$$

$$\lim_{x\to ۲}\sqrt[۳]{۸g(x)}$$

درس ۴

محاسبه حد توابع کسری (حالت $\frac{0}{0}$)

در این بخش، به محاسبه حد توابعی مانند $\frac{f}{g}$ می‌پردازیم که حد صورت و حد مخرج کسر در نقطه a، هر دو برابر صفر است. در این‌گونه موارد، نمی‌توانیم از قضیه حد خارج قسمت استفاده کنیم، بنابراین سعی می‌کنیم با تجزیهٔ صورت و مخرج کسر به عامل‌های مناسب، کسر را ساده نماییم. برای این امر از اتحادهای جبری و مثلثاتی استفاده می‌کنیم.[1]

مثال : مقدار $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}$ را بیابید.

حل : با توجه به اینکه $\lim\limits_{x\to 3}(x-3)=0$ ، پس نمی‌توانیم از قضیه حد خارج قسمت استفاده کنیم. در واقع از $\frac{\lim\limits_{x\to 3}(x^2-9)}{\lim\limits_{x\to 3}(x-3)}$ عبارت $\frac{0}{0}$ حاصل می‌شود. در این‌گونه موارد، سعی می‌کنیم کسر را ساده کرده و سپس حد را محاسبه نماییم :

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{\cancel{(x-3)}}=\lim_{x\to 3}(x+3)=6$$

کار در کلاس

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4x+4}{x^2-4}$$

۱. در این کتاب، حد کسرهایی مورد بررسی قرار می‌گیرند که صورت و مخرج آنها چند جمله‌ای‌های حداکثر از درجه ۲ و عبارات رادیکالی به‌صورت $\sqrt{ax+b}$ باشند. همچنین، در عبارات شامل توابع مثلثاتی، توان تابع سینوس و کسینوس حداکثر ۲ و کمان آنها به‌صورت $x+b$ یا $2x+b$ خواهند بود.

مثال : مقدار $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{\sqrt{x+۸}-۳}{x-۱}$ را بیابید.

حل : حد صورت و مخرج کسر در $x=۱$، برابر صفر می‌شود و در صورت کسر عبارت گنگ $\sqrt{x+۸}-۳$ وجود دارد. در این‌گونه موارد صورت و مخرج کسر را در یک عبارت مناسب ضرب می‌کنیم تا این عبارت گنگ، به عبارتی گویا تبدیل شود. در این مثال، صورت و مخرج کسر را در عبارت $\sqrt{x+۸}+۳$ ضرب می‌کنیم.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{\sqrt{x+۸}-۳}{x-۱}=\lim_{x\to ۱}\left(\frac{\sqrt{x+۸}-۳}{x-۱}\times\frac{\sqrt{x+۸}+۳}{\sqrt{x+۸}+۳}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{\left(\sqrt{x+۸}\right)^۲-(۳)^۲}{(x-۱)\left(\sqrt{x+۸}+۳\right)}$$

$$=\lim_{x\to ۱}\frac{\cancel{(x-۱)}}{\cancel{(x-۱)}(\sqrt{x+۸}+۳)}=\frac{۱}{\sqrt{۱+۸}+۳}=\frac{۱}{۶}$$

کار در کلاس

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x^۲-۹}{\sqrt{۳x-۵}-۲}$$

مثال :

$$۱)\ \lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos x}{x}=\lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱-\cos x}{x}\times\frac{۱+\cos x}{۱+\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{۱-\cos^۲ x}{x(۱+\cos x)}=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin^۲ x}{x(۱+\cos x)}$$

$$=\lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{x}\ \lim_{x\to ۰}\frac{\sin x}{۱+\cos x}=۱\times ۰=۰$$

$$۲)\ \lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos ۲x}=\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{\cos x-\sin x}{\cos^۲ x-\sin^۲ x}$$

$$=\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}}\frac{\cancel{(\cos x-\sin x)}}{\cancel{(\cos x-\sin x)}(\cos x+\sin x)}=\frac{۱}{\cos\frac{\pi}{۴}+\sin\frac{\pi}{۴}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

کار در کلاس

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to ۰^+} \frac{\sin ۲x}{۳x}$$

مثال : مقدار $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\sqrt{۱+x}-۱}{x}$ را بیابید.

حل : قرار می‌دهیم : $t=\sqrt{۱+x}$. پس اگر x به صفر نزدیک شود، t به ۱ نزدیک می‌شود و داریم $x=t^۲-۱$ و بنابراین،

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt{۱+x}-۱}{x} = \lim_{t\to ۱} \frac{t-۱}{t^۲-۱} = \lim_{t\to ۱} \frac{\cancel{(t-۱)}}{\cancel{(t-۱)}(t+۱)} = \frac{۱}{۲}$$

در مثال فوق، با تغییر متغیر مناسب، حد موردنظر را به یک حد ساده‌تر تبدیل کردیم و سپس حد جدید را محاسبه نمودیم.

مثال : مقدار $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{۲x-\pi}{\cos x}$ را بیابید.

حل : قرار می‌دهیم : $t=x-\frac{\pi}{۲}$. پس اگر x به $\frac{\pi}{۲}$ نزدیک شود، t به صفر نزدیک می‌شود و داریم $x=t+\frac{\pi}{۲}$.

پس،

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{۲x-\pi}{\cos x} = \lim_{t\to ۰} \frac{۲(t+\frac{\pi}{۲})-\pi}{\cos(t+\frac{\pi}{۲})} = \lim_{t\to ۰} \frac{۲t}{-\sin t} = -۲\lim_{t\to ۰} \frac{t}{\sin t} = -۲\times ۱ = -۲$$

کار در کلاس

مقدار حد زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to \frac{\pi}{۴}} \frac{\sin ۲x-۱}{۴x-\pi}$$

تمرین

۱ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to -۱} \frac{۲x^۲+x-۱}{۳x^۲+۳x}$

ب) $\lim\limits_{x\to ۲^+} \frac{x^۲[x]-۸}{x-۲}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۲} \frac{\sqrt{x+۲}-۲}{x^۲-۴}$

ت) $\lim\limits_{x\to ۴} \frac{۲-\sqrt{x}}{۳-\sqrt{۲x+۱}}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{\sqrt{۱+x}-\sqrt{۱-x}}{x^۲+x}$

ج) $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x}-۱}$

۲ اگر $f(x)=\frac{x+۱}{۲x^۲-x-۱}$ و $g(x)=\frac{۲x+۱}{x}$ ، حاصل $\lim\limits_{x\to -\frac{۱}{۲}} f(x)g(x)$ را بیابید.

۳ مقدار حدهای زیر را بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \frac{۱-\sin x}{\cos x}$

ب) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}} \frac{\cos(x+\frac{\pi}{۴})}{\cos x-\sin x}$

پ) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \frac{x^۲}{|۱-\cos x|}$

ت) $\lim\limits_{x\to ۰} \frac{۲-۲\cos ۲x}{x\sin x}$

ث) $\lim\limits_{x\to -\pi} \frac{\cos x+۱}{x+\pi}$

ج) $\lim\limits_{x\to a} \frac{\sin x-\sin a}{x-a}$

چ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۳}} \frac{\sin(x-\frac{\pi}{۳})}{۶x-۲\pi}$

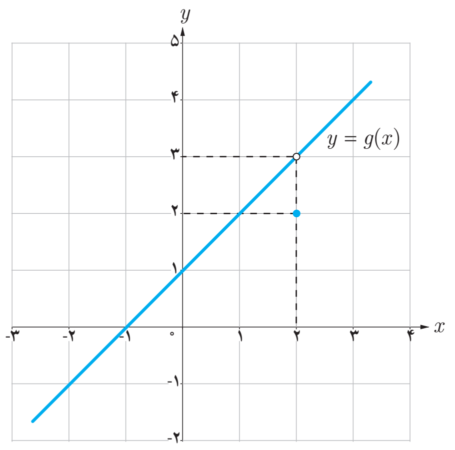
ح) $\lim\limits_{x\to ۱} \frac{۲x-۳\sqrt{x}+۱}{x-۱}$

درس ۵

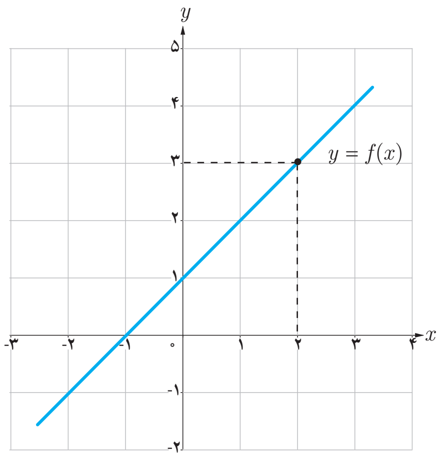
پیوستگی

فعالیت

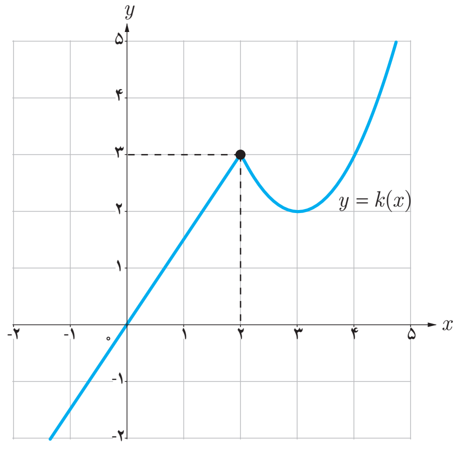
الف) با توجه به نمودارها، مقادیر زیر هر نمودار را (در صورت وجود) به دست آورید.



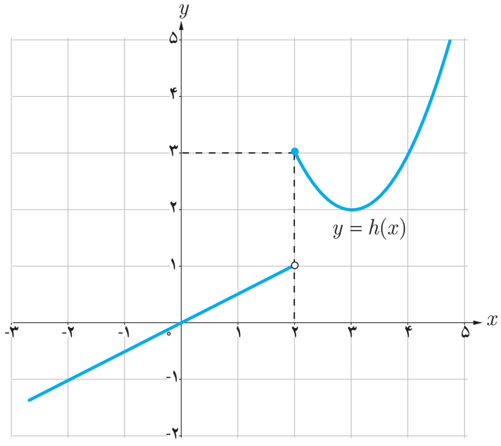
$g(۲)= \cdots \qquad \lim_{x\to ۲} g(x) = \cdots$



$f(۲)= \cdots \qquad \lim_{x\to ۲} f(x) = \cdots$



$k(۲)= \cdots \qquad \lim_{x\to ۲} k(x) = \cdots$



$h(۲)= \cdots \qquad \lim_{x\to ۲} h(x) = \cdots$

ب) برای کدام‌یک از توابع، حد تابع در ۲ با مقدار تابع در ۲ برابر است؟

پ) در نمودار کدام‌یک از توابع، در نقطه‌ای به طول ۲، گسستگی وجود ندارد؟

همان‌طور که در شکل‌های فوق مشاهده می‌کنید نمودار تابع f (و همچنین تابع k) در نقطه‌ای به طول ۲، هیچ گسستگی ندارد. در این حالت اصطلاحاً گوییم «تابع f (و همچنین تابع k) در نقطه $x=۲$ *پیوسته* است».

تعریف پیوستگی

گوییم تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته است هرگاه $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

بنابراین، برای پیوسته بودن تابع f در نقطه a ، باید شرایط زیر برقرار باشند :

الف) تابع f در a تعریف شده باشد.

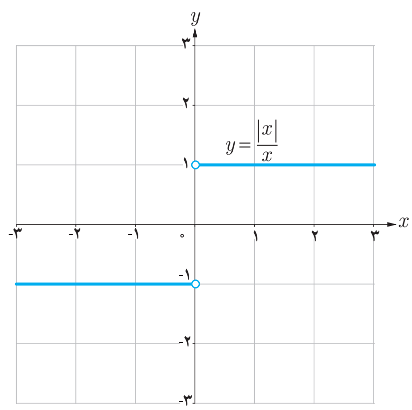
ب) حد تابع f در a موجود باشد.

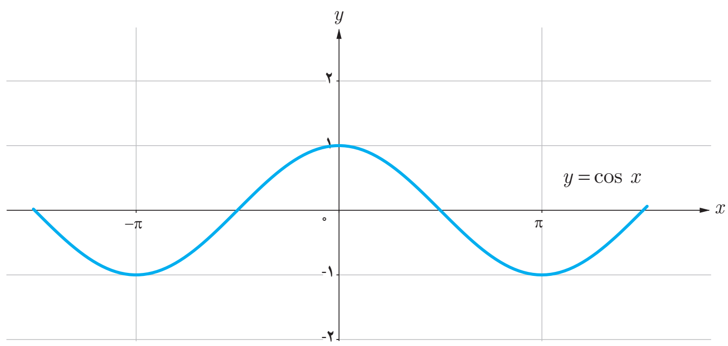
پ) مقدار حد تابع f در a با مقدار $f(a)$ برابر باشد.

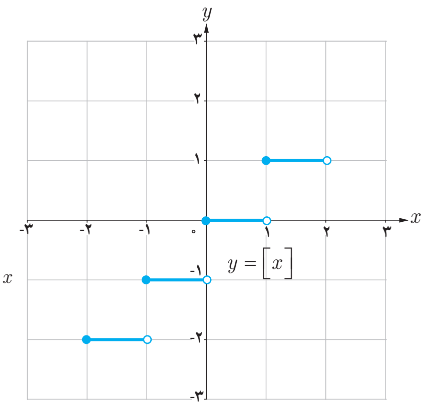
هنگامی که تابع f در نقطه $x=a$ پیوسته نیست، گوییم f در $x=a$ ناپیوسته است.

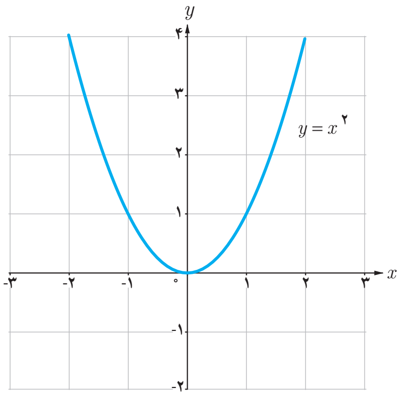
✤ **مثال :** در بخش‌های قبل دیدیم که در هر نقطه a ، $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$ و $\lim\limits_{x\to a}\sqrt[3]{x}=\sqrt[3]{a}$. پس توابع $y=\sin x$ و $y=\sqrt[3]{x}$ در هر عدد a ، پیوسته‌اند.

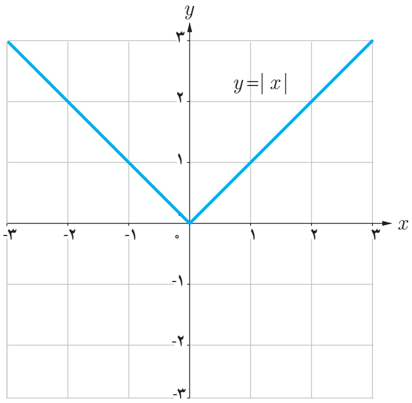
همچنین توابع $y=\cos x$ ، $y=|x|$ و $y=x^2$ و نیز چندجمله‌ای‌ها در هر عدد حقیقی a پیوسته‌اند. اما توابع $y=\frac{|x|}{x}$ و $y=[x]$ این‌چنین نیستند. این مطلب را از روی نمودار این توابع نیز می‌توان تشخیص داد.











مثال : توابع $f(x)=\dfrac{x^{۲}-۹}{x-۳}$ و $g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{۲}-۹}{x-۳} & x\neq ۳\\ ۶ & x=۳\end{cases}$ داده شده‌اند. درباره پیوستگی f و g در نقطه ۳ بحث کنید.

حل : از آنجایی که f در ۳ تعریف نشده است، پس تابع f در ۳ پیوسته نیست.

در مورد تابع g داریم :

$$\lim_{x\to ۳} g(x)=\lim_{x\to ۳}\frac{x^{۲}-۹}{x-۳}=\lim_{x\to ۳}\frac{\cancel{(x-۳)}(x+۳)}{\cancel{(x-۳)}}=۶=g(۳)$$

پس تابع g در ۳ پیوسته است.

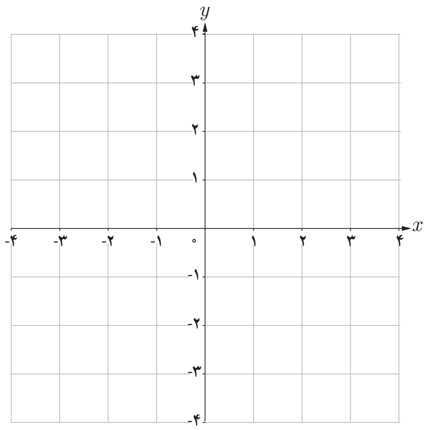
کار در کلاس

۱ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطهٔ ۳ تعریف نشده باشد اما حد تابع در $x=۳$ وجود داشته باشد. (توجه کنید که این تابع در $x=۳$ پیوسته نیست)

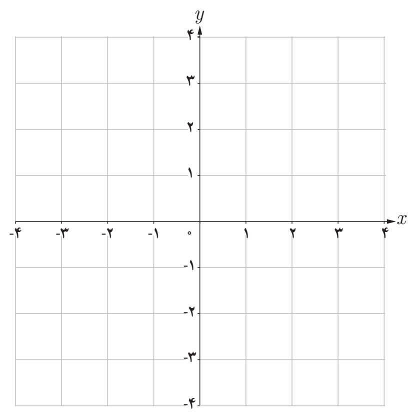
۲ نمودار تابعی را رسم کنید که در نقطه‌ای مانند a تعریف شده باشد و حد تابع هم در نقطه a موجود باشد اما با مقدار تابع در a برابر نباشد. (توجه کنید که این تابع در a پیوسته نیست).

۳ نمودار تابعی را رسم کنید که در هر عدد حقیقی پیوسته باشد.

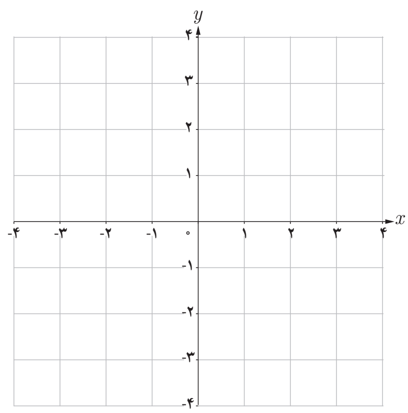
۴ نمودار تابعی را رسم کنید که همه جا پیوسته باشد به‌جز در دو نقطه.



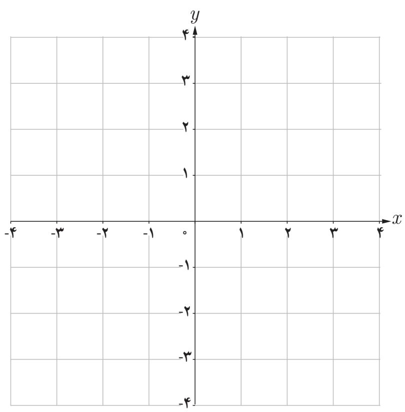
(۱)



(۴)

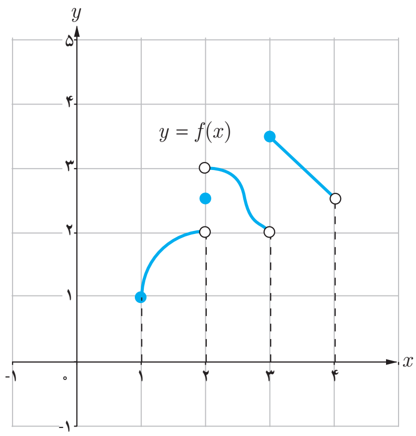


(۳)



(۲)

فعالیت



نمودار تابع f به‌صورت روبه‌رو رسم شده است.

الف) تابع f در کدام‌یک از نقاط مجموعه $\{۱,۲,۲/۵,۳,۴\}$ ناپیوسته است.

ب) آیا تساوی $\lim\limits_{x\to ۳^+} f(x)=f(۳)$ برقرار است؟

پ) آیا تساوی $\lim\limits_{x\to ۳^-} f(x)=f(۳)$ برقرار است؟

ت) در کدام نقطه a از مجموعه $\{۱,۲,۲/۵,۳,۴\}$ تساوی $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$ برقرار است؟

تعریف

گوییم تابع f در a از راست پیوسته است (یا پیوستگی راست دارد) هرگاه : $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

گوییم تابع f در a از چپ پیوسته است (یا پیوستگی چپ دارد) هرگاه : $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)=f(a)$

بنابراین، هرگاه تابع f در یک همسایگی (دوطرفه) a تعریف شده باشد :

f در a پیوسته است اگر و تنها اگر f در a هم از راست و هم از چپ پیوسته باشد.

مثال : تابع
$$f(x)=\begin{cases} ۳x^۲+x & x<۰ \\ ۲ & x=۰ \\ ۲\cos x-\sin x & x>۰ \end{cases}$$
داده شده است. پیوستگی تابع f در صفر را بررسی کنید.

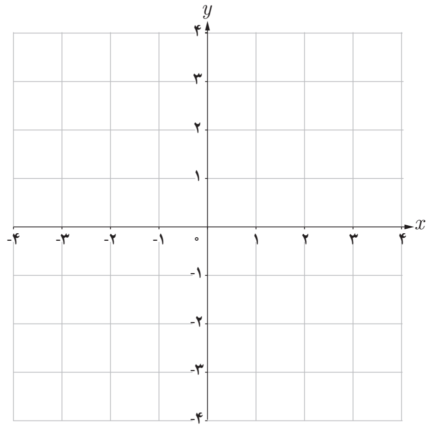
حل : داریم $f(۰)=۲$. همچنین

$$\lim_{x\to ۰^-} f(x)=\lim_{x\to ۰^-}(۳x^۲+x)=۰\neq f(۰)$$

$$\lim_{x\to ۰^+} f(x)=\lim_{x\to ۰^+}(۲\cos x-\sin x)=۲\cos(۰)-\sin(۰)=۲=f(۰)$$

بنابراین f در صفر پیوسته نیست اما در صفر پیوستگی راست دارد.

کار در کلاس



الف) با رسم نمودار تابع $f(x)=[x]$ مشخص کنید که در کدام‌یک از نقاط مجموعه $\{۲, \frac{۱}{۲}, ۰\}$ ،

۱ تابع f پیوسته است.

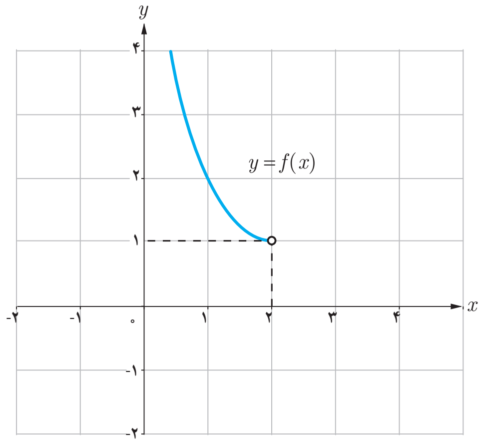
۲ تابع f پیوستگی راست دارد.

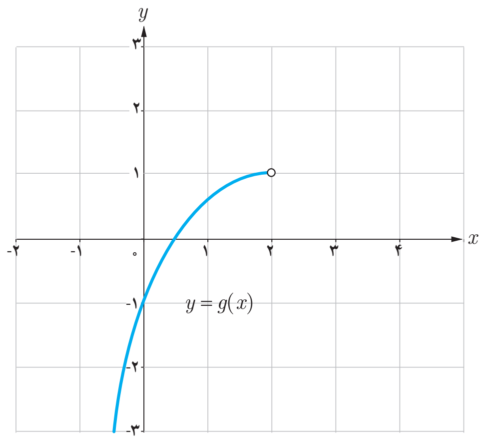
۳ تابع f پیوستگی چپ دارد.

ب) در شکل‌های زیر نمودار دو تابع f و g در طرف چپ نقطه ۲ رسم شده‌اند. در نقطه $x=۲$ و در طرف راست نقطه ۲، نمودارها را طوری تکمیل نمایید که :

۱ تابع f در نقطه ۲ پیوستگی راست داشته باشد، اما در ۲ پیوسته نباشد.

۲ تابع g در نقطه ۲ پیوسته باشد.





تعریف (پیوستگی بر بازه)

تابع f را بر بازهٔ باز (a, b) پیوسته گوییم هرگاه در هر نقطه (a , b) پیوسته باشد.

تابع f را بر بازهٔ بسته $[a , b]$ پیوسته گوییم هرگاه تابع f در هر نقطه (a , b) پیوسته باشد و در a از راست پیوسته و در b از چپ پیوسته باشد.

کار در کلاس

پیوستگی روی بازه‌های $[a , b)$ و $(a , b]$ را به‌طور مشابه تعریف کنید.

مثال :

۱) تابع $f(x)=\sqrt{x}$ بر بازهٔ $[0,2]$ پیوسته است.

۲) تابع $f(x)=[x]$ بر بازهٔ $[0 , 1)$ پیوسته است، اما بر بازهٔ بسته $[0 , 1]$ پیوسته نیست.

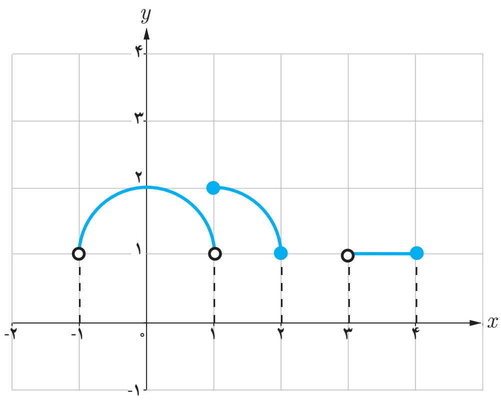
کار در کلاس

در شکل روبه‌رو نمودار تابع f رسم شده است. کدام‌یک از عبارات زیر درست و کدام‌یک نادرست هستند؟

الف) تابع f بر بازه $[1 , 2]$ پیوسته است.

ب) تابع f بر بازه $[3 , 4]$ پیوسته است.

پ) تابع f بر بازه $[0 , 2]$ پیوسته است.



نقش رستم ـ استان فارس

تمرین

۱ با رسم نمودار توابع زیر، نقاط ناپیوستگی هر تابع را (در صورت وجود) تعیین کنید.

الف) $y=|x-1|+2$

ب) $y=x-[x]$

پ) $y=[x]+[-x]$

ت) $y=\begin{cases} x(x-1) & x\le 1 \\ -x+2 & x>1 \end{cases}$

۲ در توابع زیر مقدار a را طوری تعیین کنید که هر تابع در نقطه $x=1$ پیوسته باشد.

الف) $f(x)=\begin{cases} 2x-1 & x<1 \\ a & x=1 \\ -x+2 & x>1 \end{cases}$

ب) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2+x-2}{x-1} & x\ne 1 \\ a & x=1 \end{cases}$

پ) $h(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1} & 0<x<1 \\ [x]+a & x\ge 1 \end{cases}$

ت) $k(x)=([x]-a)[x]$

۳ نشان دهید به ازای هیچ مقداری برای a، توابع زیر در $x=0$ پیوسته نیستند.

الف) $f(x)=\begin{cases} x & x<0 \\ a & x=0 \\ 2x+1 & x>0 \end{cases}$

ب) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{ax}{|x|} & x\ne 0 \\ 1 & x=0 \end{cases}$

۴ الف) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در صفر ناپیوسته باشد ولی در صفر حد داشته باشد.

ب) نمودار یک تابع را رسم کنید طوری که در دو نقطه ۲ و ۳ ناپیوسته باشد و در این نقاط حد نداشته باشد.

پ) ضابطه یک تابع f را بنویسید طوری که فقط در دو نقطه ناپیوسته باشد.

۵ تابع $f(x)=[x]$ در بازه $(2, k)$ پیوسته است. حداکثر مقدار k چقدر است؟

۶ بازهٔ بسته‌ای را ارائه کنید که تابع $f(x)=2-\sqrt{3-x}$ بر آن بازه پیوسته باشد.

۷ مقدار a و b را چنان تعیین کنید که تابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1-\cos x}{x^2} & x>0 \\ b-1 & x=0 \\ x-2a & x<0 \end{cases}$ در $x=0$ پیوسته باشد.

منابع

۱ استوارت، جیمز، (۲۰۰۲)، حسابگان عام، دیفرانسیل و انتگرال، ترجمهٔ محمدحسین علامت‌ساز و علی‌اکبر محمدی حسن‌آبادی، چاپ اول، تهران، انتشارات آبیژ، ۱۳۹۸.

۲ استوارت، جیمز، (۲۰۱۲)، حساب دیفرانسیل و انتگرال، ترجمهٔ ارشک حمیدی، جلد اول، تهران، انتشارات فاطمی، ۱۳۹۵.

۳ اصلاح‌پذیر، بهمن؛ بروجردیان، ناصر؛ ریحانی، ابراهیم؛ طاهری تنجانی، محمدتقی؛ عالمیان، وحید، حسابان (کد کتاب ۲۵۸/۱). تهران : سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، ۱۳۹۵.

۴ ایرانمنش، علی؛ جمالی، محسن؛ ربیعی، حمیدرضا؛ ریحانی، ابراهیم؛ شاهورانی، احمد و عالمیان، وحید، ریاضیات ۲ (کد کتاب ۲۳۴/۲). سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش، ۱۳۹۴.

۵ ایوز، هاوارد و، (۱۹۸۳). آشنایی با تاریخ ریاضیات، ترجمهٔ محمدقاسم وحیدی اصل، تهران : مرکز نشر دانشگاهی، ۱۳۶۸.

۶ تورنس، نلسون. (۲۰۰۳)، ریاضیات در عمل، ترجمهٔ فاطمه معصومه راعی، تهران : کانون فرهنگی آموزش، ۱۳۸۴.

۷ سافیر، فرد، (۲۰۰۲). ریاضیات سری شومز جلد۱. ترجمهٔ محمد مازوچی، تهران : کانون فرهنگی آموزش، ۱۳۸۴.

۸ سیلورمن، ریچارد، (۱۹۶۹)، حساب دیفرانسیل و انتگرال، ترجمهٔ علی‌اکبر عالم‌زاده، جلد اول، تهران انتشارات علمی و فنی، ۱۳۹۰.

۹ Adams, R.A. Essex, C.(2010) Calculus: A Complete Course. Toronto. Onario: Pearson Education, Inc.
۱۰ Barnett, R. Ziegler, M. Byleen, K. and Sobecki, D. (2008). College Algebra with Trigonometry (8^{th} Edition). Mc Graw – Hill Education.
۱۱ Beecher, J.A. Penna, J.A.& Bittinger, M.L. (2012). Precalculus. A Right Triangle Approach (4^{th} Edi-tion). Boston, MA. Pearson Education, Inc.
۱۲ Crauder, B. Evans, B. & Noell, A. (2008). Functions and change, a modeling approach to college algebra and trigonometry. Boston. AM. Houghton Mifflin.
۱۳ Hungerford, T. W. Shaw, D. J. (2008). Contemporary Precalculus: A Graphing approach.(5^{th} Edition). Belmont, CA. Thomson Brooks/Cole.
۱۴ Larson, R. Hostetler, R.P. Edwards, B.H. (2004). College algebra. a graphing approach. New Jersey. Brooks Cole.
۱۵ Rockswold, K. (2011) Essentials of College Algebra with Modeling and Visualization (4th Edition) Bos-ton, MA. Pearson Education, Inc.
۱۶ Sullivan, M. (2008). Algebra and Trigonometry. New Jersey. Pearson Education. Inc.
۱۷ Sullivan, M. (2012). Precalculus (9th Edition). Boston, MA. Pearson Education, Inc.
۱۸ Sullivan, M. Sullivan III, M. (2015). Precalculus Concepts Through Functions, A Unit Circle Approach to Trigonometry (3^{th} Edition). Upper Saddle River, New Jersey. Pearson Education, Inc
۱۹ Swokowski, E.W. Cole, J. A. (2009). Cole-algebra and Trigonometry with Analytic Geometry, Classic 12th Edition. New Jersey. Brooks Cole.
۲۰ Swokowski, E.W.Cole, J.A. (2012).Precalculus, functions and graphs. Belmont, CA.Cengage Learning.

اسامی دبیران و هنرآموزان شرکت‌کننده در اعتبارسنجی کتاب حسابان(۱) ــ کد ۱۱۱۲۱۴

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی جهت ایفای نقش خطیر خود در اجرای سند تحول بنیادین در آموزش و پرورش و برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران، مشارکت معلمان را به‌عنوان یک سیاست اجرایی مهم دنبال می‌کند. برای تحقق این امر در اقدامی نوآورانه سامانه تعاملی بر خط اعتبارسنجی کتاب‌های درسی راه‌اندازی شد تا با دریافت نظرات معلمان دربارهٔ کتاب‌های درسی نونگاشت، کتاب‌های درسی را در اولین سال چاپ، با کمترین اشکال به دانش‌آموزان و معلمان ارجمند تقدیم نماید. در انجام مطلوب این فرایند، همکاران گروه تحلیل محتوای آموزشی و پرورشی استان‌ها، گروه‌های آموزشی و دبیرخانهٔ راهبری دروس و مدیریت محترم پروژه آقای محسن باهو نقش سازنده‌ای را بر عهده داشتند. ضمن ارج نهادن به تلاش تمامی این همکاران، اسامی دبیران و هنرآموزانی که تلاش مضاعفی را در این زمینه داشته و با ارائهٔ نظرات خود سازمان را در بهبود محتوای این کتاب یاری کرده‌اند به شرح زیر اعلام می‌شود.

ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت	ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت
۱	فرزانه نوروزی	شهرتهران	۲۰	رحیمه قربانیان	آذربایجان شرقی
۲	خلیل تیموری	ایلام	۲۱	منصور قاسم زاده باریکی	مازندران
۳	کامران کبیری	چهارمحال وبختیاری	۲۲	مهری میرفخار	قزوین
۴	زهره رشیدیان	مرکزی	۲۳	رامین میرنجمی	آذربایجان غربی
۵	علی همتی دهکردی	چهارمحال وبختیاری	۲۴	فیروزه شاهین شالکوهی	گیلان
۶	فاطمه رحیمی	شهرستانهای تهران	۲۵	محمدعلی تیموری ماسوله	گلستان
۷	سکینه حبیبی	لرستان	۲۶	زهره ایراندوست	کرمان
۸	محسن امیری بیدشکی	کرمان	۲۷	اسدالله لطفی زاده	ایلام
۹	محمود مهاجر وطن	گلستان	۲۸	طیبه دهقانی	هرمزگان
۱۰	عارف درآیش	هرمزگان	۲۹	مجتبی بیات	همدان
۱۱	محمد طالبی	خراسان رضوی	۳۰	محمد نصیری زارع	زنجان
۱۲	جمال نوین	یزد	۳۱	مهدی مفیدی احمدی	زنجان
۱۳	هما ترحمی	سمنان	۳۲	حسن کریمی نژاد	قزوین
۱۴	جواد کاوانلویی	خراسان شمالی	۳۳	رضا علیوند	اردبیل
۱۵	صدیقه باهنر	خراسان جنوبی	۳۴	کاظم صباغی	آذربایجان شرقی
۱۶	سمیه قلی زاده	کرمانشاه	۳۵	محمد حسن محمدی	شهرستانهای تهران
۱۷	جواد باهنر	خراسان جنوبی	۳۶	فرخ حسن زاده	کهگیلویه وبویراحمد
۱۸	مهدی نورانی	فارس	۳۷	لیلا حسین پور	بوشهر
۱۹	لیلا مقصدی	مازندران			