بِسْمِ اللّٰهِ الرَّحْمٰنِ الرَّحِيمِ

اَللّٰهُمَّ صَلِّ عَلىٰ مُحَمَّدٍ وَ آلِ مُحَمَّدٍ وَ عَجِّلْ فَرَجَهُمْ

ریاضی (۲)

رشتهٔ علوم تجربی

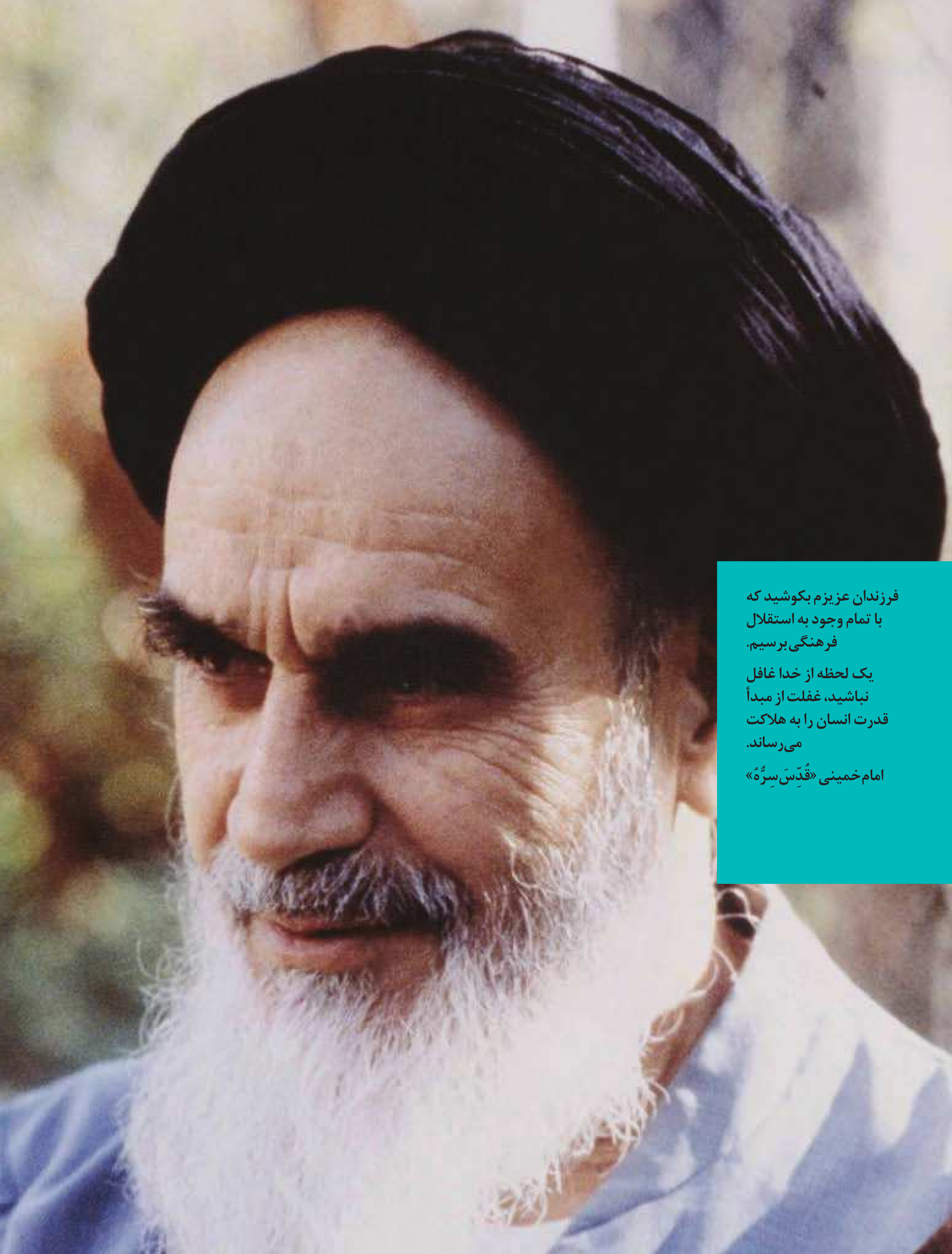
پایهٔ یازدهم

دورهٔ دوم متوسطه

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی

نام کتاب: ریاضی (۲) ـ پایهٔ یازدهم دورهٔ دوم متوسطه ـ ۱۱۱۲۱۱
پدیدآورنده: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
مدیریت برنامه‌ریزی درسی و تألیف: دفتر تألیف کتاب‌های درسی عمومی و متوسطه نظری
شناسهٔ افزوده برنامه‌ریزی و تألیف: حمیدرضا امیری، علی ایرانمنش، مهدی ایزدی، ناصر بروجردیان، محمدحسن بیژن‌زاده، خسرو داودی، زهرا رحیمی، محمدهاشم رستمی، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیّدصالحی، میرشهرام صدر، اکرم قابل‌رحمت، طاهر قاسمی‌هنری و عادل محمدپور (اعضای شورای برنامه‌ریزی)
رضا حیدری‌قزلجه، سهیلا خداکریم، ابراهیم ریحانی، محمدرضا سیّدصالحی، محمدعلی فریبرزی‌عراقی، علی قصاب و آناهیتا کمیجانی (اعضای گروه تألیف) ـ سیّداکبر میرجعفری (ویراستار)
مدیریت آماده‌سازی هنری: ادارهٔ کلّ نظارت بر نشر و توزیع مواد آموزشی
شناسهٔ افزوده آماده‌سازی: احمدرضا امینی (مدیر امور فنی و چاپ) ـ جواد صفری (مدیر هنری) ـ مجتبی زند (طراح گرافیک) ـ مریم نصرتی (صفحه‌آرا)ـ فاطمه رئیسیان‌فیروزآباد (رسام)ـ سوروش سعادتمندی، نوشین معصوم‌دوست، فرشته ارجمند، زینت بهشتی‌شیرازی و ناهید خیام‌باشی (امور آماده‌سازی)
نشانی سازمان: تهران: خیابان ایرانشهر شمالی ـ ساختمان شمارهٔ ۴ آموزش و پرورش (شهید موسوی)
تلفن: ۹ـ۸۸۸۳۱۱۶۱، دورنگار: ۸۸۳۰۹۲۶۶، کد پستی: ۱۵۸۴۷۴۷۳۵۹
وبگاه: www.chap.sch.ir و www.irtextbook.ir
ناشر: شرکت چاپ ونشر کتاب‌های درسی ایران تهران: کیلومتر ۱۷ جادهٔ مخصوص کرج ـ خیابان ۶۱ (داروپخش) تلفن: ۵ـ۴۴۹۸۵۱۶۱، دورنگار: ۴۴۹۸۵۱۶۰، صندوق پستی: ۱۳۹ـ۳۷۵۱۵
چاپخانه: شرکت چاپ و نشر کتاب‌های درسی ایران «سهامی خاص»
سال انتشار و نوبت چاپ: چاپ هشتم ۱۴۰۳

شابک ۱ـ۲۷۸۰ـ۰۵ـ۹۶۴ـ۹۷۸
ISBN: 978-964-05-2780-1



فرزندان عزیزم بکوشید که با تمام وجود به استقلال فرهنگی برسیم.

یک لحظه از خدا غافل نباشید، غفلت از مبدأ قدرت انسان را به هلاکت می‌رساند.

امام خمینی «قُدِّسَ سِرُّهُ»

این کتاب در سال ۱۴۰۲ براساس نظرات ارسالی دبیران سراسر کشور به جشنواره اصلاح ریاضی۲، مورد اصلاح قرار گرفت. همکارانی که نظرات آنها در اصلاح کتاب به‌کار گرفته شد: فرزانه الفتی، مهدی خاوری، رزا زاهدی‌مقدم، زهره شرف‌الدین یزدی، مریم صراطی، فاطمه عاشوری قاضی و فرزانه نوروزی

فهـــرست

سخنی با معلم

کتاب حاضر در راستای برنامهٔ درسی ملی و در ادامهٔ تغییر کتاب‌های ریاضی دورهٔ دوم متوسطه تألیف شده است. همانند پایه های قبلی، ساختار کتاب براساس سه محور اساسی فعالیت، کار در کلاس و تمرین قرار گرفته است. از این میان «فعالیت‌ها» موقعیت‌هایی برای یادگیری و ارائهٔ مفاهیم جدید ریاضی فراهم می‌کنند و این امر مستلزم مشارکت جدی دانش‌آموزان است. البته معلم هم در این میان نقشی مهم برای راهنمایی و هدایت کلی فعالیت‌ها به‌عهده دارد. با توجه به این که کتاب برای دانش‌آموزان سطح متوسط طراحی شده است، با درنظر گرفتن شرایط مختلف، امکان غنی‌سازی فعالیت‌ها و یا ساده‌سازی آنها به‌وسیلهٔ معلم وجود دارد. در هر حال تأکید اساسی مؤلفان، محور قرار دادن کتاب درسی در فرایند آموزش است. در همین راستا توجه به انجام فعالیت‌ها در کلاس درس و ایجاد فضای بحث و گفت‌وگو و دادن مجال به دانش‌آموز برای کشف مفاهیم به‌طور جدی توصیه می‌شود.

زمان کلاس درس نباید به مباحثی خارج از اهداف کتاب درسی اختصاص یابد. همچنین نباید آزمون‌های مختلف خارج از مدرسه مبنای آموزش مفاهیم در کلاس درس واقع شوند، بلکه این کتاب درسی است که سطح و سبک آزمون‌ها را مشخص می‌کند. در بسیاری از موارد دربارهٔ یک مفهوم، حد و مرزهایی در کتاب رعایت شده است که باید به این موضوع در ارزشیابی‌ها و آزمون‌های رسمی توجه شود. رعایت این محدودیت‌ها موجب افزایش تناسب بین زمان اختصاص یافته به کتاب و محتوای آن خواهد شد. روند کتاب نشان می‌دهد که ارزشیابی باید در خدمت آموزش باشد. در واقع ارزشیابی باید براساس اهداف کتاب باشد و نه موضوعاتی که احیاناً پیش از این سال‌ها به‌صورت سنتی ارائه شده‌اند.

ارتباط بین ریاضیات مدرسه‌ای و محیط پیرامون و کاربردهای این دانش در زندگی روزمره، که به وضوح در اسناد بالا دستی مورد تأکید قرار گرفته است، به صورت تدریجی خود را در کتاب‌های درسی نشان می‌دهد. تلاش برای برقراری این ارتباط در تصاویر کتاب نیز قابل مشاهده است که امید است مورد توجه معلمان و دانش‌آموزان عزیز قرار گیرد.

اگر مهم ترین هدف آموزش ریاضی را پرورش تفکر ریاضی بدانیم، دیگر استفادۀ افراطی از فرمول ها، الگوریتم ها، قواعد و دستورها بدون آگاهی از چگونگی و چرایی عملکرد آنها، جایگاهی در آموزش ریاضی مدرسه‌ای نخواهد داشت. فرصت حضور دانش‌آموز در کلاس درس را نباید به سادگی از دست داد. فرایندهایی مانند استدلال، تعمیم، حل مسئله، طرح مسئله و موضوعاتی نظیر مسائل باز پاسخ، بازنمایی‌های چندگانه و گفتمان ریاضی نقش مهمی در پرورش تفکر ریاضی دانش‌آموزان دارد.

مؤلفان از کلیۀ امکانات موجود نظیر سامانۀ اعتبارسنجی، وبگاه گروه ریاضی دفتر تألیف، پیام‌نگار[1](ایمیل)، دعوت از دبیران مجرّب برای حضور در جلسات نقد و بررسی کتاب و دیگر رسانه‌های در دسترس برای دریافت دیدگاه‌ها، نقدها و نظرات دبیران محترم سراسر کشور بهره گرفته‌اند. پاره‌ای از تصاویر و عکس‌های مورد استفاده در کتاب را نیز دبیران ریاضی استان‌های مختلف کشور به گروه ریاضی ارسال کرده‌اند. لازم است از زحمات تمامی عزیزان همراه تشکر و قدردانی شود. اعضای تیم تألیف به حضور و مشارکت جدی همکاران ارجمند در امر نقد و بررسی کتاب افتخار می کنند. امید که همچنان شاهد این تعامل و ارتباط مؤثر باشیم. گروه تألیف آمادگی دریافت نظرات و دیدگاه‌های تمامی همکاران و اساتید را از طریق پیام‌نگار(ایمیل) و وبگاه واحد تحقیق، توسعه و آموزش ریاضی[2] دارد. به علاوه بسیاری از مطالب مربوط به پشتیبانی کتاب از طریق وبگاه واحد ریاضی قابل دریافت است.

مؤلفان

نظرسنجی کتاب درسی

۱ـ mathrde@gmail.com

۲ـ http: //math–dept.talif.sch.ir

فصل

۱ هندسهٔ تحلیلی و جبر

پل میربهاءالدین بر روی رودخانه زنجان رود

مسیر حرکت برخی از پرتابه‌ها را به کمک توابع درجه دوم می‌توان نمایش داد. با دقت در محیط پیرامون خود، پدیده‌هایی را بیابید که با توابع درجه ۲ مرتبط باشند.

درس اوّل

هندسهٔ تحلیلی

یادآوری و تکمیل معادلهٔ خط

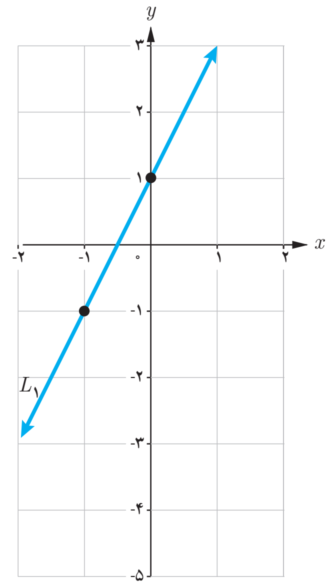
در بسیاری از پدیده‌های جهان، رابطهٔ خطی بین متغیرها به چشم می‌خورد. بنابراین مطالعهٔ تابع‌های خطی اهمیت ویژه‌ای پیدا می‌کند. در سال‌های قبل با مطالبی در این زمینه آشنا شدیم. در این درس نکات دیگری را در این باره، مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

کار در کلاس

۱ به‌طور شهودی می‌توان دید که از هر دو نقطهٔ متمایز، تنها یک خط عبور می‌کند؛ بنابراین :

الف) با داشتن مختصات .... نقطه از یک خط باید بتوان معادلهٔ آن را به دست آورد.

ب) با داشتن معادلهٔ یک خط می‌توان با مشخص کردن .... نقطه از خط، نمودار آن را در دستگاه مختصات رسم کرد.



۲ نمودار خطوط با معادلات زیر را در دستگاه مختصات مشخص شده، رسم کنید :

x	-۱	۰
y	-۱	۱

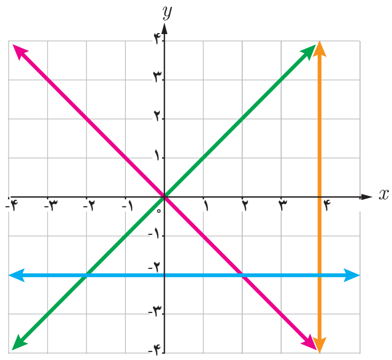
الف) $L_۱: y=۲x+۱$

ب) $L_۲: y=۲x-۳$

پ) $L_۳: y=۱$

ت) $L_۴: x=-۲$

ث) $L_۵: x+۲y=۲$



۳ معادلهٔ هریک از خط‌های نمایش داده شده روی شکل را بنویسید.

۴ الف) می‌دانیم که شیب یک خط برابر است با نسبت جابه‌جایی عمودی به جابه‌جایی .....؛ به عبارت دیگر شیب خط گذرا از دو نقطهٔ غیر هم‌طول A و B برابر است با :

$$m_{AB}=\frac{.......}{x_B-x_A}$$

ب) شرط موازی بودن دو خط آن است که دارای ...... برابر باشند.

۵ الف) از پایهٔ نهم به خاطر داریم که هرگاه خط L محور yها را در نقطه‌ای با عرض h قطع کند، آن‌گاه h، .... خط L نامیده می‌شود.

ب) در سؤال ۲، شیب و عرض از مبدأ هریک از پنج خط ذکر شده را بنویسید. در این سؤال کدام دو خط با هم موازی‌اند؟

۶ الف) خط با شیب m و عرض از مبدأ h معادله‌ای به صورت $y=$....... دارد.

ب) می‌خواهیم معادلهٔ خط L، گذرا از دو نقطهٔ $A(۰,۷)$ و $B(۳,۱)$ را بنویسیم. برای این کار، ابتدا شیب خط را محاسبه می‌کنیم:

شیب خط: $m=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\dfrac{۱-۷}{۳-۰}=-۲$

معادلهٔ خط: $y=-۲x+h$

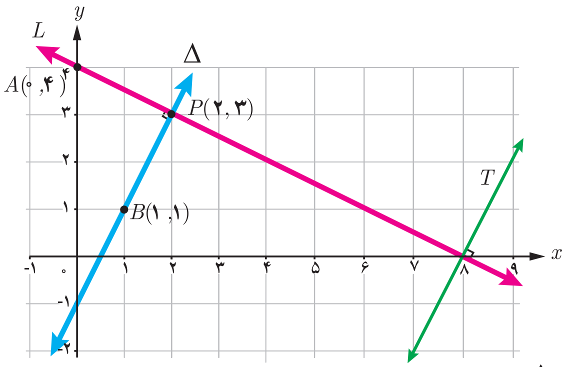
$B\ (۳,۱)$ روی خط L واقع است: $۱=-۲(۳)+h \Rightarrow h=۷$

البته اگر به مختصات نقطهٔ $A(۰,۷)$ از خط L دقت کنیم، بدون محاسبه متوجه می‌شویم که عرض از مبدأ این خط $h=۷$ است. پس:

معادلهٔ خط L: $y=-۲x+۷$

پ) معادلهٔ خط گذرنده از نقطهٔ $P\ (۲,-۱)$ را بنویسید؛ به‌طوری که با خط $y=۳x-۴$ موازی باشد.

فعالیت



۱ دو خط L و Δ را عمود بر هم رسم کرده‌ایم. به شیب‌های این دو خط توجه می‌کنیم:

شیب خط L گذرا از نقاط A و P: $m=\dfrac{y_P-y_A}{x_P-x_A}=\dfrac{۳-۴}{۲-۰}=\dfrac{-۱}{۲}$

شیب خط Δ گذرا از نقاط B و P: $m'=$......

۲ حاصل‌ضرب شیب‌های دو خط را به دست می‌آوریم: $mm'=(\dfrac{-۱}{۲})(.....)=.....$

می‌بینیم که شیب‌ها، قرینهٔ معکوسِ یکدیگرند.

۳ اگر خط دلخواه دیگری مثل T عمود بر L را در نظر بگیریم، این خط حتماً با خط Δ ..... است؛ پس شیب خط T برابر عدد .... خواهد بود. بنابراین می‌توان گفت شیب هر خطِ عمود بر L برابر قرینهٔ ..... شیب خط L خواهد بود. این مطلب در حالت کلی درست است[۱]؛ یعنی

> دو خطِ غیر موازی با محورهای مختصات بر هم عمودند، هرگاه حاصل‌ضرب شیب‌های آنها برابر (۱−) باشد؛ یعنی اگر شیب‌های دو خط m و m' باشد، آنگاه شرط عمود بودن آنها آن است که $mm'=-۱$. به عبارت دیگر شیب هرکدام، قرینهٔ معکوس شیب دیگری باشد.

۱ــ راه‌های اثبات مختلفی برای این مطلب وجود دارد که یکی از آنها به کمک قضیهٔ فیثاغورس است.

بالا دستِ سدّ امام‌زاده اسماعیل (ع) قم

کار در کلاس

۱ در هر قسمت شیب دو خط داده شده را به دست آورید و مشخص کنید که دو خط نسبت به هم چه وضعی دارند. (موازی، عمود یا متقاطعِ غیر عمود؟)

الف) $L: y=5x-2$ $\quad T: y=\frac{-1}{5}x+3$

ب) $L: y=\frac{1}{2}x+7$ $\quad T: x-2y=1$

پ) $L: 2x-3y+3=0$ $\quad T: 3x+2y=0$

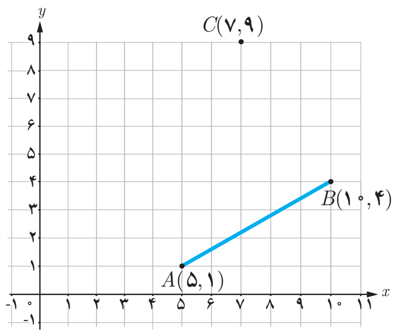
ت) $L: x=1$ $\quad T: y=-3$

ث) $L: y=3x+1$ $\quad T: x=3y-1$

۲ خط L به معادلهٔ $2y-3x=1$ و خط T با عرض از مبدأ ۵ به معادلهٔ $y=mx+5$ را در نظر بگیرید.

الف) m، را طوری بیابید که خط T با خط L موازی باشد.

ب) به ازای چه مقداری از m، دو خط بر یکدیگر عمودند؟



۳ مربع $ABCD$ در ناحیهٔ اول صفحهٔ مختصات واقع است، به طوری که $A(5,1)$ و $B(10,4)$ دو رأس مجاور آن هستند.

الف) شیب ضلع AB را بنویسید.

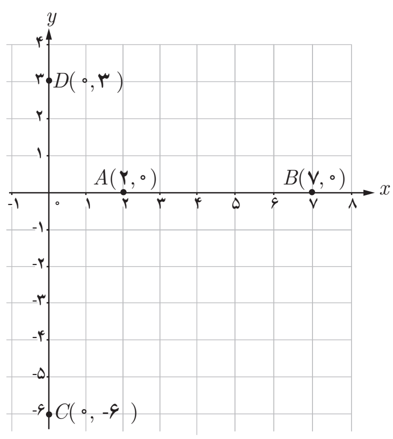
ب) شیب ضلع AD را حساب کنید و معادلهٔ این ضلع را بنویسید.

پ) اگر بدانیم نقطهٔ $C(7,9)$ رأس سوم مربع است، مختصات رأس D را بیابید.

ت) مربع را به‌طور کامل رسم کنید.

فاصلهٔ دو نقطه

فعالیت

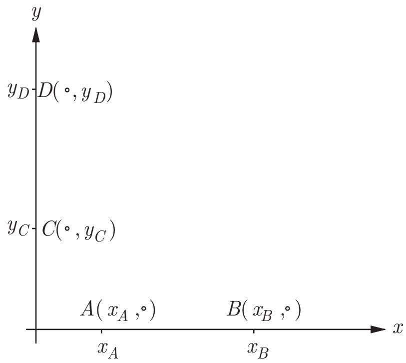


در این دستگاه مختصات:

الف) فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B که برابر طول پاره‌خط AB است، برابر ۵ است. چه رابطه‌ای بین این عدد با x_A و x_B وجود دارد؟

ب) فاصلهٔ دو نقطهٔ C و D را برحسب عرض آنها بیان کنید.

پ) در شکل مقابل، فاصلهٔ نقاط A و B را برحسب طول آنها و فاصلهٔ دو نقطهٔ C و D را برحسب عرض آنها به‌دست آورید.



$AB =$

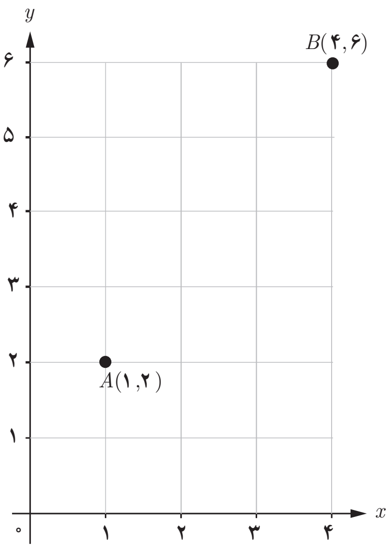
$CD =$

در حالت کلی می‌توان گفت :

۱ــ اگر A و B دو نقطهٔ هم‌عرض در صفحه باشند، آن‌گاه $AB = |x_A - x_B|$

۲ــ اگر C و D دو نقطهٔ هم‌طول در صفحه باشند، آن‌گاه $CD = |y_C - y_D|$

فعالیت



۱ در شکل مقابل فاصلهٔ دو نقطهٔ A و B را با خط‌کش به‌دست آورید.

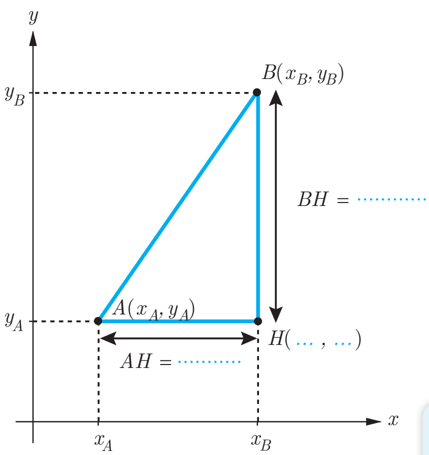
۲ بدون استفاده از خط‌کش، طول پاره‌خط AB را به‌دست آورید. برای این کار از چه رابطه‌ای استفاده می‌کنید؟

۳ در شکل مقابل :

الف) مختصات نقطهٔ H را بنویسید.

ب) طول پاره‌خط‌های AH و BH را مشخص کنید و روی شکل بنویسید.

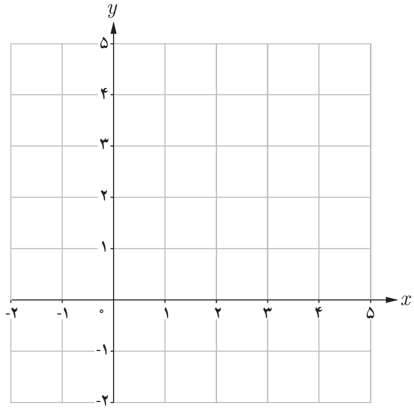
پ) طول AB را به کمک قضیهٔ فیثاغورس به‌دست آورید.



با توجه به فعالیت قبل می‌توان گفت :

فاصلهٔ دو نقطهٔ $A(x_A, y_A)$ و $B(x_B, y_B)$ برابر است با $AB = \sqrt{(x_A - x_B)^۲ + (y_A - y_B)^۲}$.

کار در کلاس



۱ نقاط $A(۲,۰)$، $B(۵,۴)$ و $C(-۲,۳)$ را در نظر بگیرید و آنها را روی دستگاه مختصات مشخص کنید.

الف) محیط مثلث ABC را با محاسبهٔ طول اضلاع آن به دست آورید.

$$AB=\sqrt{(x_A-x_B)^۲+(y_A-y_B)^۲}=\sqrt{(۲-۵)^۲+(۰-۴)^۲}=\sqrt{۹+۱۶}=۵$$

$AC=\cdots$

$BC=\cdots$

محیط: $P=\cdots$

ب) ABC چه نوع مثلثی است؟

پ) به دو روش نشان دهید ABC یک مثلث قائم‌الزاویه است. سپس مساحت آن را حساب کنید.

۲ در یکی از جاده‌های کشور، تصادفی رخ داده است که مختصات نقطهٔ تصادف روی نقشهٔ مرکز امداد به صورت $P(۵۰,۳۰)$ است. پایگاه‌های امداد هوایی که به محل تصادف نزدیک‌اند، در نقاط $A(۱۰,-۲۰)$ و $B(۸۰,۹۰)$ واقع‌اند. شما کدام پایگاه را برای اعزام بالگردِ امداد به محل حادثه پیشنهاد می‌کنید؟ (اعداد برحسب کیلومتر هستند).

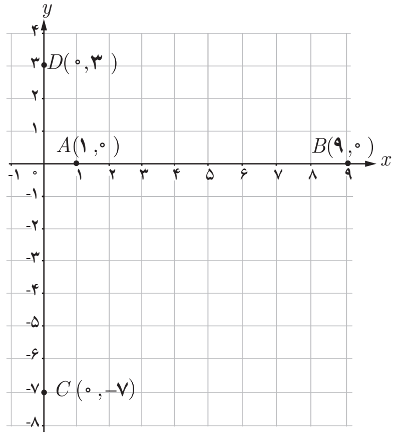
۳ الف) فاصلهٔ نقطهٔ $N(-۶,۸)$ تا مبدأ مختصات را محاسبه کنید.

ب) فاصلهٔ نقطهٔ $E(x_E\,,y_E)$ تا مبدأ مختصات را به دست آورید.

مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط

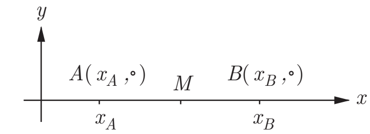
فعالیت

در این دستگاه مختصات :



الف) نقطهٔ وسط پاره‌خط AB را M بنامید و M را به همراه مختصات آن روی شکل مشخص کنید.

ب) نقطهٔ وسط پاره‌خط CD را N بنامید و N را به همراه مختصات آن روی شکل مشخص کنید.

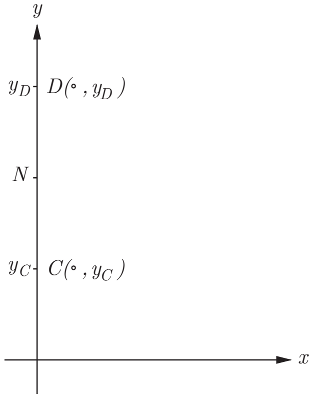


پ) مطابق شکل، A و B دو نقطهٔ دلخواه روی محور xها هستند. اگر M وسط AB باشد، طول نقطهٔ M را به دست آورید.

$$M \text{ وسط } AB \Rightarrow AM = MB$$

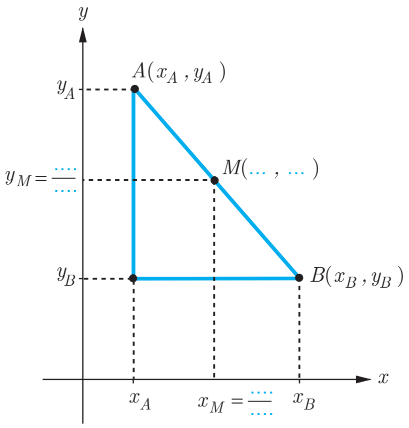
$$\Rightarrow x_M - x_A = \ldots\ldots\ldots$$

$$\Rightarrow \text{۲}x_M = \ldots\ldots\ldots \Rightarrow \boxed{x_M = \frac{x_A + x_B}{\ldots\ldots}}$$



ت) در شکل مقابل، C و D دو نقطهٔ دلخواه روی محور yها هستند. اگر N وسط CD باشد، عرض نقطهٔ N را بیابید.

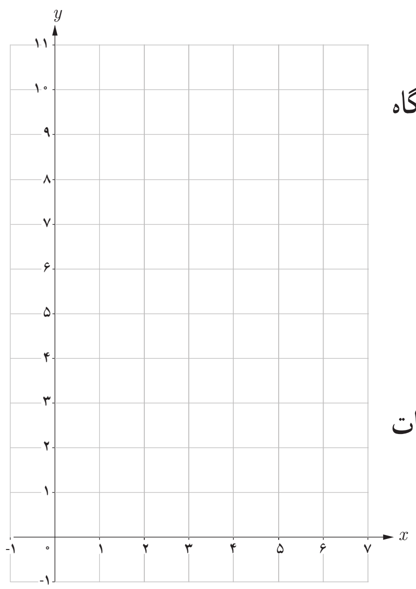
$$N \text{ وسط } CD \Rightarrow \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad \Rightarrow y_N = \frac{\ldots}{\text{۲}}$$



ث) اگر A و B دو نقطهٔ دلخواه در صفحهٔ مختصات باشند و M نقطهٔ وسط AB، آنگاه با توجه به شکل مقابل می‌توان نشان داد:

مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط AB عبارت است از $M\left(\frac{x_A + x_B}{\text{۲}}, \frac{y_A + y_B}{\text{۲}}\right)$.

کار در کلاس



۱ مثلث با رأس‌های $A(۱,۹)$، $B(۳,۱)$ و $C(۷,۱۱)$ را در نظر بگیرید و آن را در دستگاه مختصات مقابل مشخص کنید.

الف) مختصات M، نقطهٔ وسط ضلع BC را مشخص کنید.

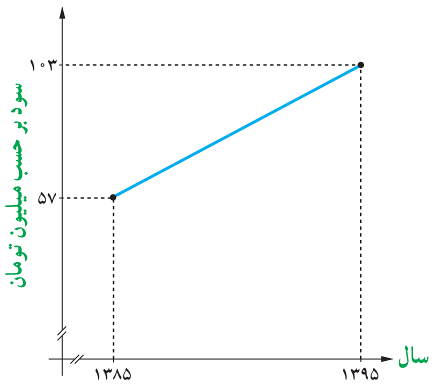
ب) طول میانهٔ AM را محاسبه کنید.

پ) معادلهٔ خطی که میانهٔ AM روی آن قرار دارد را به دست آورید.

۲ الف) نقطهٔ $N(۵,-۴)$ وسط پاره‌خط واصل بین دو نقطهٔ A و $B(۷,-۲)$ است. مختصات نقطهٔ A را بیابید.

ب) قرینهٔ نقطهٔ $C(۱,۲)$ نسبت به نقطهٔ $M(-۱,۴)$ را به دست آورید.

پ) قرینهٔ نقطهٔ $P(\alpha , \beta)$ نسبت به مبدأ مختصات را به‌دست آورید.



۳ سود سالانهٔ یک کارگاه کوچک تولیدی از سال ۱۳۸۵ تا ۱۳۹۵ طبق نمودار مقابل سیر صعودی داشته است. به کمک رابطهٔ نقطهٔ وسط پاره‌خط، به سؤالات زیر پاسخ دهید :

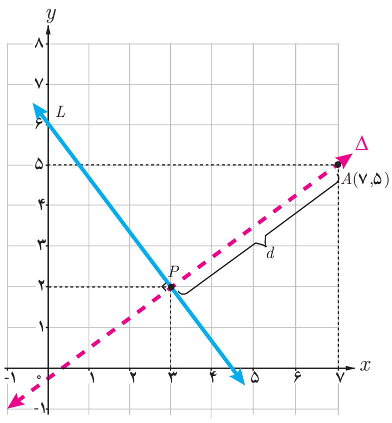
الف) میانگین سود سالانهٔ این شرکت در دههٔ مورد نظر چقدر بوده است؟

ب) در کدام سال، مقدار سود سالانه، با این میانگین سود ده ساله برابر بوده است؟

پ) اگر سود سالانه در طول یک دههٔ آینده با همین روند افزایش یابد، انتظار می‌رود در سال ۱۴۰۵ سود سالانه شرکت چقدر باشد؟

فاصلهٔ نقطه از خط

اگر A نقطه‌ای خارج خط L باشد، فاصلهٔ نقطهٔ A تا خط L برابر است با طول پاره‌خطی که از A عمود بر L رسم می‌شود. در اینجا می‌خواهیم با داشتن مختصات نقطهٔ A و معادلهٔ خط L این فاصله را محاسبه کنیم.



مثال : فاصلهٔ نقطهٔ $A(۷,۵)$ را از خط L به معادلهٔ $۴x+۳y=۱۸$ به دست آورید.

حل : چون شیب خط L برابر $\frac{-۴}{۳}$ است، پس هر خطِ عمود بر آن دارای شیب $\frac{۳}{۴}$ خواهد بود. معادلهٔ خط Δ گذرنده از A و عمود بر L را می‌نویسیم.

$$\Delta: y=\frac{۳}{۴}x+h$$

روی Δ است $A(۷,۵)$: $۵=\frac{۳}{۴}(۷)+h \Rightarrow h=\frac{-۱}{۴}$

معادله Δ: $y=\frac{۳}{۴}x-\frac{۱}{۴} \Rightarrow \Delta: ۳x-۴y=۱$

اگر معادلهٔ دو خط L و Δ را به صورت یک دستگاه معادلات خطی در نظر بگیریم، از حل آن مختصات نقطهٔ P، محل برخورد دو خط به دست می‌آید.

$$\begin{cases} L: ۴x+۳y=۱۸ \\ \Delta: ۳x-۴y=۱ \end{cases} \Rightarrow x=۳ \quad , \quad y=۲ \Rightarrow P(۳,۲)$$

طول پاره‌خط AP جواب مسئله است.

$$AP=\sqrt{(x_A-x_P)^۲+(y_A-y_P)^۲}=\sqrt{(۷-۳)^۲+(۵-۲)^۲}=\sqrt{۱۶+۹}=۵$$

با به کارگیری مراحل حل این مثال در حالت کلی می‌توان ثابت کرد[۱] :

> فاصلهٔ نقطهٔ $A(x_۰,y_۰)$ از خط به معادلهٔ $ax+by+c=۰$ برابر است با :
>
> $$d=\frac{|ax_۰+by_۰+c|}{\sqrt{a^۲+b^۲}}$$

حال مثال قبل را به کمک این رابطه حل می‌کنیم؛ یعنی فاصلهٔ $A(۷,۵)$ را از خط به معادلهٔ $۴x+۳y-۱۸=۰$ به دست می‌آوریم :

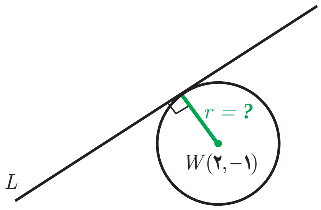
$$d=\frac{|۴(۷)+۳(۵)-۱۸|}{\sqrt{۴^۲+۳^۲}}=\frac{|۲۵|}{۵}=۵$$

۱ــ ارائه اثبات این فرمول در کلاس، مورد نظر نمی‌باشد.

کار در کلاس

۱ فاصلهٔ نقطهٔ $P(۷ , -۴)$ را از هر یک از خطوط با معادله‌های زیر به‌دست آورید :

الف) $L: ۲x + y = ۵$ ب) $T: x = ۵$ پ) $\Delta: y = ۰$



۲ خط $L : ۳x - ۴y = ۰$ بر دایره‌ای به مرکز $W(۲,-۱)$ مماس است. شعاع دایره را بیابید.
(راهنمایی : خط مماس بر دایره بر شعاع گذرنده از نقطهٔ تماس عمود است.)

تمرین

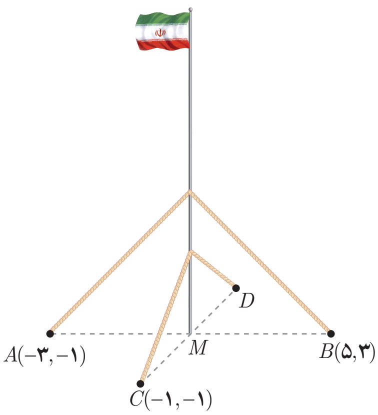
۱ وضعیت هر جفت از خطوط زیر را نسبت به هم مشخص کنید :

$\Delta: x + ۲y = ۰$ $T: y = ۲x - ۳$ $L: ۲x - y = ۱$

۲ دو نقطهٔ $A(۱۴ , ۳)$ و $B(۱۰ , -۱۳)$ را در نظر بگیرید. فاصلهٔ مبدأ مختصات را از وسط پاره خط AB به‌دست آورید.

۳ نشان دهید مثلث با رأس‌های $A(۱ , ۲)$، $B(۲ , ۵)$ و $C(۴ , ۱)$ یک مثلث متساوی‌الساقینِ قائم‌الزاویه است.

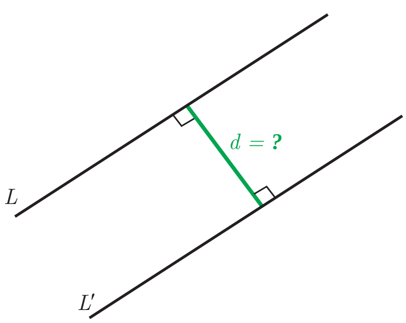
۴ دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط $A(۲ , -۲)$ و $B(۶ , ۴)$ هستند.
الف) اندازهٔ شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.
ب) آیا نقطهٔ $C(۷ , ۳)$ بر روی محیط این دایره قرار دارد؟ چرا؟



۵ نقاط $A(۲ , ۳)$، $B(-۱ , ۰)$ و $C(۱ , -۲)$ سه رأس از مستطیل $ABCD$ هستند. مختصات رأس چهارم آن را بیابید. (با دانستن این مطلب که در هر مستطیل، قطرها منصف یکدیگرند، آیا می‌توانید راه‌حل کوتاه‌تری برای مسئله ارائه کنید؟)

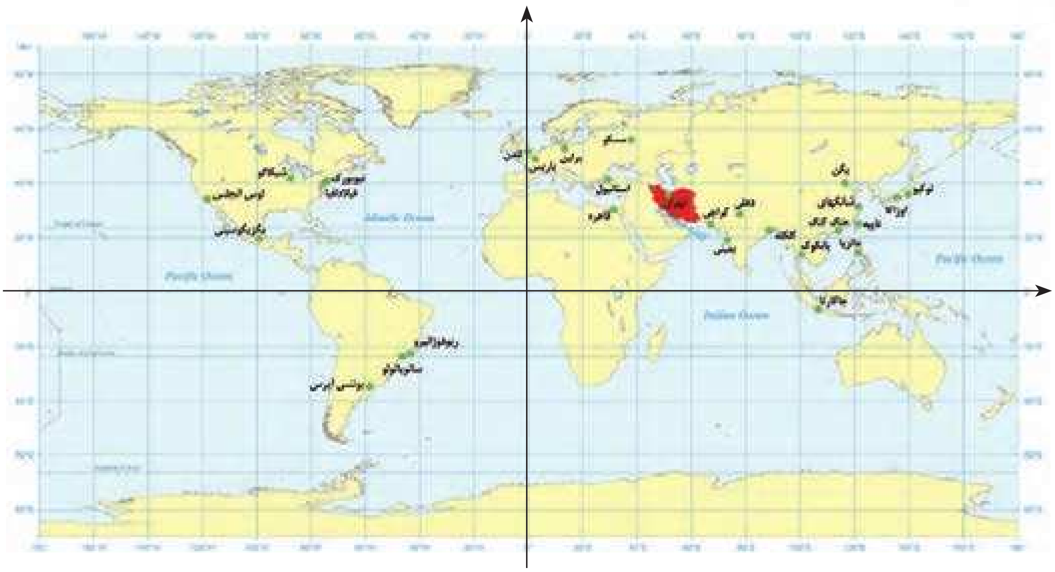
۶ یک میلهٔ پرچم بزرگ، مطابق شکل توسط کابل‌هایی به چهار نقطه در زمین محکم شده‌است؛ به طوری که فاصلهٔ هر یک از چهار نقطه تا پای میله برابر است با فاصلهٔ نقطهٔ مقابل آن تا پای میله. مختصات نقطهٔ D را به‌دست آورید.

۷ یکی از اضلاع مربعی بر خط $L : y = ۲x - ۱$ واقع است. اگر $A(۳ , ۰)$ یکی از رئوس این مربع باشد، مساحت آن را به دست آورید.



۸ الف) نشان دهید دو خط با معادلات $۵x - ۱۲y + ۸ = ۰$ و $-۱۰x + ۲۴y + ۱۰ = ۰$ با یکدیگر موازی‌اند.
ب) فاصلهٔ این دو خط را محاسبه کنید. (راهنمایی : یک نقطهٔ دلخواه روی یکی از خطوط در نظر بگیرید و فاصلهٔ آن را از خط دیگر به دست آورید.)

۹ طول جغرافیایی تبریز تقریباً ۴۶ درجهٔ شرقی و عرض جغرافیایی آن حدود ۳۸ درجهٔ شمالی است. برای راحتی، می‌توانیم موقعیت این شهر را به‌طور خلاصه، به صورت (۳۸ , ۴۶) نشان دهیم. این اطلاعات دربارهٔ چابهار به صورت (۲۵ , ۶۱) است. با فرض اینکه مسافت فیزیکی هر درجه طول جغرافیایی همانند مسافت فیزیکی هر درجه عرض جغرافیایی برابر ۱۱۰ کیلومتر باشد، مطلوب است محاسبهٔ فاصلهٔ تقریبی این دو شهر.



آیا تاکنون به رابطهٔ طول و عرض جغرافیایی با دستگاه مختصات فکر کرده‌اید؟ در دستگاه مختصات مقابل، کدام محور نظیر طول جغرافیایی است؟ با توجه به طول و عرض جغرافیایی چابهار، محل تقریبی این شهر را روی نقشه مشخص کنید.

موزهٔ قاجار تبریز

درس دوم

معادلهٔ درجه دوم و تابع درجه ۲

روش تغییر متغیر برای حل معادله

در پایهٔ دهم، روش‌های مختلفی را برای حل معادلهٔ درجه ۲ آموختیم. یکی از دلایل اهمّیت این معادلات آن است که معادلات دیگری نیز وجود دارند که قابل تبدیل به معادلهٔ درجه دوم اند؛ مانند معادلات گویا و گنگ که درس سوم به آنها اختصاص یافته است. در اینجا با روش تغییر متغیر برای حل دستهٔ خاصّی از معادله‌ها آشنا می‌شویم که یک شیوهٔ کارآمد برای حل انواع معادله است.

مثال : معادلهٔ مقابل را حل کنید. $x^۴-۱۰x^۲+۹=۰$

حل : با وجود آنکه این معادله از نوع درجهٔ ۴ است، می‌توان آن را به روش معادله درجهٔ دوم حل کرد. برای این کار به جای عبارت $x^۲$، متغیر (مجهول) جدیدی مثل u قرار می‌دهیم. به این کار تغییر متغیر می‌گوییم.

$$x^۲=u \Rightarrow u^۲-۱۰u+۹=۰$$

این معادله را به روش کلی و همچنین به روش تجزیه حل می‌کنیم :

(روش کلی)

$$\Delta=b^۲-۴ac$$
$$=(-۱۰)^۲-۴(۱)(۹)=۶۴$$
$$u=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{۲a}=\frac{۱۰\pm\sqrt{۶۴}}{۲(۱)}$$
$$\Rightarrow\begin{cases}u=۱\Rightarrow x^۲=۱\begin{cases}x=۱\\x=-۱\end{cases}\\u=۹\Rightarrow x^۲=۹\begin{cases}x=۳\\x=-۳\end{cases}\end{cases}$$

(روش تجزیه)

$$(u-۱)(u-۹)=۰$$
$$\Rightarrow\begin{cases}u=۱\Rightarrow x^۲=۱\Rightarrow\begin{cases}x=۱\\x=-۱\end{cases}\\u=۹\Rightarrow x^۲=۹\Rightarrow\begin{cases}x=۳\\x=-۳\end{cases}\end{cases}$$

کار در کلاس

معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $۲x^۴-۷x^۲-۴=۰$

ب) $x^۴+۳x^۲+۲=۰$

مجموع و حاصل ضرب ریشه‌های معادلهٔ درجه ۲

گاهی به جای مقدار دقیق ریشه‌های یک معادلهٔ درجهٔ ۲، تنها مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها اهمیت دارد که در این صورت بدون حل

معادله می‌توان این مقادیر را به دست آورد. معمولاً مجموع دو ریشه را با S و حاصل‌ضرب آنها را با P نمایش می‌دهیم[۱]؛ یعنی اگر α و β ریشه‌های معادله باشند : $\alpha+\beta=S$ و $\alpha\beta=P$.

فعالیت

می‌دانیم که معادلهٔ درجهٔ دوم در حالت کلی به صورت مقابل است :

$$(۱)\quad ax^۲+bx+c=۰ \quad (a\neq ۰)$$

۱ می‌خواهیم بررسی کنیم که چگونه می‌توان بدون حل این معادله دربارهٔ وجود و تعداد جواب‌های حقیقی آن اظهار نظر کرد.

الف) در این معادله اگر ضرایب a و c هم‌علامت نباشند، دربارهٔ علامت Δ چه می‌توان گفت؟

ب) اگر a و c هم‌علامت نباشند، آنگاه معادلهٔ (۱) دارای ...... ریشهٔ حقیقی متمایز است.

۲ معادلهٔ مقابل را در نظر می گیریم :

$$۳x^۲+۵x-۱=۰$$

الف) توضیح دهید که چرا این معادله دارای دو ریشهٔ حقیقی متمایز است.

ب) آیا بین ضرایب معادله و مجموع ریشه‌ها (S) رابطه‌ای وجود دارد؟ برای پاسخ به این سؤال، معادله را حل می‌کنیم :

$$\Delta=b^۲-۴ac=\ ......$$

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}=\ ...... \\ \beta=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}=\ ......\end{cases}$$

$$S=\alpha+\beta=\underline{\qquad}+\underline{\qquad}=\ ......$$

ملاحظه می‌شود که : $S=-\dfrac{b}{a}$.

پ) درستی نتیجه فوق را در معادلهٔ زیر هم بررسی می‌کنیم :

$$۳x^۲-۷x=۰\Rightarrow x(۳x-۷)=۰\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\ ...... \\ \beta=\ ......\end{cases}$$

$$S=\alpha+\beta=\ ......\ +\ ......\ =\frac{۷}{۳}=-\frac{b}{a}$$

ت) درستی نتیجهٔ بالا را در حالت کلی ثابت می‌کنیم. فرض کنیم برای معادلهٔ (۱)، مقدار Δ مثبت باشد. پس معادله دو ریشهٔ حقیقی متمایز مثل α و β دارد :

$$\left.\begin{array}{l}\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} \\ \beta=\dfrac{........}{........}\end{array}\right\}\Rightarrow S=\alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}+\frac{......}{......}=\ ......$$

ث) با مفروضات قسمت قبل، ثابت کنید : $P=\alpha.\beta=\dfrac{c}{a}$

$$P=\alpha.\beta=\left(\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a}\right)\left(\frac{......}{......}\right)=\ ......$$

۱ــ S حرف اول Sum به معنای مجموع و P حرف اول Product به معنای حاصل‌ضرب است.

با توجه به این فعالیت می‌توان گفت :

اگر α و β ریشه‌های معادلهٔ $(a\neq ۰)$ $ax^۲+bx+c=۰$ باشند، آنگاه :

$\alpha+\beta=S=-\frac{b}{a}$ و $\alpha.\beta=P=\frac{c}{a}$

کار در کلاس

در معادلهٔ $-۲x^۲+x+۵=۰$ بدون حل معادله، مجموع و حاصل‌ضرب ریشه‌ها را به‌دست آورید.

تشکیل معادله درجه ۲ با استفاده از S و P

گاهی برای حل یک مسئله، لازم است برای آن معادله‌ای بنویسیم و سپس آن معادله را حل کنیم. در برخی موارد، این معادله درجه ۲ خواهد بود. مثلاً می‌خواهیم با مجموع و حاصل‌ضرب دو عدد، معادلهٔ درجه دومی بسازیم که آن دو عدد ریشه‌های معادله باشند. برای این کار فرض می‌کنیم آن دو عدد (ریشه‌های معادله)، α و β باشند. معادلهٔ مورد نظر را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$(x-\alpha)(x-\beta)=۰ \quad\Rightarrow\quad x^۲-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=۰ \quad\Rightarrow\quad x^۲-Sx+P=۰$$

بنابراین نشان دادیم که :

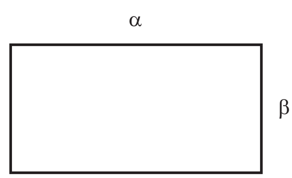
معادلهٔ درجهٔ دومی که مجموع ریشه‌های آن S و حاصل‌ضرب ریشه‌های آن P باشد را می‌توان به صورت $x^۲-Sx+P=۰$ نوشت.

کار در کلاس

۱ دو عدد حقیقی بیابید که مجموع آنها $-۱/۵$ و حاصل ضربشان -۷ باشد.

۲ آیا مستطیلی با محیط $۱۱\,cm$ و مساحت $۶\,cm^۲$ وجود دارد؟ اگر جواب مثبت است،طول و عرض آن را مشخص کنید.

حل : اگر ابعاد مستطیل را α و β بنامیم، داریم :



محیط $=۱۱\Rightarrow ۲(\alpha+\beta)=۱۱\Rightarrow \alpha+\beta=\frac{۱۱}{۲}\Rightarrow \beta=\frac{۱۱}{۲}-\alpha$

مساحت $=۶\Rightarrow \alpha.\beta=۶\Rightarrow \alpha(\frac{۱۱}{۲}-\alpha)=۶$

الف) معادلهٔ بالا را ساده کنید و از حل آن α و β را به دست آورید.

ب) با استفاده از S و P و تشکیل یک معادلهٔ درجه دوم، این مسئله را حل کنید.

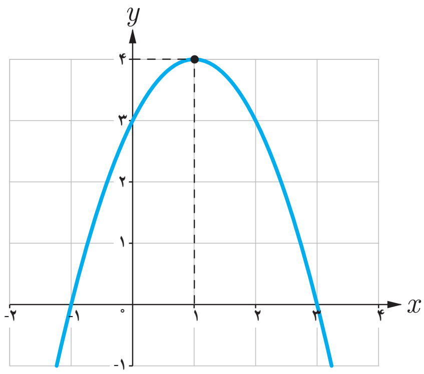
۳ معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{۳-\sqrt{۵}}{۲}$ و $\frac{۳+\sqrt{۵}}{۲}$ باشند.

ماکزیمم و مینیمم تابع درجهٔ دوم

سهمی با ضابطهٔ $y=ax^2+bx+c$ را در نظر می‌گیریم. از سال گذشته می‌دانیم که طول رأس این سهمی $x=-\frac{b}{2a}$ است.

الف) اگر $a>0$، آنگاه دهانهٔ سهمی رو به بالاست و به ازای $x=-\frac{b}{2a}$ کمترین (مینیمم) مقدار تابع درجهٔ دوم موردنظر به‌دست می‌آید.

ب) اگر $a<0$، آنگاه دهانهٔ سهمی رو به پایین است و به ازای $x=-\frac{b}{2a}$ بیشترین (ماکزیمم) مقدار تابع درجهٔ دوم موردنظر حاصل می‌شود.

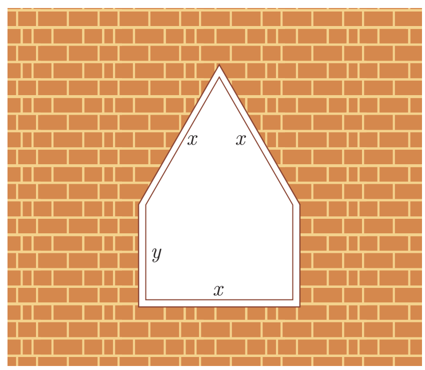


مثال : ماکزیمم یا مینیمم تابع با ضابطهٔ $f(x)=-x^2+2x+3$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

حل : چون $a=-1$ منفی است، پس دهانهٔ سهمی رو به پایین است و این سهمی ماکزیمم دارد. این تابع به ازای $x=-\frac{b}{2a}=1$ بیشترین مقدار خود را خواهد داشت که برابر است با $f(1)=4$.

تذکر : همچنان که در شکل دیده می‌شود، در این مثال نقطهٔ $(1,4)$ رأس سهمی و نقطهٔ ماکزیمم آن است. در این حالت منظور از مقدار ماکزیمم سهمی، عرض این نقطه، یعنی ۴ است.

مثال : یک پنجره به شکل مستطیلی است که در بالای آن یک مثلث متساوی‌الاضلاع قرار گرفته است. اگر محیط پنجره $4m$ باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد.



حل : با توجه به شکل داریم : $\text{محیط پنجره} = 4 \Rightarrow 3x+2y=4 \Rightarrow y=2-\frac{3}{2}x$

در کلاس دهم دیدیم که مساحت مثلث ABC از رابطهٔ $S=\frac{1}{2}\times AB\times BC\times \sin B$ به‌دست می‌آید. بنابراین مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع x برابر $\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$ است. (چرا؟) پس :

$$\text{مساحت پنجره} : \quad S=x.y+\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

به‌جای y معادل آن را برحسب x قرار می‌دهیم.

$$S=x(2-\frac{3}{2}x)+\frac{\sqrt{3}}{4}x^2=2x-\frac{3}{2}x^2+\frac{\sqrt{3}}{4}x^2$$

$$S=\frac{\sqrt{3}-6}{4}x^2+2x$$

این تابع دارای ماکزیمم است (چرا؟) و بیشترین مقدار آن به‌ازای $x=-\frac{b}{2a}$ حاصل می‌شود.

$$x=-\frac{b}{2a}=\frac{2}{\frac{6-\sqrt{3}}{2}}=\frac{4}{6-\sqrt{3}}\simeq 0/94(m)$$

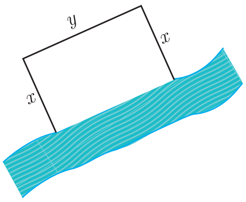
$$y=2-\frac{3}{2}x\simeq 2-\frac{3}{2}(0/94)=0/59(m)$$


رودخانهٔ قزل‌اوزن، شاخهٔ اصلی سفیدرود

کار در کلاس

۱ تعیین کنید کدام یک از سهمی‌های زیر ماکزیمم و کدام یک مینیمم دارند. سپس مقدار ماکزیمم یا مینیمم هر یک را مشخص کنید.

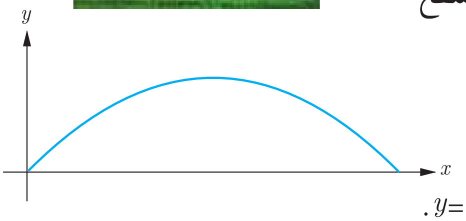
الف) $g(x) = -(x+1)^2+3$ ب) $h(x) = x^2-4x+9$



۲ قرار است در کنار یک رودخانه، محوطه‌ای مستطیل شکل ایجاد کنیم. برای این کار لازم است سه ضلعِ محوطه نرده‌کشی شود. اگر تنها هزینهٔ نصب ۱۰۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدارِ ممکن گردد.

صفرهای تابع درجه ۲

همان‌گونه که می‌دانیم، نمودار هر تابع درجه دوم، یک سهمی است. به عنوان مثال فرض کنیم فوتبالیستی توپی را با زاویهٔ 45° نسبت به سطح زمین و با سرعت اولیهٔ $20\ m/s$ شوت کند. معادلهٔ مسیر حرکت این توپ، یک تابع درجه دو با ضابطهٔ $y=\frac{-1}{40}x^2+x$ است که نمودار آن مانند شکل مقابل است. در این رابطه x مسافت افقی طی شده و y ارتفاع توپ از سطح زمین است.



الف) حداکثر ارتفاع توپ را به‌دست آورید.

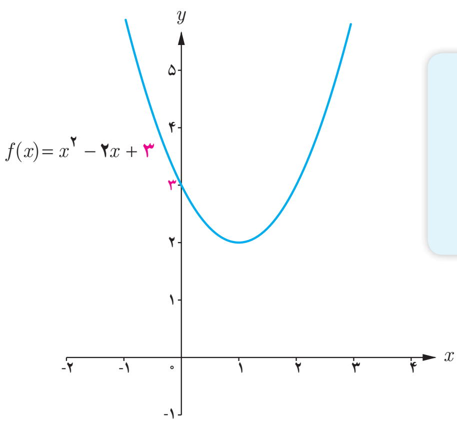
ب) به نظر شما حداکثر مسافت افقی طی شده توسط توپ چقدر است؟

برای آنکه طول نقاط برخورد نمودار این تابع با محور xها را به‌دست آوریم، باید قرار دهیم $y=0$.

$$y=0 \Rightarrow x(\frac{-1}{40}x+1)=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=40 \end{cases}$$

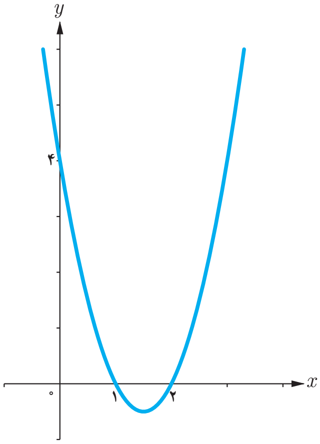
این نقاط را روی نمودار نشان دهید و توضیح دهید که این اعداد از نظر فیزیکی چه معنایی می‌دهند.

> نقاط برخورد نمودار یک تابع مانند f با محور xها را صفرهای تابع می‌نامیم که در واقع ریشه‌های معادلهٔ $f(x)=0$ هستند. به عبارت دیگر، در این نقاط، مقدار تابع برابر صفر است.



همچنین عرض نقطهٔ برخورد نمودار هر تابع مثل f با محور yها، همان $f(0)$ است. به‌عبارت دیگر در تابع درجه ۲ با ضابطهٔ $f(x)=ax^2+bx+c$ ، عدد ثابت c نشان‌دهندهٔ محل برخورد نمودار آن با محور yهاست. به عنوان مثال، به شکل مقابل توجه کنید.

مثال : معادلهٔ سهمی مقابل را بنویسید.



حل : با توجه به شکل دیده می‌شود که نمودار تابع، محور افقی را در نقاطی با طول‌های ۱ و ۲ قطع کرده است. پس ضابطهٔ آن به‌صورت زیر است :

$$y = a\,(x-۱)(x-۲)$$

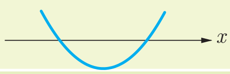
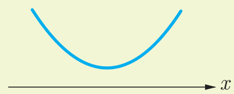
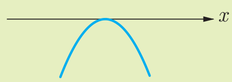
با توجه به نمودار، مقدار a را به‌دست می‌آوریم.

نقطهٔ $(۰,۴)$ روی سهمی است $\Rightarrow ۴ = a(۰-۱)(۰-۲) \Rightarrow a = ۲$

$$\Rightarrow y = ۲(x-۱)(x-۲) \Rightarrow y = ۲x^۲ - ۶x + ۴$$

کار در کلاس

۱ همچنان که از سال قبل می‌دانیم، تعداد صفرهای تابع درجه دوم $y=ax^۲+bx+c$ را به کمک علامت Δ می‌توان تشخیص داد. همچنین رو به بالا بودن یا رو به پائین بودن دهانهٔ سهمی از روی علامت a مشخص می‌شود. جدول زیر را کامل کنید[1].

Δ / a	$\Delta > ۰$	$\Delta = ۰$	$\Delta < ۰$
$a > ۰$			
$a < ۰$			

۲ دربارهٔ تابع درجه دوم f، برای تشخیص علامت ریشه‌های احتمالی معادله $f(x) = ۰$ می‌توانیم از علامت S و P کمک بگیریم. در هریک از موارد زیر، مانند قسمت الف عمل کنید.

الف) $y = x^۲+۶x+۵$

معادلهٔ $y=۰$ دو ریشهٔ حقیقی متمایز دارد $\Leftarrow \Delta=۱۶>۰$

ریشه‌ها هم‌علامت‌اند $\Leftarrow P=\frac{c}{a}=۵>۰$

هر دو ریشه منفی‌اند $\Leftarrow S=-\frac{b}{a}=-۶<۰$

ب) $y = x^۲+۴x-۵$

پ) $y = ۳x^۲-۷x+۱$

ت) $y = -x^۲+۲x-۱$

۱ــ در این جدول محور yها رسم نشده است.

۳ هرگاه نمودار تابع $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ را داشته باشیم، می‌توانیم به کمک آن، علامت ضرایب a، b و c را مشخص کنیم.
به عنوان مثال نمودار تابع f از مجموعه توابع داده شدهٔ زیر را در نظر می‌گیریم :

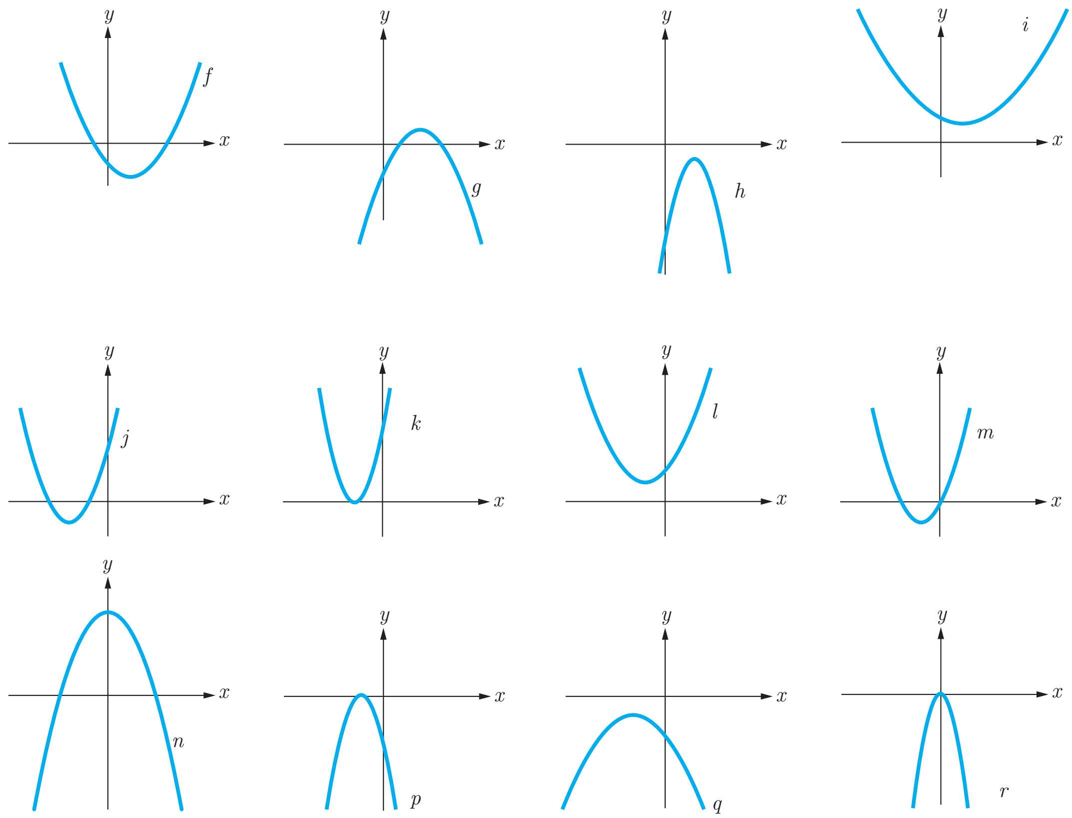
ـ دهانهٔ سهمی رو به بالاست؛ پس a مثبت است.

ـ نمودار تابع f محور yها را در قسمت منفی‌ها قطع کرده است؛ پس c منفی است.

ـ رأس سهمی در ربع چهارم قرار گرفته که در آن مقادیر x مثبت‌اند؛ پس : $\frac{-b}{2a}>0 \Rightarrow b<0$

توجه داریم که باتوجه به نمودار، مجموع دو ریشه، عددی مثبت است (چرا؟) و از این مطلب هم می‌توان منفی بودن علامت b را نتیجه گرفت.

خلاصهٔ این اطلاعات در جدول بعد آمده است. جدول را کامل کنید.



تابع / ویژگی	f	g	h	i	j	k	l	m	n	p	q	r
علامت a	+							+			−	
علامت b	−							+			−	
علامت c	−							۰			−	
تعداد ریشه‌های متمایز	دو							دو			صفر	
علامت ریشه یا ریشه‌ها (در صورت وجود)	یکی منفی یکی مثبت							یکی منفی یکی صفر			ریشه ندارد	

تمرین

۱) معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $x^4 - 8x^2 + 8 = 0$ ب) $4x^6 + 1 = 5x^3$

۲) معادلهٔ درجهٔ دومی بنویسید که ریشه‌های آن $1-\sqrt{2}$ و $1+\sqrt{2}$ باشد.

۳) مقدار ماکزیمم یا مینیمم توابع با ضابطه های زیر را به دست آورید.

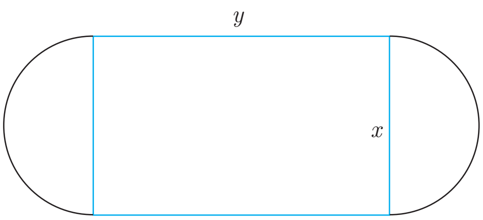
الف) $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$ ب) $g(x) = 3x^2 + 6x + 5$

۴) موشکی که به‌طور عمودی رو به بالا شلیک شده، t ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار می گیرد که معادلهٔ آن به صورت مقابل است. $h(t) = 100t - 5t^2 \quad (t \geq 0)$

الف) چقدر طول می کشد تا موشک به بالاترین ارتفاع ممکن خود برسد؟

ب) ارتفاع نقطهٔ اوج را بیابید.

پ) چند ثانیه پس از پرتاب، موشک به زمین بازمی گردد؟

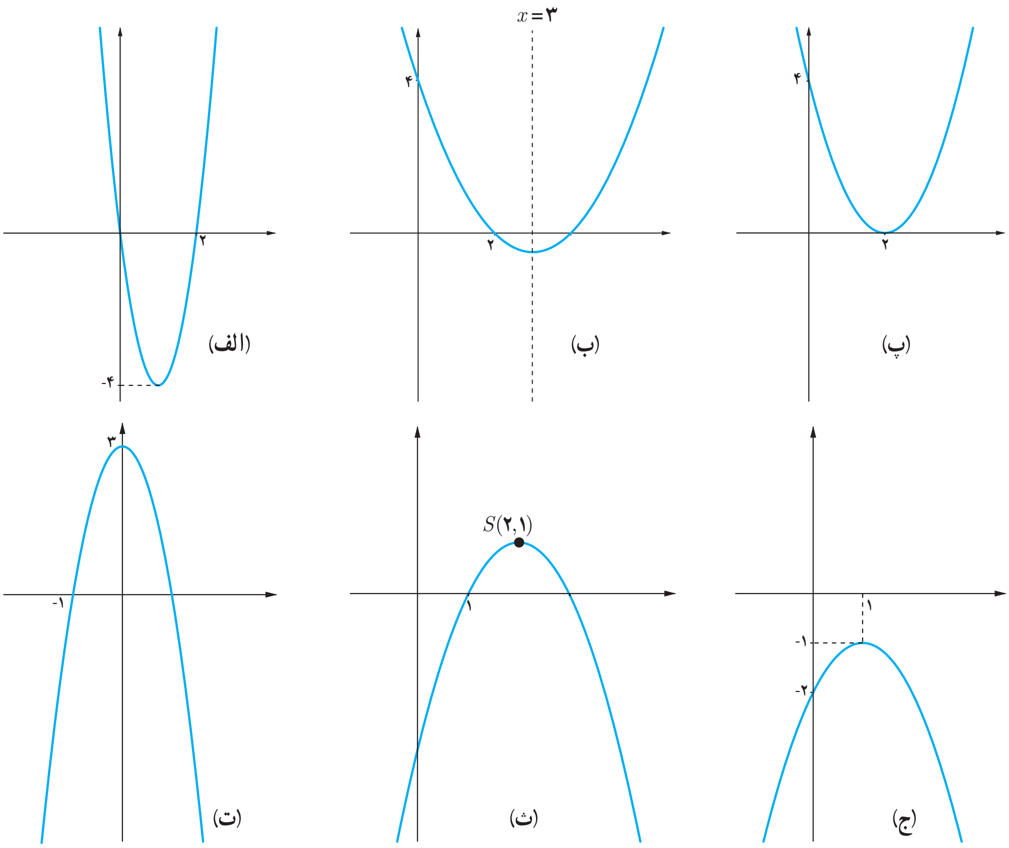


۵) استادیومی به شکل مقابل درحال ساخت است که در آن $x \geq 0$ و $y \geq 0$ و نیم‌دایره‌ها به شعاع $\frac{x}{2}$ هستند. اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، x و y را طوری بیابید که :

الف) مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد.

ب) مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.

۶) ضابطهٔ جبری سهمی های زیر را بنویسید.

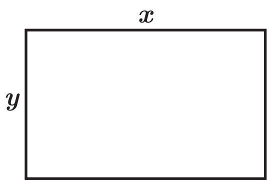


درس سوم

معادلات گویا و معادلات رادیکالی

معادلات گویا

مستطیل طلایی، مستطیلی است که نسبتِ مجموع طول و عرض آن به طول مستطیل برابر با نسبت طول به عرض آن باشد. به عبارت دیگر اگر طول و عرض مستطیل به ترتیب x و y باشند داشته باشیم : $\frac{x+y}{x}=\frac{x}{y}$. نسبت طول به عرض این مستطیل را **نسبت طلایی** می گویند.



مثال : عرض مستطیل را $y=1$ در نظر می گیریم تا مقدار نسبت طلایی را محاسبه کنیم :

$$\frac{x+1}{x}=\frac{x}{1}$$

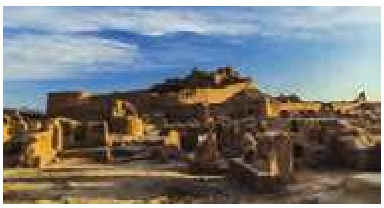
با ضرب دو طرف این معادله در x می توان آن را از حالت کسری خارج کرد (یا به‌طور معادل در اینجا حاصل‌ضرب طرفین را مساوی حاصل‌ضرب وسطین قرار می‌دهیم) :

$$x^2=x+1 \Longrightarrow x^2-x-1=0$$

$$\Delta=b^2-4ac=5 \quad , \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a} \Longrightarrow \begin{cases} \boxed{x_1=\frac{1+\sqrt{5}}{2}} \\ x_2=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \quad \text{غیر قابل قبول} \end{cases}$$

عدد $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ به **عدد طلایی** معروف است که مقدار تقریبی آن ۱/۶۱۸ می‌باشد؛ این عدد از دوران باستان مورد توجه بوده‌است.

در برخی از اجزای بدن انسان، در بعضی گیاهان و همچنین در پاره‌ای از بناها و آثار هنری رد پای عدد طلایی مشاهده می‌شود. تحقیقی در این زمینه انجام دهید و گزارش آن را در کلاس ارائه کنید.



ارگ تاریخی بم

از کلاس اول ابتدایی که با معادلاتی به شکل $\square+2=5$ مواجه شدیم، تقریباً همیشه درگیر حل معادله بوده‌ایم! گاهی به معادلاتی مانند $\frac{x+1}{x}=\frac{x}{1}$ برمی‌خوریم که در آنها مجهول در مخرج یک عبارت گویا (کسری با صورت و مخرج چند جمله‌ای) قرار دارد. چنین معادلاتی را معادلات گویا می‌نامیم. همان‌طور که دیدیم :

صفحه‌ای از کتاب ریاضی دوم دبستان

> برای حل یک معادلهٔ گویا می‌توان دو طرف تساوی را پس از تجزیه کردن مخرج‌ها، در کوچک‌ترین مضرب مشترک (ک م م) مخرج‌ها ضرب کرد تا معادله از شکل کسری خارج شود. جواب‌های به‌دست آمده نباید مخرج کسرها را صفر کنند و این جواب‌ها باید در معادلهٔ اولیه صدق کنند.

فعالیت

۱ معادلهٔ مقابل را حل کنید.
$$\frac{2x}{x^2-1}+\frac{2}{x+1}=\frac{2-x}{x^2-x} \qquad (1)$$

الف) ابتدا در صورتِ امکان مخرج کسرها را به حاصل‌ضرب عامل‌های اول تجزیه می کنیم :

$$\frac{2x}{(x-1)(x+1)}+\frac{2}{(x+1)}=\frac{2-x}{\cdots\cdots} \qquad (2)$$

ب) در مخرج‌ها سه نوع عامل اولِ متمایز وجود دارد x، $(x+1)$ و $(\cdots\cdots)$ که بزرگ‌ترین توان هر کدام از آنها برابر ...... است؛ پس
ک‌م‌م مخرج‌ها عبارت است از ....

پ) طرفین معادلهٔ (۲) را در $x(x-1)(x+1)$ ضرب می کنیم تا معادله از شکل کسری خارج شود.

$$x(x-1)(x+1)\left[\frac{2x}{(x-1)(x+1)}+\frac{2}{(x+1)}\right]=x(x-1)(x+1)\left[\frac{2-x}{x(x-1)}\right] \Rightarrow 2x^2+2x(x-1)=(x+1)(2-x)$$

ت) پس از ساده کردن، معادلهٔ $5x^2-3x-2=0$ حاصل می‌شود.

ث) برای معادلهٔ درجه دوم اخیر، مقدار Δ را به‌دست آورید و معادله را حل کنید. آیا هر دو جواب به‌دست آمده مورد قبول‌اند؟ چرا؟

۲ خط یک متروی تهران به طول ۶۰ کیلومتر، میدان تجریش را به فرودگاه بین‌المللی امام‌خمینی(قُدِّسَ سِرُّهٗ) متصل می‌کند. برای انجام یک آزمایش، قطاری مسیر شمال به جنوب این خط را با سرعت ثابت v کیلومتر بر ساعت و بدون توقف در ایستگاه‌ها طی می‌کند. اگر در مسیر جنوب به شمال، از سرعت قطار $10\ km/h$ کاسته شود، زمان بازگشت نیم ساعت طولانی‌تر از زمان رفت خواهد شد. مطلوب‌است محاسبهٔ طول زمان رفت و زمان برگشت این قطار.

الف) توضیح دهید، چرا زمان رفت از رابطهٔ $\frac{60}{v}$ به‌دست می‌آید؟

ب) عبارتی بر حسب v بنویسید که زمان برگشت را نشان دهد.

پ) توضیح دهید که چرا معادلهٔ $\frac{60}{v-10}=\frac{60}{v}+\frac{1}{2}$ برقرار است.

ت) طرفین این معادله را در ک‌م‌م مخرج‌ها ضرب کنید تا به یک معادلهٔ درجه دوم تبدیل شود.

ث) از حل معادلهٔ حاصل، سرعت قطار در مسیر رفت را بیابید و به کمک آن، زمان رفت و زمان برگشت قطار را به دست آورید.

کار در کلاس

۱ معادلات زیر را حل کنید. آیا تمام جواب‌های به‌دست آمده مورد قبول هستند؟

الف) $\frac{۳}{x^۲}-۱۲=۰$

ب) $\frac{۲}{k}-\frac{۳k}{k+۲}=\frac{k}{k^۲+۲k}$

پ) $\frac{۳}{x}-\frac{۲}{x-۳}=\frac{۱۲}{۹-x^۲}$

۲ دبیر ریاضی آرمان هر هفته یک آزمون ۱۰ امتیازی برگزار می‌کند. پس از ۵ هفته، آرمان جمعاً ۳۶ امتیاز کسب کرده بود؛ یعنی میانگین امتیاز هر آزمون او در پنج هفتهٔ اول به‌صورت زیر بود :

$$\frac{۳۶}{۵}=۷/۲$$

او از هفتهٔ ششم به بعد در تمام آزمون‌ها امتیاز ۹ را کسب کرد؛ به‌طوری که میانگین امتیاز کل آزمون‌هایش برابر ۸ شد. می‌خواهیم بدانیم از هفتهٔ ششم به بعد، آرمان در چند آزمون متوالی نمرهٔ ۹ گرفته است. برای حل مسئله می‌توان به روش زیر عمل کرد :

الف) اگر تعداد آزمون‌ها از هفتهٔ ششم به بعد برابر n باشد، مجموع امتیازات او در این مدت $۹n$ خواهد شد. عبارتی کسری بر حسب n بنویسید که نشان‌دهندهٔ میانگین امتیاز تمام آزمون‌های ریاضی هفتگی آرمان باشد.

$$\frac{۹n+\cdots\cdots}{۵+\cdots\cdots}$$

ب) کسر مربوط به قسمت الف را برابر ۸ قرار دهید و n را بیابید. سپس جواب به‌دست آمده را امتحان کنید.

مثال : اگر دو ماشین چمن‌زنی با هم کار کنند، می‌توانند در ۴ ساعت چمن یک زمین فوتبال را کوتاه کنند. با فرض اینکه سرعت کار یکی از آنها دو برابر دیگری باشد، هر یک از آنها به تنهایی در چند ساعت می‌توانند این کار را انجام دهند؟

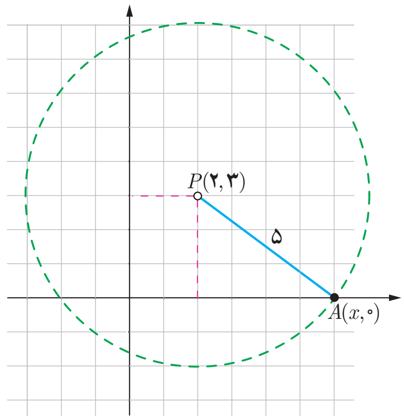
حل : ماشین سریع‌تر را A و دیگری را B می‌نامیم. فرض کنیم t مدت زمانی باشد که ماشین A به تنهایی قادر است کل کار را انجام دهد. جدول زیر را کامل کنید.

مقداری از کار که در ۱ ساعت قابل انجام است.	زمان انجام کل کار	ماشین
$\frac{۱}{t}$	t	A
....	$۲t$	B
$\frac{۱}{۴}$	....	A و B با هم

با توجه به جدول، معادله زیر را می‌توان نوشت :

$$\frac{۱}{t}+\frac{۱}{۲t}=\frac{۱}{۴}\overset{\times ۲}{\Rightarrow}\frac{۲}{t}+\frac{۱}{t}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow\frac{۳}{t}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow t=۶$$ زمان ماشین A

$$\Rightarrow ۲t=۱۲$$ زمان ماشین B



معادلات رادیکالی

فرض کنید بخواهیم نقطه‌ای را روی محور xها بیابیم که فاصلهٔ آن از نقطهٔ $P(۲,۳)$ برابر ۵ باشد. مسئله چند جواب دارد؟

برای این کار فرض می‌کنیم مختصاتِ نقطهٔ مورد نظر به‌صورت $A(x,۰)$ باشد. مقدار x را به‌دست می‌آوریم.

$$AP=\sqrt{(x_A-x_P)^۲+(y_A-y_P)^۲}=\sqrt{(x-۲)^۲+(۰-۳)^۲}$$

$$AP=۵ \quad\Rightarrow\quad \sqrt{(x-۲)^۲+۹}=۵ \qquad (۳)$$

معادلاتی مانند (۳) که در آن عبارتِ رادیکالیِ شامل مجهول وجود دارد، یک معادلهٔ رادیکالی نامیده می‌شود[۱].

> برای حل یک معادلهٔ رادیکالی می‌توان جملات را طوری در طرفین تساوی جابه‌جا کرد که یک عبارت رادیکالی به تنهایی در یک طرف تساوی قرار گیرد. سپس با به توان رساندن طرفین معادله و در صورت لزوم با تکرار این عمل، معادله را از شکل رادیکالی خارج کرد. پس از حل معادله باید مطمئن شویم که جواب‌های حاصل در معادلهٔ اولیه صدق می‌کنند.

برای حل معادلهٔ (۳) در بالا، اگر طرفین تساوی را به توان دو برسانیم، خواهیم داشت:

$$(x-۲)^۲+۹=۲۵$$

$$(x-۲)^۲=۱۶ \quad\Rightarrow\begin{cases}(x-۲)=۴ \;\Rightarrow x=۶ \quad\Rightarrow A(۶,۰)\\(x-۲)=-۴ \Rightarrow x=-۲ \;\Rightarrow B(-۲,۰)\end{cases}$$

تذکر: عبارت رادیکالیِ معادلهٔ (۳) همواره با معناست؛ چون در آن، حاصلِ زیر رادیکال همواره مثبت است. در این حالت می‌گوییم دامنهٔ متغیر برابر $\mathbb{R}$ است و می‌توانیم بنویسیم $D=(-\infty,+\infty)$

مثال: در معادلهٔ $۲\sqrt{x}=\sqrt{۳x-۳}$ ، دامنهٔ متغیر به‌صورت $D=[۱,+\infty)$ است (چرا؟).

با به توان رساندن دو طرف معادله داریم:

$۴x=۳x-۳\Rightarrow x=-۳$ (غیر قابل قبول)

چون جواب به دست آمده خارج از دامنهٔ متغیر است، قابل قبول نیست. شایان ذکر است که جواب‌های درون دامنه نیز به شرطی مورد قبول‌اند که در معادلهٔ اصلی صدق کنند.

۱ــ در این کتاب، تنها معادلات رادیکالی با فرجهٔ ۲ مورد بحث قرار می‌گیرند.

کار در کلاس

۱ معادلات زیر را مانند نمونه حل کنید. آیا تمام جواب‌های حاصل، قابل قبول‌اند؟

الف) $۲\sqrt{۲t-۱}-t=۱$

$$۲\sqrt{۲t-۱}=t+۱$$
$$\Rightarrow ۴(۲t-۱)=(t+۱)^۲$$
$$\Rightarrow t^۲-۶t+۵=۰$$
$$\Rightarrow (t-۱)(t-۵)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۱ \\ t=۵ \end{cases}$$

ب) $۲x=۱-\sqrt{۲-x}$

$$\sqrt{۲-x}=۱-۲x$$
$$\Rightarrow ۲-x=۱+۴x^۲-۴x$$
$$\Rightarrow ۴x^۲-۳x-۱=۰$$
$$\Delta=۲۵\,,\ x=\frac{۳\pm\sqrt{۲۵}}{۲(۴)} \Rightarrow \begin{cases} x=۱ & \text{غیر قابل قبول} \\ x=\frac{-۱}{۴} \end{cases}$$

پ) $\sqrt{x+۷}=\sqrt{x}+۱$

ت) $\frac{۱}{\sqrt{u-۳}}-\frac{۲}{\sqrt{u}}=۰$

ث) $۲+\sqrt{۲x^۲-۵x+۲}=x$

۲ توضیح دهید که چرا معادلات زیر فاقد ریشهٔ حقیقی‌اند.

الف) $\sqrt{t}+۲=۰$

ب) $\sqrt{x-۲}+\sqrt{۲x+۳}+۱=۰$

پ) $\sqrt{۱-x}+\sqrt{x-۲}=۰$

تمرین

۱ هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

الف) $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x-۲}=۵$

ب) $\frac{۱۰}{r}-\frac{۱۵}{۲}=\frac{۲۰}{۳r}-۵$

پ) $\frac{۲x}{x-۳}+\frac{x+۱}{x+۴}=\frac{x-۱}{x-۳}$

ت) $\sqrt{t+۴}=۳$

ث) $k=\sqrt{۶k-۸}$

ج) $x+\sqrt{x}=۶$

چ) $\sqrt{x+۱}-\sqrt{۲x-۵}=۱$

ح) $\sqrt{m}+\frac{۱}{\sqrt{m}}=۲$

۲ علی به همراه چند نفر از دوستان خود، ماهانه یک مجلهٔ ادبی ۱۶ صفحه‌ای منتشر می‌کنند. پس از حروف‌چینی مطالب، او معمولاً ۲ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می‌کند. اگر رضا به او کمک کند، کار ویرایش حدود ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می‌انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟


قلعه بهستان ــ ماه‌نشان زنجان

۳ اگر یک شیء از بالای ساختمانی به ارتفاع ۵۰ متر سقوط آزاد کند، پس از t ثانیه در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار خواهد داشت؛ به‌طوری‌که $t=\sqrt{10-\frac{h}{5}}$. این جسم، دو ثانیه پس از سقوط در چه ارتفاعی نسبت به سطح زمین قرار دارد؟

۴ الف) عدد صحیحی بیابید که تفاضل آن از جذرش برابر نصف آن عدد باشد. مسئله چند جواب دارد؟

ب) عدد صحیحی بیابید که تفاضل جذرش از آن عدد برابر نصف آن باشد. مسئله چند جواب دارد؟

۵ معادله‌ای شاملِ مجموع دو عبارت رادیکالی بنویسید که عدد ۱ یکی از ریشه های آن باشد. پاسخ خود را با پاسخ دوستان خود مقایسه کنید.

فصل

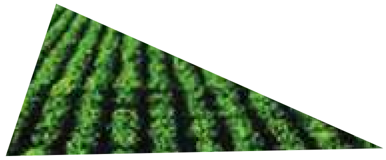
۲ هندسه

سی و سه پل، اصفهان

انسان از بدو تولد ناگزیر به آشنایی با فضای هندسی و شکل‌های هندسی است و هندسه در طول تاریخ مشکل‌گشای او در جهت حل مسائل محیط پیرامونی‌اش بوده‌است. ساخت پل‌ها نمونه‌ای بارز از کارایی هندسه در زندگی روزمرهٔ انسان است.

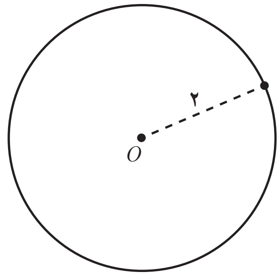
درس اوّل

ترسیم‌های هندسی

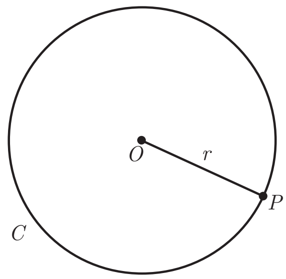


انسان از دیرباز برای حل بسیاری از مسائل خود از ترسیم‌های هندسی کمک گرفته است. فرض کنید بخواهیم زمینی مثلث شکل را تنها با کشیدن یک دیوار مستقیم به دو قسمت هم‌مساحت تقسیم نماییم. چگونه می‌توان این کار را انجام داد؟

فعالیت



۱ یک نقطهٔ ثابت در صفحه، مانند O را درنظر بگیرید و تمام نقاطی را که به فاصلهٔ ثابت ۲ سانتی‌متر از آن هستند درنظر بگیرید. این نقاط چه شکلی را تشکیل می‌دهند؟

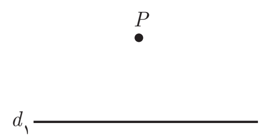


۲ یک دایره به مرکز O و به شعاع ۲ سانتی‌متر بکشید و یک نقطهٔ دلخواه روی آن درنظر بگیرید. فاصلهٔ این نقطه تا مرکز دایره چقدر است؟

نتیجه : دایرهٔ $C(O,r)$ (بخوانید دایرهٔ C به مرکز O و به شعاع r) را درنظر بگیرید. هر نقطه که از نقطهٔ O به فاصلهٔ r باشد .... دایره قرار دارد و هر نقطه که .... دایره قرار دارد از نقطهٔ O به فاصلهٔ r است.

۳ مانند آنچه برای نقاط روی دایره انجام داده شد، یک‌بار برای نقاط داخل دایره و یک‌بار برای نقاط بیرون دایره نتایج مشابهی به‌دست آورید.

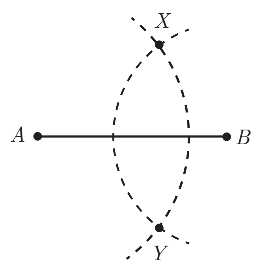
۴ خطی مانند d درنظر بگیرید. تمام نقاطی را که به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از خط d هستند مشخص کنید. این نقاط چه شکلی یا شکل‌هایی را تشکیل می‌دهند؟



۵ نقطهٔ P به فاصلهٔ ۱ سانتی‌متر از خط d_1 قرار دارد.

الف) تمام نقاطی را که به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از نقطهٔ P هستند، مشخص کنید.

ب) نقاطی از خط d_1 را که به فاصلهٔ ۲ سانتی‌متر از نقطهٔ P هستند، مشخص کنید.

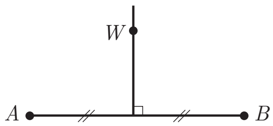


۶ نقاط A و B را به فاصلهٔ ۵ سانتی‌متر از هم درنظر بگیرید. به مرکز A و به شعاع ۴ سانتی‌متر یک کمان رسم کنید و سپس به مرکز B و به شعاع ۳ سانتی‌متر کمانی دیگر رسم کنید تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند X و Y قطع کند.

الف) اندازهٔ اضلاع مثلث‌های AXB و AYB را مشخص کنید.

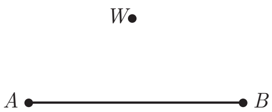
ب) توضیح دهید که چگونه می‌توانید مثلثی به طول ضلع‌های داده شدهٔ ۴ و ۵ و ۷ رسم کنید.

برخی خواص عمود منصف و ترسیم آن



۱ــ در شکل مقابل پاره خط AB و عمودمنصف آن مشخص شده‌اند. نقطه‌ای دلخواه مانند W روی عمودمنصف AB درنظر بگیرید و نشان دهید W از دوسرِ AB به یک فاصله است.

نتیجهٔ ۱ : هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن پاره‌خط ....

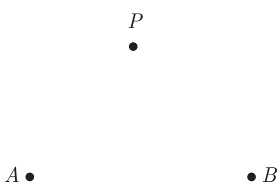


۲ــ پاره‌خط AB و نقطهٔ W مانند شکل مقابل به‌گونه‌ای قرار دارند که W از دوسر AB به‌یک فاصله است (یعنی $AW = BW$). نشان دهید W روی عمودمنصف AB قرار دارد.
(راهنمایی : از W به A و B و به وسط AB وصل کنید و با استفاده از هم‌نهشتی مثلث‌ها نشان دهید W روی عمودمنصف AB قرار دارد.)

نتیجهٔ ۲ : هر نقطه که از دوسر یک پاره‌خط به فاصلهٔ یکسان باشد ....

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم : هر نقطه که روی عمودمنصف یک پاره‌خط باشد از .... و هر نقطه که از .... روی عمودمنصف آن پاره‌خط قرار دارد.

فعالیت

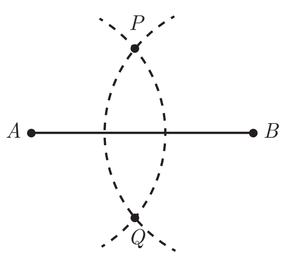


۱ نقطهٔ P در صفحه مشخص شده است. چند خط می‌توانید رسم کنید که از نقطهٔ P عبور نمایند؟

۲ دو نقطهٔ A و B در صفحه مشخص شده‌اند. چند خط متمایز می‌توانید رسم کنید که از هر دو نقطهٔ A و B عبور نمایند؟

۳ به نظر شما برای اینکه یک خط مشخص شود حداقل چند نقطه از آن باید مشخص شده باشد؟

رسم عمود منصف یک پاره‌خط داده شده



می‌خواهیم عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیم.

۱ــ دهانهٔ پرگار را بیش از نصف طول AB باز کنید و یک بار به مرکز نقطهٔ A و بار دیگر به همان شعاع و به مرکز B کمان بزنید تا دو کمان یکدیگر را در نقاطی مانند P و Q قطع کنند.

۲ــ آیا نقاط P و Q نقاطی متعلق به عمودمنصف AB هستند؟ چرا؟

۳ــ آیا با داشتن نقاط P و Q می‌توان عمودمنصف AB را مشخص کرد؟ چرا؟

۴ــ حال عمودمنصف AB را رسم کنید.

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای روی آن

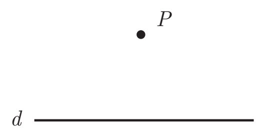
خط d و نقطهٔ M روی آن مانند شکل مشخص شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از M بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۱ــ به کمک پرگار نقاطی مانند A و B بر خط d بیابید که $AM=MB$ باشد.

۲ــ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید.

۳ــ عمودمنصف پاره‌خط AB خطی است که بر خط d .... و از نقطهٔ ....

رسم خط عمود بر یک خط، از نقطه‌ای غیر واقع بر آن



خط d و نقطهٔ P مانند شکل داده شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطهٔ P بگذرد و بر خط d عمود باشد.

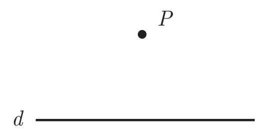
۱ــ به کمک پرگار نقاطی مانند A و B را بر خط d به‌گونه‌ای بیابید که از نقطهٔ P به یک فاصله باشند.

۲ــ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنید.

۳ــ آیا عمودمنصف پاره‌خط AB از نقطهٔ P می‌گذرد؟ چرا؟

عمودمنصف پاره‌خط AB بر خط d .... و از نقطهٔ ....

رسم خط موازی با خط داده شده از نقطه‌ای غیر واقع بر آن



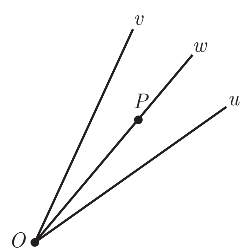
خط d و نقطهٔ P مانند شکل مقابل داده شده‌اند. می‌خواهیم خطی رسم کنیم که از نقطهٔ P بگذرد و با خط d موازی باشد.

۱ــ خط d_1 را به‌گونه‌ای رسم کنید که از نقطهٔ P بگذرد و بر خط d عمود باشد.

۲ــ خط d_2 را به‌گونه‌ای رسم کنید که از نقطهٔ P بگذرد و بر خط d_1 عمود باشد.

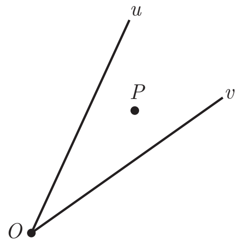
۳ــ خط d_2 نسبت به خط d چه وضعیتی دارد؟ چرا؟ (خط d_1 را مورب درنظر بگیرید)

برخی خواص نیمساز و ترسیم آن



۱ــ در شکل مقابل نیم‌خط Ow نیمساز زاویهٔ vOu است. فرض کنید P یک نقطهٔ دلخواه روی Ow باشد. ثابت کنید فاصلهٔ نقطهٔ P از دو ضلع زاویهٔ vOu یکسان است. (یعنی اگر از نقطهٔ P عمودهایی بر Ov و Ou رسم کنیم، طول آنها باهم برابر است.)

نتیجه۱ : هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع آن زاویه ....

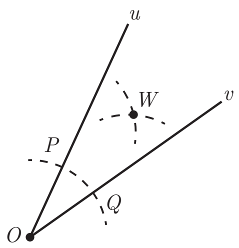


۲ــ در شکل مقابل فاصلهٔ نقطهٔ P از دو ضلع زاویهٔ vOu یکسان است. نشان دهید که نقطهٔ P روی نیمساز زاویه قرار دارد.

(**راهنمایی** : پاره‌خط OP را و دو عمود از نقطهٔ P بر Ou و Ov رسم کنید و با استفاده از هم‌نهشتی مثلث‌ها نشان دهید OP همان نیمساز زاویهٔ uOv است.)

نتیجه ۲ : هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به فاصلهٔ یکسان باشد، روی ....

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم : هر نقطه که روی .... یک زاویه قرار داشته باشد، از .... و هر نقطه که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، روی .... آن زاویه قرار دارد.



۳ــ رسم نیمساز یک زاویه

الف) زاویهٔ uOv را درنظر بگیرید. به مرکز O و به شعاع دلخواه کمانی رسم کنید تا نیم‌خط‌های Ou و Ov را در نقاطی مانند P و Q قطع کند.

ــ طول پاره‌خط‌های OP و OQ نسبت به هم چگونه‌اند؟

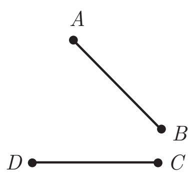
ب) دهانهٔ پرگار را کمی بیش از نصف طول پاره‌خط PQ باز کنید و یک بار به مرکز P و بار دیگر به مرکز Q کمانی رسم کنید تا دو کمان مانند شکل یکدیگر را در نقطه‌ای مانند W قطع کنند. طول پاره‌خط‌های PW و QW نسبت به هم چگونه‌اند؟

پ) پاره‌خط‌های WP، WO و WQ را رسم کنید. دو مثلث OPW و OQW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

ــ اندازهٔ زاویه‌های POW و QOW نسبت به هم چگونه‌اند؟ چرا؟

ــ پاره‌خط OW .... زاویهٔ uOv است.

تمرین



۱ الف) دو پاره‌خط AB و CD مطابق شکل داده شده‌اند. نقطه‌ای بیابید که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد و از دو نقطهٔ D و C نیز به یک فاصله باشد.

ب) نقطهٔ موردنظر در قسمت (الف) را O می‌نامیم. اگر نقطهٔ O روی عمود منصفِ پاره‌خط BC باشد و G دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA باشد، رأس‌های چهارضلعی $ABCD$ نسبت به دایرهٔ G چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

۲ مثلثی دلخواه رسم کنید و آن‌را ABC بنامید. عمودمنصف‌های دو ضلع این مثلث را رسم کنید و نقطهٔ برخورد آنها را O بنامید. به مرکز O و به شعاع OA یک دایره رسم کنید. نقاط B و C نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

۳ مثلثی دلخواه رسم کنید و آن‌را ABC بنامید. نیمسازهای دو زاویهٔ این مثلث را رسم کنید و نقطهٔ برخورد آنها را O بنامید. از نقطهٔ O بر سه ضلع مثلث عمود رسم کنید و پای یکی از عمودها را H بنامید. به مرکز O و به شعاع OH دایره‌ای رسم کنید. اضلاع مثلث ABC نسبت به این دایره چه وضعیتی دارند؟ چرا؟

۴ فرض کنید نقطهٔ A به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر از خط d باشد. روش رسم هریک از مثلث‌های زیر را توضیح دهید.

الف) مثلثی متساوی‌الساقین که A یک رأس آن و قاعدهٔ آن بر خط d منطبق باشد.

ب) مثلثی که شرایط (الف) را داشته باشد و طول ساق آن ۶ سانتی‌متر باشد.

پ) مثلثی رسم کنید که شرایط قسمت (الف) را داشته باشد و مساحت آن $8cm^2$ باشد.

آبشار شوی خوزستان

درس دوم

استدلال و قضیهٔ تالس

نسبت و تناسب

در پایه‌های قبل با دو مفهوم نسبت و تناسب و برخی خواص ابتدایی آنها آشنا شده‌اید. می‌دانیم که هر دو **نسبت** مساوی یک **تناسب** تشکیل می‌دهند.

می دانیم که اگر یک مقدار ثابت را با دوطرف یک تساوی جمع و یا تفریق کنیم، تساوی دوباره برقرار خواهد بود. همچنین اگر دوطرف یک تساوی را در یک مقدار ضرب کنیم یا به یک مقدار غیرصفر تقسیم نماییم، تساوی برقرار می‌ماند. با توجه به این مطلب هریک از خواص زیر را به راحتی می‌توان ثابت کرد.

کار در کلاس

۱ با فرض اینکه تمام مخرج ها مخالف صفرند و با توجه به نکات گفته شده در بالا هریک از موارد زیر را ثابت کنید.

(طرفین وسطین) الف) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow ad=bc$

(تبدیل حاصل ضرب به تناسب) ب) $ad=bc\Rightarrow \frac{a}{b}=\frac{c}{d}$

(معکوس کردن تناسب) پ) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \frac{b}{a}=\frac{d}{c}$

(تعویض جای طرفین یا وسطین) ت) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \begin{cases}\frac{c}{a}=\frac{d}{b}\\ \frac{a}{c}=\frac{b}{d}\end{cases}$

(ترکیب نسبت در صورت یا مخرج) ث) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \begin{cases}\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}\\ \frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}\end{cases}$

راهنمایی: در قسمت (ث) برای اثبات اولین تناسب به دو طرف تساوی عدد ۱ را اضافه کنید و برای اثبات تناسب دوم ابتدا کسرها را معکوس نمایید، سپس به دو طرف عدد ۱ را اضافه کنید.

(تفضیل نسبت در صورت یا مخرج) ج) $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}\Rightarrow \begin{cases}\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}\\ \frac{a}{b-a}=\frac{c}{d-c}\end{cases}$

راهنمایی : در قسمت (ج) برای اثبات اولین تناسب از دو طرف تساوی عدد ۱ را کم کنید و برای اثبات تناسب دوم ابتدا کسرها را معکوس کرده، سپس از دوطرف عدد ۱ را کم کنید.

۲ با توجه به خواص اثبات شده در ۱ موارد زیر را کامل کنید.

الف) $\frac{۵}{۱۴}=\frac{۱۵}{۴۲} \Rightarrow ۵\times \underline{\qquad} = ۱۵\times \underline{\qquad}$

ب) $۳\times ۴۰ = ۱۲\times ۱۰ \Rightarrow \frac{۳}{\quad}=\frac{۱۲}{\quad}$

پ) $\frac{۷}{۱۰}=\frac{۲۱}{۳۰} \Rightarrow \frac{۱۰}{۷}=\underline{\qquad}$

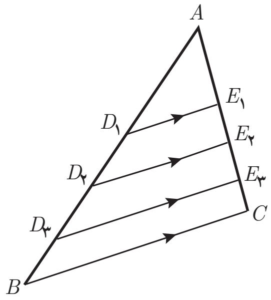
ت) $\frac{۶}{۱۱}=\frac{۱۸}{۳۳} \Rightarrow \frac{۶}{۱۸}=\underline{\qquad} \quad , \quad \frac{۳۳}{۱۱}=\underline{\qquad}$

ث) $\frac{۴}{۱۴}=\frac{۱۰}{۳۵} \Rightarrow \frac{۱۸}{۱۴}=\underline{\qquad} \quad , \quad \frac{۴}{۱۸}=\underline{\qquad}$

ج) $\frac{۵}{۱۲}=\frac{۱۰}{۲۴} \Rightarrow \frac{-۷}{۱۲}=\underline{\qquad} \quad , \quad \frac{۵}{-۷}=\underline{\qquad}$

سد باغکل ــ شهرستان خوانسار ــ استان اصفهان

استدلال، قضیهٔ تالس و تعمیم آن



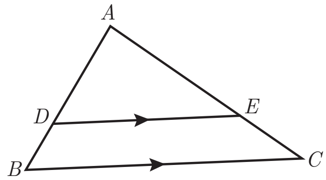
در شکل مقابل داریم: $D_۱E_۱ \| BC$ و $D_۲E_۲ \| BC$ و $D_۳E_۳ \| BC$. این اطلاعات را می‌توان به این صورت نشان داد: $D_iE_i \| BC$ برای $۱ \le i \le ۳$

ــ اندازهٔ پاره‌خط‌های زیر را با خط‌کش مشخص کرده و در کسرها جایگزین کنید و نسبت‌های برابر در ستون‌های متمایز را مشخص نمایید.

$$\frac{AE_۱}{E_۱C} \qquad \frac{AD_۱}{D_۱B}$$

$$\frac{AE_۳}{E_۳C} \qquad \frac{AD_۲}{D_۲B}$$

$$\frac{AE_۲}{E_۲C} \qquad \frac{AD_۳}{D_۳B}$$



ــ اگر پاره‌خط DE مانند شکل روبه‌رو موازی ضلع BC از مثلث ABC باشد، حدس می‌زنید نسبت کدام پاره‌خط‌ها با هم برابر باشند؟

ـــــ = ـــــ

آیا می‌توان نتیجه گرفت اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث رسم شود، همواره تساوی مشابه بالا برقرار است؟

در سال‌های قبل دیدید که نمی‌توان به درست بودن نتیجه‌ای که بر اساس مشاهدهٔ چند مورد به‌دست آمده باشد، مطمئن بود.

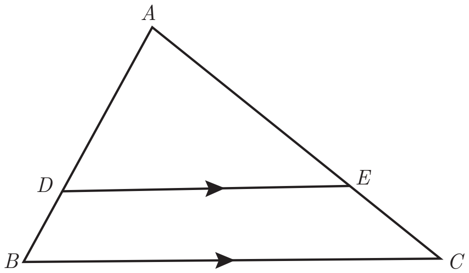
> این نوع از استدلال که در آن با مشاهده و بررسی یک موضوع در چند حالت، نتیجه‌ای کلی از آن گرفته می‌شود؛ یعنی «از جزء به کل می‌رسیم»، **استدلال استقرایی** نامیده می‌شود.

> **استدلال استنتاجی**، استدلالی است که بر اساس نتیجه‌گیری منطقی بر پایهٔ واقعیت‌هایی که درستی آنها را پذیرفته‌ایم، بیان می‌شود.

در ریاضیاتی که تاکنون خوانده‌اید، با مواردی از استدلال‌های استنتاجی مواجه شده‌اید. در ادامه با استدلال استنتاجی، نتیجه‌ای را که با استدلال استقرایی به‌دست آوردیم، ثابت خواهیم کرد.

قضیهٔ تالس

فعالیت



فرض کنید مانند شکل مقابل پاره‌خط DE موازی ضلع BC باشد.

می‌خواهیم نشان دهیم : $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$.

۱ از نقطهٔ D به C و از E به B وصل کنید. مساحت‌های مثلث‌های DEC و DEB که آنها را با S_{DEC} و S_{DEB} نشان می‌دهیم، با هم برابرند. چرا؟

۲ از نقطهٔ E به ضلع AB عمود کنید و پای عمود را $H_۱$ بنامید. سپس از D به ضلع AC عمود کنید و پای عمود را $H_۲$ بنامید.

۳
$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEB}}=\frac{\frac{۱}{۲}EH_۱\times AD}{\frac{۱}{۲}EH_۱\times DB}=\frac{AD}{DB}$$

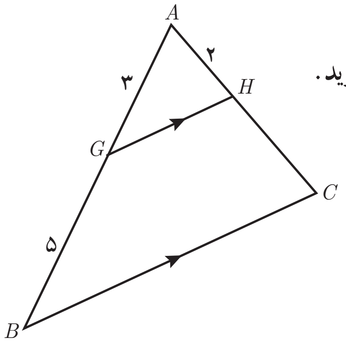
۴
$$\frac{S_{ADE}}{S_{DEC}}=\frac{\frac{۱}{۲}DH_۲\times AE}{\frac{۱}{۲}DH_۲\times EC}=\frac{AE}{EC}$$

۵ از (۱) و (۳) و (۴) نتیجه می‌شود $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$. چرا؟

برخی نتایج مهم و پرکاربرد که با استدلال استنتاجی به‌دست می‌آیند، **قضیه** نامیده می‌شوند.

نتیجهٔ بالا قضیه‌ای از تالس[1] است. همان‌گونه که مشاهده کردید، رابطهٔ بین طول‌های پاره‌خط‌هایی را که توسط خطی موازی یکی از اضلاع مثلث، بر دو ضلع دیگر آن مثلث به‌وجود می‌آید، بیان می‌کند.

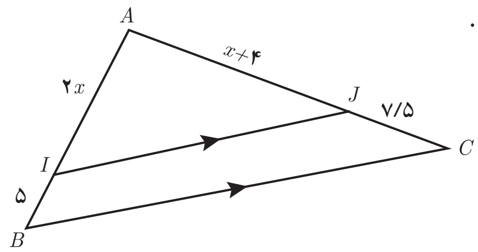
کار در کلاس



۱ در شکل پاره‌خط‌های GH و BC موازی‌اند. اندازهٔ پاره‌خط‌های AC و HC را به دست آورید.

۱ـ فیلسوف و ریاضی‌دان که حدود ۶۲۳ سال قبل از میلاد در نواحی غرب ترکیهٔ امروزی به دنیا آمد. اثبات بسیاری از قضایای مهم هندسی را به او نسبت داده‌اند.

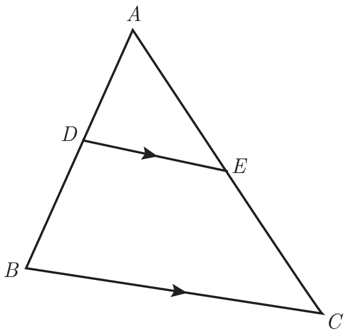
۲ با تشکیل یک معادله، مقدار x و اندازهٔ پاره‌خط‌های AI و AJ را به دست آورید.



تعمیم قضیهٔ تالس

فعالیت

۱ در شکل مقابل $DE \parallel BC$.



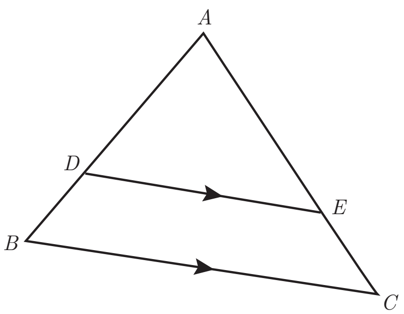
الف) تناسب قضیهٔ تالس را بنویسید.

ب) به کمک ترکیب نسبت در مخرج تناسب $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AC}$ را نتیجه بگیرید.

پ) به کمک تفضیل نسبت در صورت از تناسب به‌دست آمده در (ب) تناسب $\frac{DB}{AB}=\frac{EC}{AC}$ را نتیجه بگیرید.

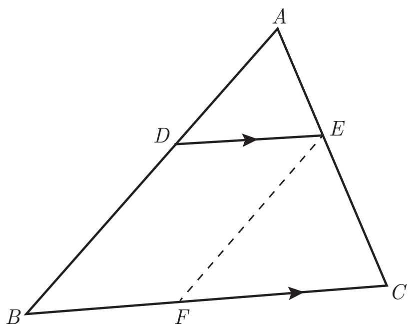
توجه کنید که تناسب‌های به‌دست آمده در (ب) و (ج) صورت‌های دیگر قضیهٔ تالس‌اند.

۲ در مثلث ABC پاره‌خط DE موازی ضلع BC است. ابتدا تناسبِ قضیهٔ تالس را بنویسید. سپس با توجه به ویژگی‌های تناسب و تکمیل تساوی‌های زیر، تناسب‌های دیگری را از قضیهٔ تالس نتیجه بگیرید.



$$\frac{AD}{DB}=\ldots\ldots \Rightarrow \begin{cases} \frac{DB}{DA}=\ldots\ldots \quad \frac{BD}{BA}=\ldots\ldots \quad \frac{AB}{BD}=\ldots\ldots \\ \frac{AD}{AB}=\ldots\ldots \quad \frac{AB}{AD}=\ldots\ldots \end{cases}$$

۳



الف) در شکل پاره‌خط‌های DE و BC موازی‌اند. با توجه به قضیهٔ تالس داریم: $\frac{AD}{AB}=\ldots\ldots$

ب) پاره‌خط EF را موازی AB رسم می‌کنیم. بنابراین داریم: $\frac{BF}{BC}=\ldots\ldots$

پ) با توجه به قسمت‌های (الف) و (ب) داریم: $\frac{AD}{AB}=\frac{\quad}{AC}=\frac{\quad}{BC}$

ت) چهارضلعی $DEFB$ چه نوع چهارضلعی‌ای است؟

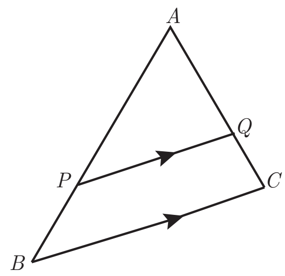
پاره‌خط BF با کدام پاره‌خط برابر است؟ $BF=$

ث) با توجه به قسمت‌های (پ) و (ت) داریم: $\frac{AD}{AB}=\frac{\quad}{AC}=\frac{\quad}{BC}$

این رابطه تعمیم قضیهٔ تالس است.

کار در کلاس

در شکل پاره‌خط PQ موازی با ضلع BC است. درستی یا نادرستی هر عبارت را مشخص کنید.



الف) $\frac{AP}{PB}=\frac{AQ}{QC}=\frac{PQ}{BC}$

ب) $\frac{AP}{AB}=\frac{AQ}{AC}=\frac{PQ}{BC}$

پ) $\frac{PB}{AP}=\frac{QC}{AC}$

ت) $\frac{PB}{AB}=\frac{QC}{AC}=\frac{PQ}{BC}$

ث) $\frac{PB}{AB}=\frac{QC}{AC}$

ج) $\frac{AB}{AP}=\frac{AC}{AQ}=\frac{BC}{PQ}$

اگر فرض و حکم یک قضیه را جابه‌جا کنیم، آنچه حاصل می‌شود، «عکس قضیه» است. عکس یک قضیه می‌تواند درست یا نادرست باشد.

در مثال‌های زیر قضیه و عکس آن آمده است.

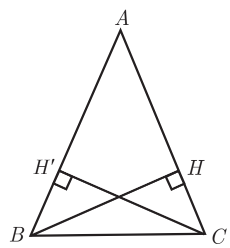
مثال ۱ :

قضیه : اگر یک چهارضلعی متوازی‌الاضلاع باشد، آنگاه قطرهایش یکدیگر را نصف می‌کنند.

عکس قضیه : اگر در یک چهارضلعی قطرها یکدیگر را نصف کنند، آنگاه آن چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است.

مثال ۲ :

قضیه : اگر دو ضلع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه ارتفاع‌های وارد بر آن دو ضلع نیز با هم برابرند.



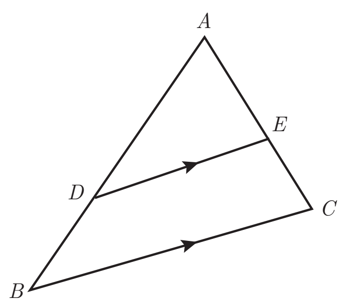
فرض: $AB=AC$

حکم: $BH=CH'$

عکس قضیه : اگر دو ارتفاع از یک مثلث با هم برابر باشند، آنگاه اضلاع نظیر به آن ارتفاع‌ها نیز با هم برابرند.

فرض: $BH=CH'$

حکم: $AB=AC$



مثال ۳ : در قضیهٔ تالس فرض و حکم به صورت زیر است.

فرض : $DE \parallel BC$

حکم : $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$

با توجه به آنچه گفته شد، فرض و حکم عکس قضیهٔ تالس را بنویسید.

فرض :

حکم :

به عبارت دیگر عکس قضیه تالس می‌گوید هرگاه پاره‌خط DE مانند شکل پاره‌خط‌های AB و AC را به گونه‌ای قطع کرده باشد که داشته باشیم $\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}$ ، در این صورت پاره‌خط DE موازی پاره‌خط BC است. به نظر شما عکس قضیه تالس درست است یا نه؟ کمی بعد به بررسی این مسئله خواهیم پرداخت.

معمولاً برای نوشتن عکس قضیه، قسمت اصلی فرض با حکم جابه‌جا می‌شود و قسمت‌هایی از فرض ممکن است هم در قضیه و هم درعکس آن ثابت باشند؛ مثلاً در مثال قبل مثلث بودن ABC هم در خود قضیه و هم در عکس آن جزء مفروضات است.

برهان خلف

نوعی از استدلال که در مسائل ریاضی و هندسی از آن استفاده می‌شود، **برهان غیرمستقیم** یا **برهان خلف** است. در برهان خلف به‌جای اینکه به‌طور مستقیم از فرض شروع کنیم و به درستی حکم برسیم، فرض می‌کنیم حکم درست نباشد (فرض خلف) و به یک تناقض یا به یک نتیجهٔ غیرممکن می‌رسیم و به این ترتیب فرض خلف باطل و درستی حکم ثابت می‌شود.

مسئله: (فرض) $A \Rightarrow$ (حکم) B

اثبات به روش برهان خلف :

A درست
و
B نادرست

$\Rightarrow \underbrace{\ldots \Rightarrow \ldots \Rightarrow \ldots \Rightarrow}_{\text{استدلال، منطق و حقایق}}$

۱) A درست نیست

۲) تناقض منطقی

پس نتیجه می‌گیریم حکم B درست است، زیرا در صورت نادرستی B طبق استدلال فوق به یکی از نتایج ۱ یا ۲ می‌رسیم که هیچ‌کدام نمی‌تواند اتفاق بیفتد.

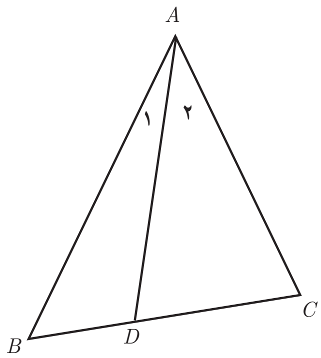
مثال : اگر $n\in \mathbb{N}$ و n^2 عددی فرد باشد، آن‌گاه n نیز عددی فرد است.

حل :

با استفاده از برهان خلف فرض کنیم حکم مسئله نادرست باشد؛ یعنی n عددی فرد نباشد؛ بنابراین n عددی زوج خواهد بود و می‌توان

نوشت $n=۲k$ به‌طوری که k یک عدد طبیعی باشد.

بنابراین $n^۲=۴k^۲=۲(۲k^۲)$ که عددی زوج است و با فرض مسئله در تناقض است؛ لذا از ابتدا n نمی‌توانست عددی زوج باشد.



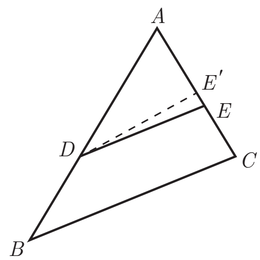
مثال : فرض کنیم AD نیمساز زاویهٔ A از مثلث ABC باشد. اگر $BD \neq DC$ باشد، آن‌گاه $AB \neq AC$.

حل :

با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم حکم نادرست باشد.

بنابراین داریم $AB = AC$ (فرض خلف) در این صورت خواهیم داشت $\overset{\Delta}{ABD} \cong \overset{\Delta}{ACD}$ (چرا؟). از این هم‌نهشتی نتیجه خواهد شد $BD = DC$ است، که با فرض مسئله در تناقض است. لذا از ابتدا فرض $AB = AC$ نادرست بوده است، بنابراین $AB \neq AC$ است.

حال می‌خواهیم با استفاده از برهان خلف درستی عکس قضیهٔ تالس را ثابت کنیم.

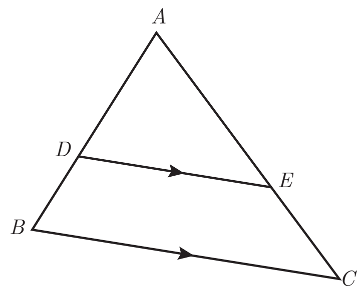


عکس قضیهٔ تالس : مانند شکل مقابل در مثلث ABC، اگر $\frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}$، آن‌گاه $DE \parallel BC$.

اثبات : با استفاده از برهان خلف فرض می‌کنیم حکم مسئله غلط باشد؛ یعنی $DE \nparallel BC$. لذا از نقطهٔ D خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AC را در نقطه‌ای مانند E' قطع کند. طبق قضیهٔ تالس داریم $\frac{AD}{DB}=\frac{AE'}{E'C}$ و از مقایسه با فرض مسئله خواهیم داشت $\frac{AE}{EC}=\frac{AE'}{E'C}$.

حال با ترکیب نسبت در مخرج داریم $\frac{AE}{AC}=\frac{AE'}{AC}$ و در نتیجه $AE= AE'$. این یعنی نقطهٔ E بر E' منطبق است و لذا DE' همان DE است و این یک تناقض است، زیرا $DE' \parallel BC$ و $DE \nparallel BC$ است. بنابراین از ابتدا فرضِ غلط بودن حکم نادرست بوده است و حکم نمی‌تواند غلط باشد، یعنی $DE \parallel BC$ است.

قضیه‌های دو شرطی



همان‌گونه که دیدیم، قضیهٔ تالس و عکس آن هر دو درست‌اند؛ بنابراین برای مثلثی مانند $\overset{\Delta}{ABC}$ در شکل مقابل می‌توان هر دوی آنها را به‌صورت زیر بیان کرد :

اگر $DE \parallel BC$، آن‌گاه $\frac{AE}{EC}=\frac{AD}{DB}$ و برعکس.

چنین قضیه‌هایی را قضیه‌های **دو شرطی** می‌نامیم. قضیه‌های دو شرطی را با نماد $\Leftrightarrow$[۱]

۱ــ این نماد نشان دهندهٔ آن است که هر کدام از طرفین می‌توانند طرف دیگر را نتیجه دهند؛ لذا یا هر دو طرف درست‌اند و یا هر دو طرف نادرست‌اند.

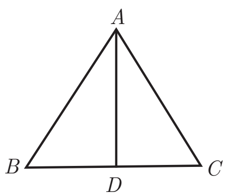
(که اگر و تنها اگرخوانده می‌شود) بیان کرد؛ به‌طور مثال قضیهٔ فوق و عکس آن را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد :

فرض کنیم ABC یک مثلث و نقاط D و E به ترتیب روی AB و AC باشند. در این صورت

$$DE \| BC \Leftrightarrow \frac{AD}{DB}=\frac{AE}{EC}.$$

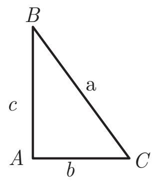
در ادامه مثال‌هایی از قضایای دو شرطی ملاحظه خواهید کرد.

مثال : در یک مثلث دو ضلع برابرند؛ اگر و تنها اگر زاویه‌های روبه‌رو به آنها باهم برابر باشند.



مثال : در مثلث متساوی‌الاضلاع یک پاره‌خط نیمساز است؛ اگر و تنها اگر میانه باشد.

کار در کلاس

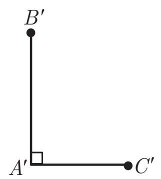


با توجه به قضیهٔ فیثاغورس اگر زاویهٔ A از مثلثی مانند ABC، قائمه باشد، آنگاه $a^2 = b^2 + c^2$.

الف) عکس این قضیه را بنویسید.

ب) با انجام مراحل زیر نتیجه بگیرید که عکس قضیهٔ فیثاغورس نیز درست است.

۱ــ فرض کنیم مثلث ABC داده شده است و رابطهٔ $a^2 = b^2 + c^2$ بین اندازهٔ اضلاع آن برقرار است.



۲ــ پاره‌خط‌های $A'B'$ و $A'C'$ را مطابق شکل مقابل به‌گونه‌ای درنظر بگیرید که $\hat{A}'=90^\circ$ و $A'C'=AC$ و $A'B'=AB$ است.

۳ــ با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث $A'B'C'$، اندازه پاره‌خط $B'C'$ را به‌دست آورید و ثابت کنید $B'C'=BC$.

۴ــ توضیح دهید چرا $\overset{\Delta}{ABC} \cong \overset{\Delta}{A'B'C'}$ و نتیجه بگیرید $\hat{A}=90^\circ$.

ج) قضیه فیثاغورس و عکس آن را به‌صورت یک قضیهٔ دو شرطی بیان کنید.

مثال نقض

نوع دیگری از استدلال که در پایه‌های قبل نیز تا حدودی با آن آشنا شده‌اید، استدلال با **مثال نقض** است. اگر فردی ادعا کند که «همهٔ اعداد فرد، اول‌اند»، این یک حکم کلی دربارهٔ تمام اعداد فرد است و ارائه عدد ۹ به عنوان عددی که فرد و غیر اول است، برای رد این ادعا کافی است. به چنین مثالی که برای رد یک حکم کلی استفاده می‌شود، مثال نقض می‌گوییم.

به عنوان مثالی دیگر؛ فرض کنیم فردی ادعا کند که «هیچ فرد ایرانی‌ای تا به حال مدال

فیلدز[۱] نگرفته است». در این صورت شما برای رد ادعای او چه می‌توانید بگویید؟ اگر شما حتی یک فرد ایرانی را که مدال فیلدز گرفته است، برای او مثال بزنید، در این صورت ادعای او باطل شده است و در واقع شما با استفاده از یک مثال نقض، ادعای او را باطل کرده‌اید.

با دقت در ادعای مطرح شده خواهیم دید که کلمهٔ «هیچ» در این حکم باعث می‌شود که این ادعا یک حکم کلی برای تمام اعضای یک مجموعه (که در اینجا مجموعهٔ افراد ایرانی است) باشد. بنابراین در این مورد نیز آوردن یک مثال نقض کافی است تا آن حکم رد شود و به عبارتی غلط بودن آن حکم اثبات گردد.

در ادامه نمونه‌هایی از حکم‌های کلی آمده‌اند.

الف) همهٔ اعداد اول فردند. (حکم کلی دربارهٔ تمام اعداد اول)

ب) «در هر مستطیل اندازهٔ قطرها باهم برابر است.» (حکم کلی دربارهٔ تمام مستطیل‌ها)

پ) «به ازای هر عدد طبیعی n، مقدار عبارت n^2+n+41 عددی اول است.» (حکم کلی در مورد تمام اعداد طبیعی)

دربارهٔ درستی یا نادرستی حکم «الف» چه حدسی می‌زنید؟ چگونه می‌توانید حدس خود را ثابت کنید؟

می‌دانیم که ۲ یک عدد اول و زوج است. بنابراین حکم کلی «الف» با ارائهٔ همین مثال نقض رد می‌شود. دربارهٔ درستی یا نادرستی حکم‌های «ب» و «پ» چه حدس‌هایی می‌زنید؟ آیا می‌توانید برای آنها مثال نقض بیاورید و آنها را باطل کنید؟

اگر برای یک حکم کلی نتوانیم مثال نقض ارائه کنیم، دربارهٔ درستی یا نادرستی آن حکم چه می‌توان گفت؟ آیا در این حالت درستی حکم را باید پذیرفت؟

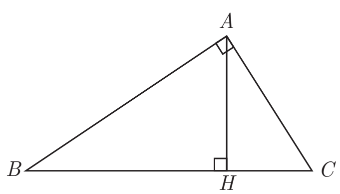
برای قسمت (ب) مثال نقض وجود ندارد؛ اما این برای پذیرش این حکم کافی نیست و باید توجه کرد که «**برای نشان دادن درستی یک حکم کلی باید آن را اثبات کنیم**».

دربارهٔ گزینهٔ (پ) چه می‌توان گفت؟

اگر درستی یا نادرستی یک حکم کلی بر ما مشخص نباشد و برای رد آن، مثال نقض نیز نتوانیم ارائه دهیم، نمی‌توان دربارهٔ درستی یا نادرستی آن حکم کلی نتیجه‌ای گرفت.

تمرین

۱) در شکل مقابل مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را به دو روش محاسبه کنید و از تساوی دو عبارت به‌دست آمده برای مساحت مثلث، یک تناسب به‌دست‌آورید.



۱ــ مدال یا نشان فیلدز (Fields medal) جایزه‌ای است که به ابتکار ریاضی‌دان کانادایی جان چارلز فیلدز هر چهار سال یک‌بار به ریاضی‌دانان جوان (کمتر از چهل سال) که کار ارزنده‌ای در ریاضی انجام داده باشند تعلق می‌گیرد. از آنجا که در رشتهٔ ریاضی جایزهٔ نوبل اهدا نمی‌شود، این جایزه را «نوبل ریاضیات» می‌خوانند. در سال ۲۰۱۴ نشان فیلدز به ریاضی‌دان ایرانی خانم **مریم میرزاخانی** تعلق گرفت. گفتنی است که میرزاخانی اولین زنی در دنیاست که موفق به گرفتن این نشان شده‌است. البته با تأسف تمام موقع تدوین کتاب خبر درگذشت ایشان، جهان علم و جامعهٔ ایرانی را سخت متأثر ساخت، روانش شاد

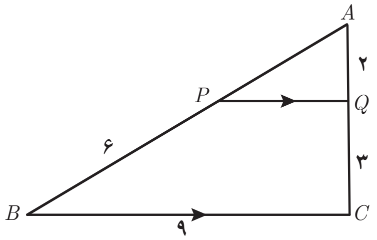
۲ در هر مورد، مقدار عددی نسبت $\frac{a}{b}$ را به‌دست آورید.

الف) $\frac{a}{۱۰+a}=\frac{b}{۸+b}$

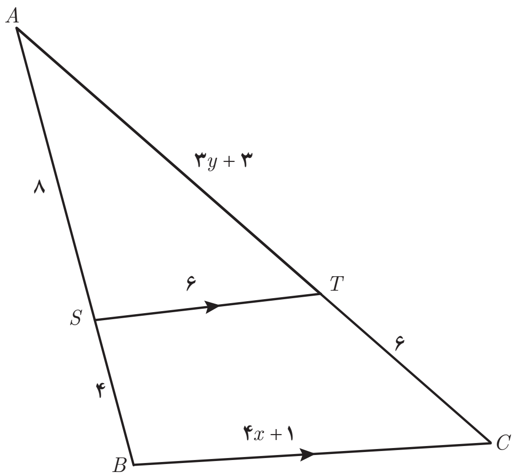
ب) $\frac{۳a+۱۰}{۱۰+۲a}=\frac{۳b+۷}{۷+۲b}$

۳ ثابت کنید در هر مثلث، پاره‌خطی که وسط‌های دو ضلع مثلث را به هم وصل کند، با ضلع سوم موازی و مساوی نصف آن است.

۴ در شکل مقابل $PQ \| BC$ است. طول پاره‌خط‌های AP و PQ را به‌دست آورید.

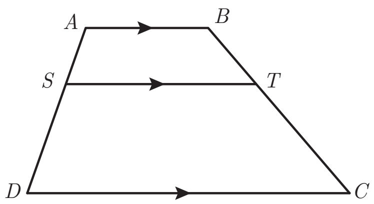


۵ در شکل مقابل $ST \| BC$ است. مقادیر x و y را به‌دست آورید.



۶ در ذوزنقه مقابل $AB \| ST \| DC$ است. ثابت کنید : $\frac{AS}{SD}=\frac{BT}{TC}$

(**راهنمایی** : یکی از قطرها را رسم کنید.)



۷ در هر مورد با عوض کردن جای فرض و حکم عکس آنچه را داده شده است، بنویسید.

الف) اگر در مثلثی سه ضلع برابر باشند، آنگاه سه زاویه نیز برابر خواهند بود.

ب) اگر در یک چهارضلعی اضلاع روبه‌رو موازی باشند، در این‌صورت زوایای مقابل با هم برابرند.

پ) اگر رأس‌های یک چهارضلعی روی یک دایره قرار داشته باشند، در این‌صورت زوایای مقابل آن چهارضلعی مکمل‌اند.

ت) در یک مثلث اگر دو ارتفاع نابرابر باشند، «ضلع متناظر به ارتفاع بزرگ‌تر» کوچک‌تر است از «ضلع مقابل به ارتفاع کوچک‌تر».

(**راهنمایی** : شکل بکشید و به زبان ریاضی بنویسید)

۸ با برهان خلف ثابت کنید نمی‌توان از یک نقطهٔ غیر واقع بر یک خط، دو عمود بر آن خط رسم کرد.

۹ هر یک از حکم‌های کلی زیر را با یک مثال نقض رد کنید.

الف) هیچ عدد اولِ بزرگ‌تر از ۱۲۷ وجود ندارد.

ب) مساحت هر مثلث از مساحت هر مربع بیشتر است.

پ) در هر مثلث اندازهٔ هر ضلع از اندازهٔ هر ارتفاع بزرگ‌تر است.

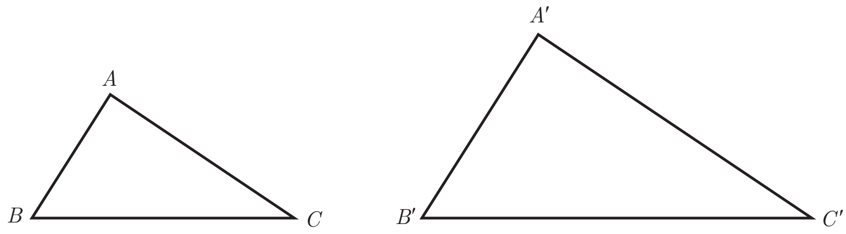
ت) در هر مثلث میانه و عمودمنصف متناظر به هر ضلع برهم منطبق‌اند.

درس سوم

تشابه مثلث‌ها

در پایهٔ نهم با مفهوم تشابه آشنا شدید. با توجه به مفهوم تشابه، دو مثلث ABC و $A'B'C'$ متشابه‌اند؛ هرگاه زوایای متناظر باهم برابر باشند و نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث یکسان باشد؛ یعنی :

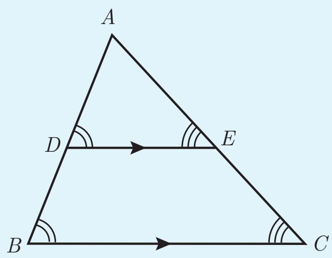
$$\overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'} \Leftrightarrow \begin{cases} \hat{A}=\hat{A}' \text{ و } \hat{B}=\hat{B}' \text{ و } \hat{C}=\hat{C}' \\ \text{و} \\ \dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{AC}{A'C'}=\dfrac{BC}{B'C'} \end{cases}$$



در این‌صورت نسبت اضلاع متناظر در دو مثلث را نسبت تشابه دو مثلث می‌نامیم. مثلاً اگر $\dfrac{AB}{A'B'}=\dfrac{۲}{۳}$ باشد، می‌گوییم مثلث ABC با مثلث $A'B'C'$ با نسبت تشابه $\dfrac{۲}{۳}$، متشابه است. دراین‌صورت مثلث $A'B'C'$ با مثلث ABC با نسبت تشابه $\dfrac{۳}{۲}$، متشابه خواهد بود.

قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها

اگر خطی موازی یکی از اضلاع مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند در این‌صورت مثلث کوچکی که به وجود می‌آید با مثلث بزرگ اولیه متشابه است.



اثبات :

۱ــ داریم $\hat{E}=\hat{C}$ و $\hat{D}=\hat{B}$ (چرا؟)

بنابراین زاویه‌های دو مثلث نظیر به نظیر باهم برابرند.

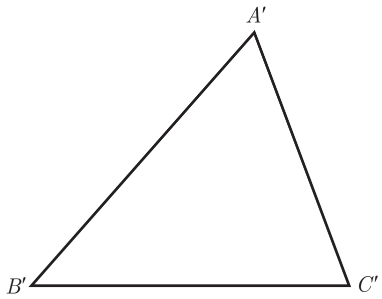
۲ــ با توجه به قضیهٔ تالس داریم :

$$\frac{AD}{\cdots}=\frac{\cdots}{AC}=\frac{DE}{\cdots}$$

۳ــ با توجه به (۱) و (۲) و تعریف تشابه داریم :

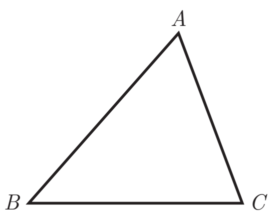
$$\overset{\Delta}{ADE} \sim \overset{\Delta}{ABC}$$

با استفاده از قضیهٔ اساسی تشابه مثلث‌ها می‌توان سه قضیهٔ بعد را که **حالت‌های تشابه دو مثلث** را بیان می‌کنند، اثبات کرد. از آنجا که اثبات این قضیه‌ها مدنظر نیست، در ادامه تنها صورت آنها بیان شده است.



قضیه ۱ : هرگاه دو زاویه از مثلثی با دو زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$(\hat{A}=\hat{A}' \text{ و } \hat{B}=\hat{B}' \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'})$$



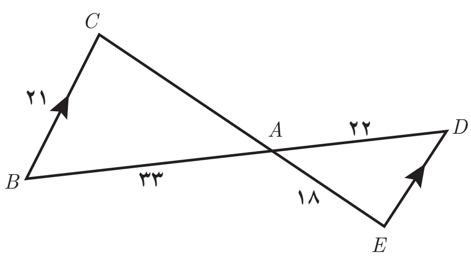
قضیه ۲ : هرگاه اندازه‌های دو ضلع از مثلثی با اندازه‌های دو ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند و زاویهٔ بین آنها برابر باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

$$\left(\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}, \hat{A}=\hat{A}' \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}\right)$$

قضیه ۳ : هرگاه اندازه‌های سه ضلع از مثلثی با اندازه‌های سه ضلع از مثلث دیگر متناسب باشند، دو مثلث متشابه‌اند.

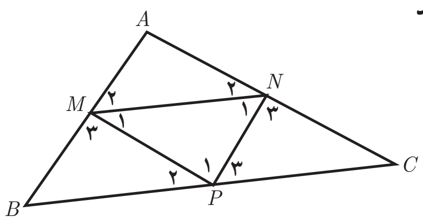
$$\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABC} \sim \overset{\Delta}{A'B'C'}$$

کار در کلاس



۱ درشکل مقابل $BC \| DE$.

اندازهٔ پاره خط‌های DE و CA را به دست آورید.



۲ اگر نقاط P و N و M مطابق شکل وسط‌های اضلاع مثلث ABC باشند، ثابت کنید مثلث‌های ABC و MNP متشابه‌اند.

حل :

الف) $MN \| BC$ و $NP \| AB$ و $MP \| AC$ چرا؟

ب) بنابراین $\hat{M}_1=\hat{P}_2=\hat{C}$ و $\hat{N}_1=\hat{P}_3=\hat{B}$ (چرا؟)

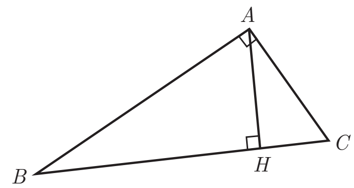
از (ب) دربارهٔ مثلث‌های مورد نظر چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

۳ اگر سه مثلث ABC و $A'B'C'$ و $A''B''C''$ به گونه‌ای باشند که $A\overset{\Delta}{B}C \sim A'\overset{\Delta}{B'}C'$ و $A'\overset{\Delta}{B'}C' \sim A''\overset{\Delta}{B''}C''$ ، دربارهٔ دو مثلث ABC و $A''B''C''$ چه می‌توان گفت؟ چرا؟

برخی روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه:

فعالیت

فرض کنید مثلث ABC مانند شکل یک مثلث قائم‌الزاویه و AH ارتفاع وارد بر وتر آن باشد.



۱ نشان دهید دو زاویه از مثلث AHC با دو زاویه از مثلث ABC برابرند و نتیجه بگیرید :

$$A\overset{\Delta}{B}C \sim A\overset{\Delta}{H}C$$

۲ نشان دهید دو زاویهٔ مثلث AHB با دو زاویه از مثلث ABC برابر است و نتیجه بگیرید :

$$A\overset{\Delta}{B}C \sim A\overset{\Delta}{H}B$$

۳ از (۱) و(۲) دربارهٔ مثلث های AHC و AHB چه نتیجه‌ای می گیرید؟

نتیجه : در هر مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع وارد بر وتر، دو مثلث قائم‌الزاویه به وجود می‌آورد که این دو مثلث با هم و با مثلث اصلی متشابه‌اند.

۴ $A\overset{\Delta}{B}C \sim A\overset{\Delta}{H}C \Rightarrow \frac{AH}{\dots} = \frac{AC}{\dots} = \frac{HC}{\dots} \Rightarrow AC^{۲} = \dots \times \dots$

۵ $A\overset{\Delta}{B}C \sim A\overset{\Delta}{H}B \Rightarrow \frac{AH}{\dots} = \frac{AB}{\dots} = \frac{HB}{\dots} \Rightarrow AB^{۲} = \dots \times \dots$

۶ $A\overset{\Delta}{H}B \sim A\overset{\Delta}{H}C \Rightarrow \frac{AH}{\dots} = \frac{AC}{\dots} = \frac{HC}{\dots} \Rightarrow AH^{۲} = \dots \times \dots$

۷ با جمع طرفین روابط ۴ و ۵ رابطهٔ فیثاغورس را برای مثلث ABC نتیجه بگیرید.

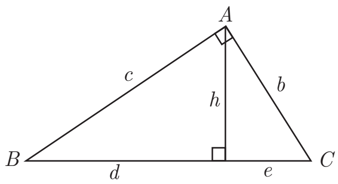
$BC^{۲} = \dots\dots + \dots\dots$

۸ مساحت مثلث ABC را به دو طریق محاسبه و با توجه به آن تساوی زیر را کامل کنید.

$AB \times \dots\dots = AH \times \dots\dots$

کار در کلاس

درمثلث قائم‌الزاویهٔ مقابل در هر مورد سعی کنید با ساده‌ترین روش مقادیر خواسته شده را به دست آورید.



۱ $h=۵$ $\quad d=۷$ $\quad e=?$

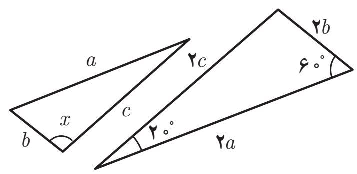
۲ $d=۵$ $\quad e=۳$ $\quad b=?$ $\quad c=?$

۳ $c=۸$ $\quad b=۶$ $\quad h=?$

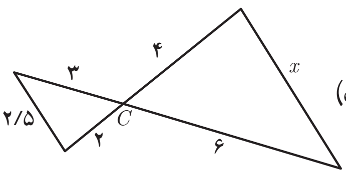
تمرین

۱ در هر قسمت تشابه مثلث‌ها را ثابت کنید و مقادیر x و y را مشخص نمایید.

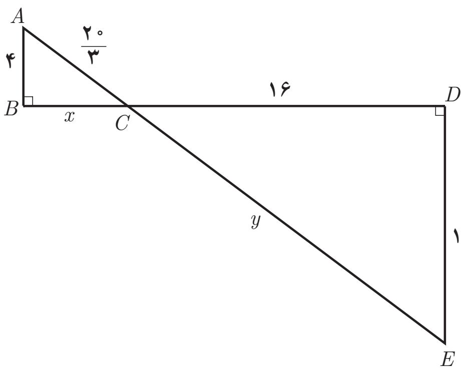
الف)



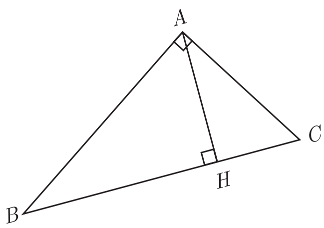
ب)



پ)



۲ در مثلث قائم‌الزاویهٔ روبه‌رو در هر حالت، اندازه پاره‌خط خواسته شده را به‌دست آورید.



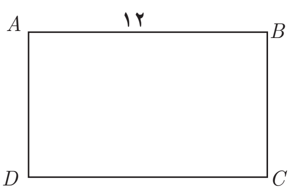
الف) $BC=۱۰$ و $BH=۹$ و $AH=?$ و $AB=?$ و $AC=?$

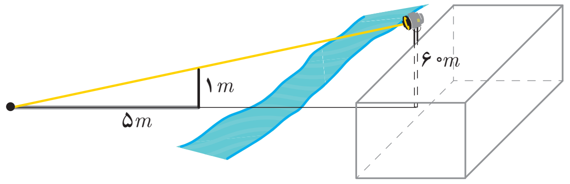
ب) $AC=۵$ و $CH=۲$ و $BC=?$ و $AH=?$ و $AB=?$

پ) $AB=۸$ و $AC=۶$ و $BC=?$ و $AH=?$

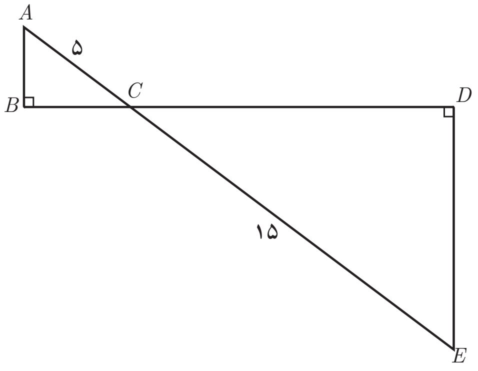
ت) $AB=۱۲$ و $AH=۶$ و $BH=?$ و $BC=?$ و $AC=?$

۳ شکل مقابل مستطیلی به طول ۱۲ است. اگر از نقطهٔ A عمودی بر قطر BD رسم کنیم و پای این عمود را H بنامیم، طول BH برابر ۱۱ است. اندازهٔ عمود رسم شده، طول قطر مستطیل و اندازهٔ عرض مستطیل را محاسبه کنید.





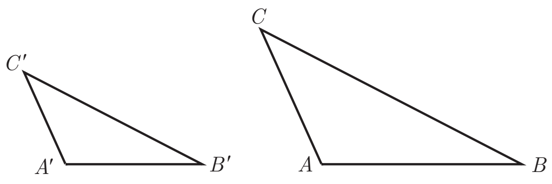
۴ بر دیوار یک کمپ نظامی نورافکنی به ارتفاع ۶۰ متر (مانند شکل) قرار گرفته است. فردی که در طرف دیگر رودخانه است، می‌خواهد فاصلهٔ خود را تا پایهٔ نورافکن محاسبه کند. برای این کار چوبی به طول یک متر را روی زمین قرار می‌دهد و مشاهده می‌کند که طول سایهٔ چوب برابر ۵ متر است. فاصلهٔ این مرد تا پای نورافکن چقدر است؟



۵ در شکل مقابل دو مثلث قائم‌الزاویه مشاهده می‌کنید. نسبت محیط‌ها و مساحت‌های آنها را به‌دست آورید.

۶ دو مثلث متشابه ABC و $A'B'C'$ را با نسبت تشابه K در نظر بگیرید؛ به گونه‌ای که $\frac{AB}{A'B'}=\frac{AC}{A'C'}=\frac{BC}{B'C'}=K$ باشد. حال ارتفاع‌های AH و $A'H'$ را در دو مثلث رسم کنید.

الف) ثابت کنید مثلث‌های AHB و $A'H'B'$ متشابه‌اند.



ب) نسبت $\frac{AH}{A'H'}$ را به‌دست آورید.

پ) نسبت مساحت‌های $\frac{S_{ABC}}{S_{A'B'C'}}$ را محاسبه کنید.

ت) نسبت محیط‌های دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را به‌دست آورید.

فصل

۳ تابع

بندر سیراف، شهر باستانی استان بوشهر یکی از مکان‌های تاریخی و از نقاط دیدنی ایران است که زمانی دارای رونق چشمگیری بوده و در آن زمان با سیصد هزار نفر جمعیت، روابط تجاری زیادی با روم و یونان (در اروپا) و ماداگاسکار(در آفریقا)، هند و چین (در آسیا) داشته است. با این همه زمین‌لرزهٔ شدیدی در قرن چهارم هجری قمری ویران شدن کامل این بندر را در پی داشت.

درس اوّل **آشنایی با برخی از انواع توابع**

درس دوم **وارون یک تابع و تابع یک به یک**

درس سوم **اعمال جبری روی توابع**

درس اوّل

آشنایی با برخی از انواع توابع

در سال گذشته با مفهوم تابع آشنا شدیم. به دستور یا قانون بیانگر تابع، **ضابطهٔ** آن تابع گفته می‌شود. برای مشخص کردن یک تابع، باید **دامنهٔ** تابع و **ضابطهٔ** آن را داشته باشیم. بنا به قرارداد، اگر ضابطهٔ تابعی داده شده باشد، اما دامنهٔ آن صریحاً گفته نشده باشد، بزرگ‌ترین مجموعه‌ای که آن تابع در آن قابل تعریف است، به عنوان دامنه در نظر گرفته می‌شود.

توابع گویا

فعالیت

حسین در پایهٔ یازدهم درس می‌خواند. او در روستای کوچکی زندگی می‌کند که در چند کیلومتری یکی از جاده‌های پرتردد ایران قرار دارد. مردم این روستا تا چند سال پیش به کشاورزی و باغداری مشغول بودند، اما چند سالی است که به دلیل کم‌آبی، کشاورزی رونقی ندارد و در نتیجه مردم این روستا درآمد کافی ندارند. حسین تصمیم گرفت این وضع را تغییر دهد. برای این منظور با خود اندیشید که باید فضای روستا را زیباتر کند و با تبلیغاتی مناسب، بخشی از افرادی که قصد گردشگری دارند و معمولاً از جادهٔ اصلی کنار روستا می‌گذرند را به روستای خود جلب کند. او با خود فکر کرد این گردشگران بابت پذیرایی محلی و تجربهٔ خوشایند یک زندگی روستایی، هزینه خواهند پرداخت و به این ترتیب چرخهٔ اقتصادی مردم روستا پر رونق خواهد شد.

پس از چند هفته تحقیق و پرس و جو، حسین به این نتیجه رسید که برای شروع کار به حدوداً ده میلیون تومان نیاز دارد که البته او به تنهایی این پول را نداشت. برای همین، تصمیم گرفت ابتکار خود را با دیگران مطرح کند و از آنها هم برای این کار مفید یاری بخواهد. به این ترتیب افراد روستا می‌توانستند با سرمایه‌گذاری به نسبت مساوی در راه‌اندازی این کار اقتصادی سهیم شوند.

۱ الف) اگر حسین تنها شخص شرکت کننده در این طرح بود، او به تنهایی می‌بایست $\frac{۱}{۱}$ از ده میلیون تومان را بپردازد، اما اگر یک داوطلب دیگر هم پیدا می‌شد، هر کدام باید $\frac{۱}{۲}$ از ده میلیون تومان را بپردازند. جدول زیر را کامل کنید.

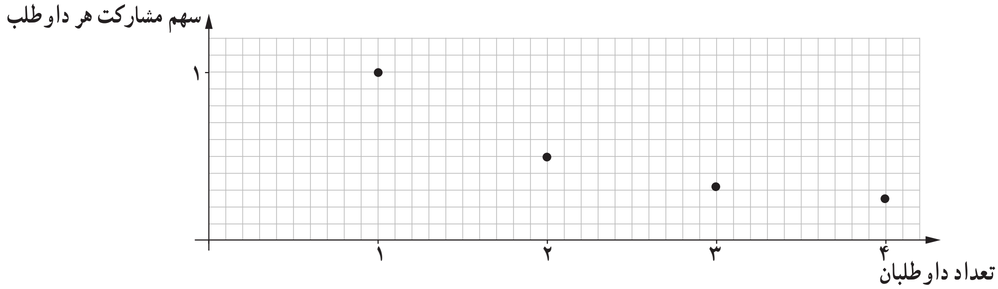
تعداد افراد داوطلب	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
سهم مشارکت هر داوطلب	$\frac{۱}{۱}$	$\frac{۱}{۲}$	$\frac{۱}{۳}$	$\frac{۱}{۴}$						

ب) اگر تعداد داوطلبانی که می‌خواهند در این کار اقتصادی شرکت کنند، n نفر باشد، سهم مشارکت هر نفر چقدر خواهد شد؟

پ) رابطهٔ بین تعداد افراد داوطلب و سهم مشارکت آنها یک تابع است. ضابطهٔ این تابع چیست؟ $f(x)=\frac{....}{....}$

۲ در شکل زیر، بخشی از نمودار تابع سهم مشارکت رسم شده است. با انتخاب گزینهٔ مناسب در عبارت زیر، تعیین کنید که این نمودار چه چیزی را نشان می‌دهد؟

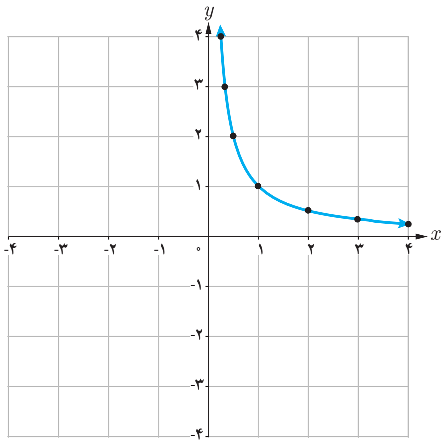
«با افزایش تعداد داوطلبان، سهم مشارکت هر داوطلب کاهش ☐ افزایش ☐ می‌یابد».

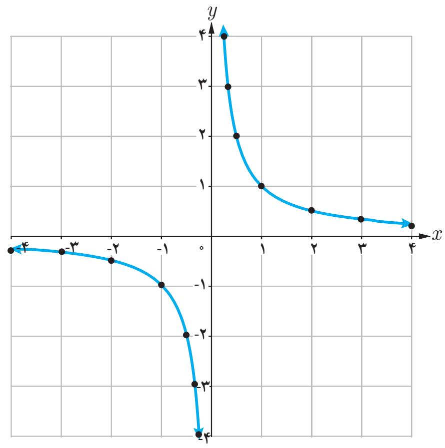


فعالیت

در نمودارهای زیر تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{x}$ با دو دامنهٔ متفاوت رسم شده است. مشخص کنید که هر کدام از این نمودارها مربوط به کدام دامنه است؟

الف) $D_f=(۰,+\infty)$ ب) $D_f=\mathbb{R}-\{۰\}$





هر تابع به شکل $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ را یک تابع گویا می‌نامیم، که در آن $Q(x)$, $P(x)$ چند جمله‌ای هستند و چند جمله‌ای $Q(x)$ صفر نیست.

تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{x}$ و همچنین توابع زیر نمونه‌هایی از توابع گویا هستند.

$$f(x)=\frac{x+۳}{x-۱۰} \qquad f(x)=\frac{x}{x+۵}$$

$$f(x)=۲ \qquad f(x)=\sqrt{۵}x$$

خواندنی

هزینهٔ پاک‌سازی x درصد از آلودگی‌های شهری و صنعتی رودخانه‌ای با تابع با ضابطهٔ $p(x)=\frac{۲۵۵x}{۱۰۰-x}$ محاسبه می‌شود که در آن x درصد آلودگی و $p(x)$ هزینهٔ پاک‌سازی بر حسب میلیون تومان است.

الف) جدول زیر را کامل کنید.

ب) با یک میلیارد تومان چه درصدی از آلودگی‌های این رودخانه پاک‌سازی خواهد شد؟

پ) چرا هیچ‌گاه ۱۰۰ درصد از آلودگی‌های این رودخانه پاک‌سازی نمی‌شود؟

x	۱۰	۳۰	۵۰	۷۰	۹۰
$p(x)$					

کار در کلاس

یکی از معیارهای بررسی موفقیت یک بازیکن بسکتبال، بررسی «عملکرد پرتاب‌های آزاد» اوست. به این منظور، نسبت پرتاب‌های آزاد موفق هر بازیکن را به همهٔ پرتاب‌های آزاد حساب می کنند. وحیده که عضو تیم بسکتبال مدرسه است، یک بازیکن موفق است، زیرا در مسابقات امسال، تا امروز، از ۱۰ پرتاب آزاد، ۷ پرتاب او موفق بوده است. بنابراین ۷۰ درصد پرتاب‌های آزاد او موفق بوده است. او دوست دارد عملکردش بهتر از این باشد.

الف) اگر تا پایان مسابقات همهٔ پرتاب‌های آزاد وحیده موفق باشد، ضابطهٔ تابع عملکرد پرتاب‌های آزاد او به کدام صورت زیر است؟

$$f(x)=\frac{۷+x}{۱۰+x} \qquad f(x)=\frac{x}{۰/۷+x} \qquad f(x)=x+۰/۷$$

ب) آیا تابع عملکرد پرتاب‌های آزاد وحیده، یک تابع گویاست؟

پ) توضیح دهید که پس از چند پرتاب آزاد موفق پیاپیِ دیگر، درصد موفقیت عملکرد وحیده ۸۰ درصد خواهد شد؟

$f(x)=\frac{۸۰}{۱۰۰} \rightarrow$ ....

دامنهٔ توابع گویا

از سال‌های گذشته می‌دانیم مخرج هیچ کسری نمی‌تواند صفر باشد؛ بنابراین عدد صفر در دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=\frac{۱}{x}$ نیست. به‌طورکلی اعدادی که مخرج کسر مربوط به ضابطهٔ یک تابع گویا را صفر کنند،عضو دامنهٔ آن تابع نیستند. به عنوان مثال، دامنهٔ تابع گویای با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۵}{x-۲}$ برابر $\mathbb{R}-\{۲\}$ است.

کار در کلاس

دامنهٔ هر یک از توابع گویای داده شده را به دست آورید.

$f(x)=\frac{x}{x+۵}$	$D_f=$	$g(x)=\frac{۳}{x-۴}$	$D_g=$

تساوی دو تابع

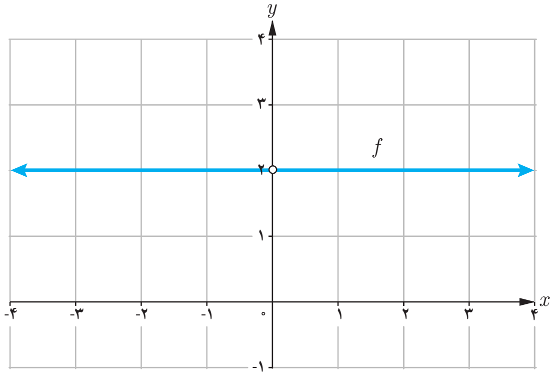
دو تابع f و g را برابر نامیم هرگاه :

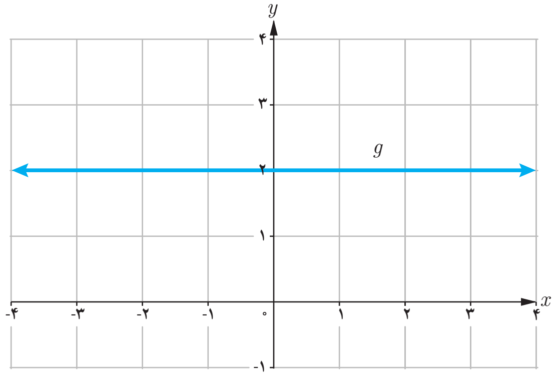
الف) دامنهٔ f و دامنهٔ g با هم برابر باشند.

ب) برای هر x از این دامنه یکسان داشته باشیم : $f(x)=g(x)$

بنابراین در صورت رسم نمودارهای دو تابع مساوی در یک دستگاه مختصات، باید نمودارهای آنها دقیقاً بر هم منطبق شوند.

به نمودار دو تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۲x}{x}$ و $g(x)=۲$ دقت کنید.





می‌بینیم که نمودارهای این دو تابع کاملاً بر هم منطبق نیستند. در واقع با اینکه ضابطهٔ دو تابع شبیه هم هستند و در صورت ساده شدن x، ضابطه‌های دو تابع برابر می‌شوند ولی دامنهٔ دو تابع با هم متفاوت‌اند، زیرا داریم :

$$D_f=\mathbb{R}-\{۰\} \qquad\qquad D_g=\mathbb{R}$$

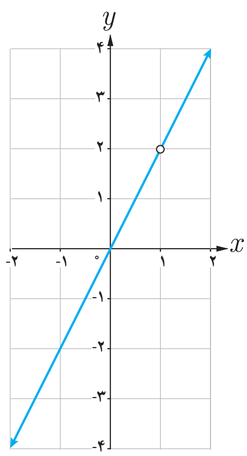
در نتیجه این دو تابع با هم برابر نیستند.

تذکر : همواره دامنهٔ تابع را قبل از ساده کردن ضابطهٔ آن محاسبه می کنیم.

کار در کلاس

۱ آیا دو تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^۲}{x}$ و $g(x)=x$ با هم برابرند؟ چرا؟

۲ نمودار مقابل مربوط به کدام‌یک از توابع زیر است؟ مسئله چند جواب دارد؟



الف) $D_g=\mathbb{R}$ $\qquad g(x)=۲x$

ب) $D_g=\mathbb{R}-\{۲\}$ $\qquad g(x)=۲x$

پ) $D_g=\mathbb{R}-\{۱\}$ $\qquad g(x)=۲x$

ت) $D_g=\mathbb{R}-\{۱\}$ $\qquad g(x)=\frac{۲x^۲-۲x}{x-۱}$

ث) $D_g=\mathbb{R}-\{۲\}$ $\qquad g(x)=\frac{۲x^۲-۴x}{x-۲}$

توابع رادیکالی

فعالیت

بر اساس مشاهدات دانشمندان، اگر S تندی جابه‌جایی یک سونامی بر حسب کیلومتر بر ساعت باشد، می‌توان آن را از رابطهٔ $S = ۳۵۶\sqrt{d}$ محاسبه کرد که در آن d میانگین عمق دریا بر حسب کیلومتر است.

الف) جدول زیر را کامل کنید. $(\sqrt{۳} \simeq ۱/۷ \;,\; \sqrt{۲} \simeq ۱/۴)$

d	۱	۲	۳	۴
$S = ۳۵۶\sqrt{d}$		۴۹۸/۴		

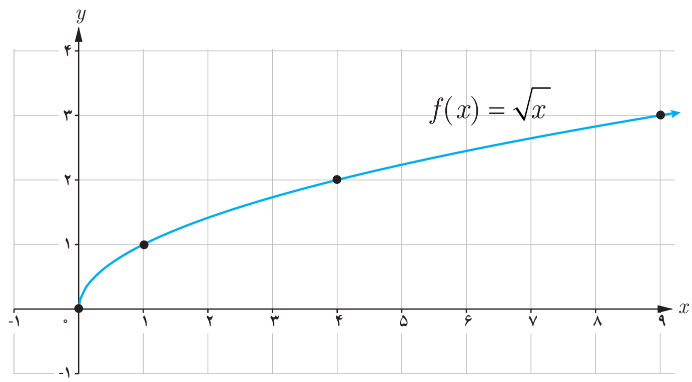
ب) عبارت زیر را کامل کنید.

چون هر عدد، تنها .... ریشهٔ دوم مثبت دارد، پس رابطهٔ سونامی یک تابع ....

پ) کدام‌یک از اعداد ۵− و ۵ عضو دامنهٔ تابع سونامی است؟

مطالعهٔ **توابع رادیکالی** مانند $S = ۳۵۶\sqrt{d}$ به‌دلیل نقش کاربردی آنهاست. در این کتاب با برخی از توابع رادیکالی آشنا می‌شویم. همان‌طور که هنگام کار با تابع رادیکالی سونامی دیدید، دامنهٔ این نوع توابع ممکن است همهٔ اعداد حقیقی نباشد.

ساده‌ترین تابع رادیکالی تابع با ضابطهٔ $f(x) = \sqrt{x}$ است. دامنهٔ این تابع مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی نامنفی و نمودار آن به‌صورت زیر است.



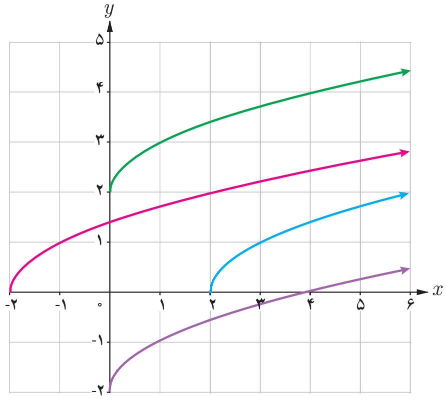
خواندنی

سونامی (آب‌لرزه) به لرزش شدید آب دریا گفته می‌شود. این اتفاق ممکن است در پی زمین‌لرزه‌های زیر دریا، لغزیدن صخره، انفجار آتشفشانی و یا هر حادثهٔ دیگری که انرژی زیادی در دریا آزاد می‌کند، رخ دهد. آبی که به لرزه درآمده است، به‌شکل موج‌های عظیم به کرانه‌ها می‌رسد و ویرانی به بار می‌آورد. سونامی زمانی شروع می‌شود که حجم عظیمی از آب، به سرعت مرتفع شود. تندی موج‌های سونامی بسته به محل رویداد، ممکن است به بیش از ۸۰۰ کیلومتر در ساعت برسد!

یکی از بزرگ‌ترین سونامی‌ها در سال ۱۳۸۳ در نزدیکی سوماترای اندونزی روی داد و باعث ویرانی عظیمی شد و حدود ۲۰۰ هزار نفر را به کام مرگ کشانید.

در کتاب‌های تاریخ ادعا شده است که قسمت بزرگی از بندر باستانی سیراف ناگهان بر اثر زمین‌لرزه‌ای به زیر آب رفته است. پاسخ دقیق این سؤال را که «آیا یک سونامی سیراف را ویران کرده و به زیر آب برده است؟» باید با کمک پژوهش‌های باستان‌شناسی و زمین‌شناسی یافت. با توجه به اینکه میانگین عمق خلیج فارس حدود ۵۰ متر است، نظر شما چیست؟

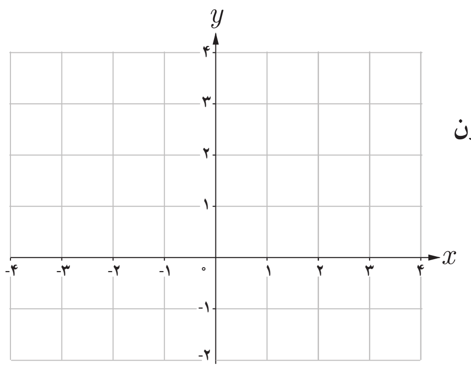
فعالیت



۱ در شکل مقابل با کمک انتقال نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ ، نمودار مربوط به هر یک از توابع زیر رسم شده است. مشخص کنید که هر نمودار، مربوط به کدام تابع است. سپس دامنهٔ آنها را تعیین کنید.

الف) $g(x)=\sqrt{x-۲}$ $D_g=$ ....　　ب) $h(x)=\sqrt{x}+۲$ $D_h=$ ....

پ) $k(x)=\sqrt{x+۲}$ $D_k=$ ....　　ت) $l(x)=\sqrt{x}-۲$ $D_l=$ ....



۲ نمودار تابع با ضابطهٔ $y=-۲+\sqrt{x+۳}$ را رسم کنید.
با توجه به شکل می‌بینید که دامنهٔ این تابع $[-۳$ و $+\infty)$ است. چگونه می‌توان بدون استفاده از نمودار تابع و تنها با توجه به ضابطهٔ آن، دامنهٔ تابع را تعیین کرد؟

۳ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{۳x-۶}$ را درنظر بگیرید.

الف) مقادیر $f(۱), f(۲)$ و $f(۳)$ را درصورت وجود بیابید.

ب) آیا می‌توان گفت دامنه این تابع همانند تابع $f(x)=\sqrt{x}$ ، اعداد نامنفی است؟ چرا؟

پ) می‌دانیم برای بامعنی بودن هر رادیکال با فرجه زوج، عبارت زیر رادیکال باید نامنفی باشد. بنابراین برای معلوم کردن دامنه تابع $f(x)=\sqrt{۳x-۶}$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم :

$$۳x-۶\geq ۰ \Rightarrow ۳x\geq ... \Rightarrow x\geq ...$$

دامنه تابع f بازه .... است.

۴ دامنهٔ تابع باضابطهٔ $f(x)=\sqrt{-x^۲+۱}$ ، به‌صورت $[-۱،۱]$ است. در مورد آن با دوستان خود بحث کنید.

۵ دامنهٔ تابع باضابطهٔ $g(x)=\sqrt{x^۲-۴}$ را به‌دست آورید.

توابع پله‌ای و تابع جزء صحیح

فعالیت

هزینهٔ پارکینگ خودرو

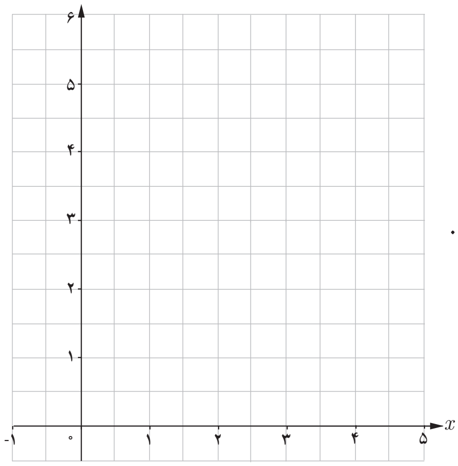
در یک پارکینگ، هزینهٔ پارک خودرو به این صورت محاسبه می‌شود :

زمان		هزینه (هزار تومان)
از هنگام ورود	تا کمتر از ۲ ساعت	۳
از ۲ ساعت	تا ۲/۵ ساعت	۴
از بیشتر از ۲/۵ ساعت	تا کمتر از ۳ ساعت	۵
از ۳ ساعت	تا ۵ ساعت	۶

الف) ضابطهٔ تابع هزینهٔ پارکینگ خودرو چیست؟

$$f(x)=\begin{cases} ۳ & ۰ \le x < ۲ \\ ۴ & ۲ \le x \le \cdots \\ ۵ & \cdots\cdots\cdots \\ ۶ & \cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

ب) نمودار این تابع را رسم کنید.

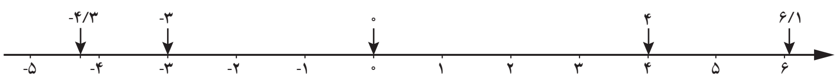


به توابعی مانند تابع هزینهٔ پارکینگ، **توابع پله‌ای** می‌گویند. توابع پله‌ای در تجارت یا خرید و فروش نقش تعیین کننده‌ای دارند. مشهورترین تابع پله‌ای، **تابع جزء صحیح** است.

> تابع جزء صحیح به هر عدد صحیح، خود همان عدد صحیح را نسبت می‌دهد و به هر عدد غیرصحیح، بزرگ‌ترین عدد صحیح کوچک‌تر از آن عدد را نسبت می‌دهد.
> ضابطهٔ این تابع به صورت $f(x)=[x]$ نشان داده می‌شود.

برای مثال داریم :

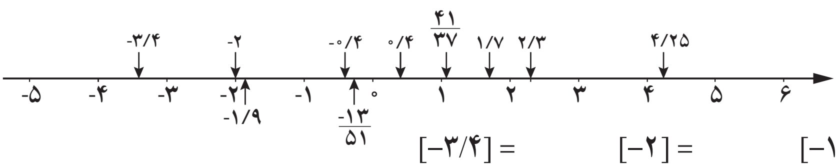
[−۳]= −۳　　[−۴/۳]= −۵　　[۰]=۰　　[۶/۱]=۶　　[۴]=۴



همان‌طور که در مثال دیدیم، جزء صحیح هر عدد غیر صحیح، برابر است با اولین عدد صحیح سمت چپ آن روی محور اعداد.

کار در کلاس

۱ جزء صحیح اعداد زیر را به‌دست آورید و در صورت نیاز از محور اعداد، استفاده کنید.



[−۰/۴] =　　[۰/۴] =　　[−۱/۹] =　　[−۲] =　　[−۳/۴] =

$\left[-\frac{۱۳}{۵۱}\right] =$　　[۱/۷] =　　[۲/۳] =　　$\left[\frac{۴۱}{۳۷}\right] =$　　[۴/۲۵] =

۲ حاصل $[\sqrt{۱۰}]+\ldots+[\sqrt{۳}]+[\sqrt{۲}]+[۱]$ را به‌دست آورید.

۳ حاصل $[۳x]+[۲x]+[x]$ را به ازای $x=-\frac{۵}{۳}$ به‌دست آورید.

کار در کلاس

۱ معادلات مقابل را حل کنید. ب) $[۲x+۳]=-۱$ الف) $[x-۱]=۲$

۲ جاهای خالی را در جدول مقابل پرکنید و به کمک آن ضابطهٔ تابع زیر را تکمیل کنید. آیا می‌توان گفت تابع زیر یک تابع پله‌ای است؟

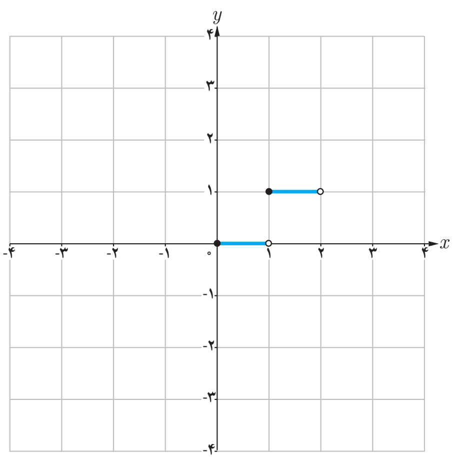
x	$-x$	$[x]$	$[-x]$	$[x]+[-x]$
۱				
-۲				
۳/۲				
$\frac{۱}{۲}$				
$\sqrt{۲}$				
۰				
...				

$$[x]+[-x]=\begin{cases} ۰ & x\in\mathbb{Z} \\ \ldots\ldots & x\notin\mathbb{Z}\end{cases}$$

فعالیت

۱ اگر $[x]=۲$، آنگاه x برابر چه اعدادی می‌تواند باشد؟ مجموعه جواب را به‌صورت بازه بنویسید.

۲ برای رسم نمودار یک تابع جزء صحیح باید توجه کنیم که اعداد هر بازه‌ای از دامنه، به چه عددی نسبت داده می‌شود. برای مثال اگر $۰\le x<۱$، آنگاه $[x]=۰$؛ پس مقدار تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x]$ برای همهٔ اعداد عضو بازهٔ $[۰,۱)$ برابر صفر می‌شود. در شکل مقابل بخشی از نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x]$ رسم شده است. نمودار این تابع را در بازهٔ $[-۴,۴)$ تکمیل کنید.



۳ الف) به دلخواه نقطه‌ای مانند a را روی محور اعداد داده شده مشخص کنید.

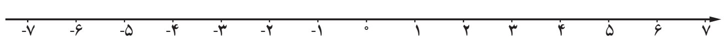
ب) نقطهٔ $a+۳$ را روی این محور مشخص کنید.

پ) نقاط $[a]$ و $[a+۳]$ را روی محور مشخص کنید.

ت) چه رابطه‌ای بین $[a]$ و $[a+۳]$ برقرار است؟ $[a+۳]=[a]+\cdots$

ث) چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

«اگر a عددی حقیقی و n عددی صحیح باشد، آنگاه $[a+n]=[a]+\cdots$ »



تمرین

۱ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{۱}{x}$ و با دامنهٔ $D_f=[-۵,۵]-\{۰\}$ را رسم کنید.

۲ دامنهٔ تابع گویای با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x+۳}{x-۳}$ را به‌دست آورید.

۳ در هر مورد آیا دو تابع داده شده با هم برابرند؟

الف) $f(x)=\begin{cases}-۱ & x<۰\\ ۱ & x>۰\end{cases}$, $g(x)=\frac{|x|}{x}$ ب) $f(x)=x-۲$, $g(x)=\frac{x^۲-۴}{x+۲}$

۴ تابعی گویا بنویسید که دامنه‌اش برابر $\mathbb{R}-\{-۱\}$ شود. پاسخ خود را با جواب دوستانتان مقایسه کنید.

۵ ابتدا دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $g(x)=-۳+\sqrt{x-۴}$ را به‌دست آورده، سپس نمودار آن را رسم کنید.

۶ دامنهٔ توابع مقابل را به‌دست آورید: پ) $t(x)=\sqrt{x^۲-x}$ ب) $k(x)=\sqrt{۱-۴x}$ الف) $h(x)=\sqrt{۲x}+۱$

۷ حاصل عبارت‌های مقابل را حساب کنید. $[-۲۳۰۹/۵۴]$ $[-۱۰۳/۰۰۳]$ $[۳۰۰/۴۰۰۲]$

۸ تابع پله‌ای روبه‌رو را رسم کنید.

$$f(x)=\begin{cases}۳ & x\in[۰,۱)\\ ۰ & x\in[۱,۵]\\ ۲ & x\in(۶,۷]\end{cases}$$

۹ تابع با ضابطهٔ $f(x)=[x]+۲$ و دامنهٔ $D_f=[-۳,۳)$ را رسم کنید.

خواندنی

تابع $f(x)=۷\sqrt{x}+۵۰$ به‌طور تقریبی قد متوسط کودکان[۱] را برحسب سانتی‌متر تا حدود ۶۰ ماهگی نشان می‌دهد. در این تابع x نشان‌دهندهٔ ماه‌های پس از تولد است.

قد متوسط یک کودک ۹ ماهه تقریباً چقدر است؟

در چه سنی قد متوسط یک کودک تقریباً یک متر می‌شود؟

۱ــ کودکان حاضر در تصویر، فرزندان شهدای مدافع حرم هستند.

درس دوم

وارون یک تابع و تابع یک‌به‌یک

وارون یک تابع

کار در کلاس

الف) هر مایل تقریباً ۱/۶ کیلومتر است. تعیین کنید که هر یک از جملات سمت راست مربوط به کدام‌یک از رابطه‌های سمت چپ است.

این رابطه برای تبدیل تقریبی «مایل» به «کیلومتر» است. $f(x)=\frac{۸}{۵}x$

این رابطه برای تبدیل تقریبی «کیلومتر» به «مایل» است. $g(x)=\frac{۵}{۸}x$

ب) تندی ۳۰ مایل بر ساعت تقریباً معادل تندی چند کیلومتر بر ساعت است؟

هر تابع با ضابطهٔ $y=f(x)$ بیان می‌کند که متغیر y چه ارتباطی با متغیر x دارد و چگونه می‌توان با در دست داشتن مقدار x، مقدار y را به‌دست آورد. اما گاهی مهم است که بدانیم چگونه می‌توان از مقدار y به مقدار x رسید. تبدیل یکای اندازه‌گیری نمونه‌ای ساده از این حالت است.

به خاطر دارید که یک تابع را می‌توان با مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نشان داد.

با جابه‌جا کردن مؤلفه‌های زوج مرتب (a,b) می‌توان زوج مرتب (b,a) را به‌دست آورد. حال اگر مؤلفه‌های همهٔ زوج‌های مرتب تابع f را جابه‌جا کنیم، رابطهٔ جدیدی به دست می‌آید که آن را **وارون** تابع f می‌گوییم و با $f^{-۱}$ نشان می‌دهیم.

برای مثال وارون تابع $f=\{(۶,۴), (۵,۳), (۲,۱)\}$ برابر با $f^{-۱}=\{(۴,۶), (۳,۵), (۱,۲)\}$ است.

کار در کلاس

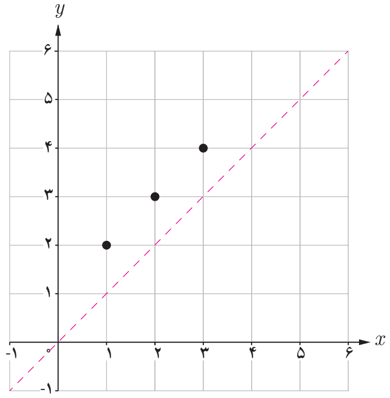
وارون تابع‌های داده شده را حساب کنید.

$s^{-۱}=$	$s=\{(۴,۱), (۱,۴), (۳,۳), (۲,۵)\}$
$t^{-۱}=$	$t=\{(۵,۱), (۱,۴), (۴,۳), (۲,۳)\}$
$u^{-۱}=$	$u=\{(۲,۳), (۵,۲), (۴,۱), (۳,۴)\}$

خواندنی

سال‌هاست که ریاضی‌دانان، با کمک داده‌های آماری جمعیت، تلاش می‌کنند به تابع تخمین جمعیت دست یابند و در این زمینه به نتایجی هم رسیده‌اند. این تابع نشان می‌دهد که مثلاً در سال ۱۴۲۰ جمعیت ایران چه تعداد خواهد بود. با این همه، در عمل معمولاً وارون این تابع نیز اهمیت دارد؛ به عنوان مثال مهم است که مشخص کنیم در چه سالی جمعیت ایران به ۱۰۰ میلیون نفر خواهد رسید. در فصل پنجم با نمونه‌ای از توابع تخمین جمعیت آشنا خواهید شد.

فعالیت



۱ در دستگاه مختصات داده شده نمودار تابع f رسم شده است.

الف) تابع f را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهید.

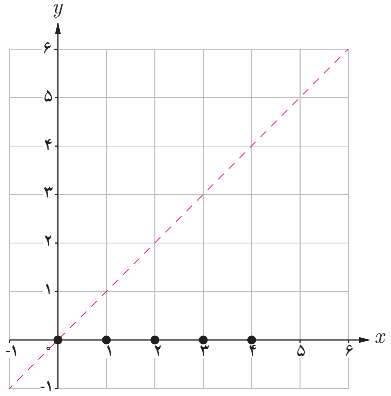
ب) تابع f^{-1} را به‌صورت مجموعه‌ای از زوج‌های مرتب نمایش دهید.

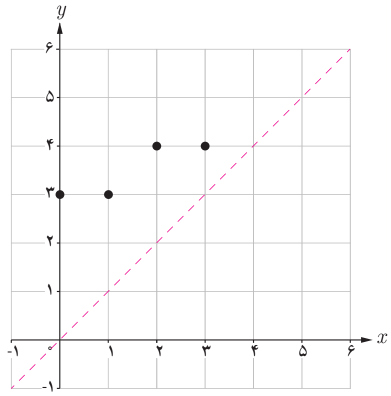
پ) در همین دستگاه مختصات، نمودار f^{-1} را رسم کنید.

ت) نمودار f و f^{-1} چه ارتباطی با هم دارند؟

«نمودار f و f^{-1} نسبت به .... قرینهٔ یکدیگرند».

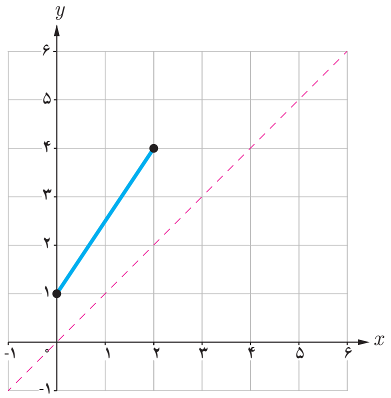
۲ الف) در هر مورد بیان کنید چرا نمودار داده شده معرف یک تابع است و سپس وارون آن را رسم کنید.





ب) عبارت زیر را کامل کنید.

برای رسم نمودار وارون یک تابع کافی است قرینهٔ نمودار آن تابع را نسبت به .... رسم کنیم.

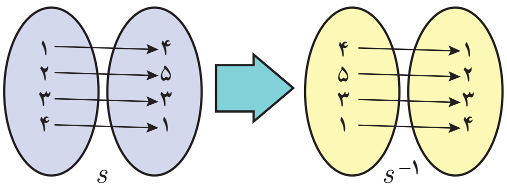


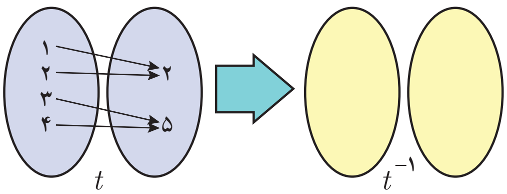
۳ نمودار وارون تابع داده شده را رسم کنید.

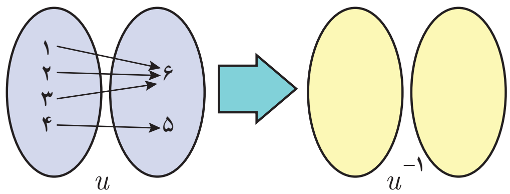
تابع یک به یک

فعالیت

۱ الف) به نمونهٔ داده شده دقت کنید. با کمک نمودار پیکانی، وارون توابع داده شده را به‌دست آورید.







ب) در جدول مقابل گزینه‌های درست را انتخاب کنید.

s^{-1} یک تابع است.	بله☐ خیر☐
t^{-1} یک تابع است.	بله☐ خیر☐
u^{-1} یک تابع است.	بله☐ خیر☐

پ) عبارت زیر را کامل کنید.

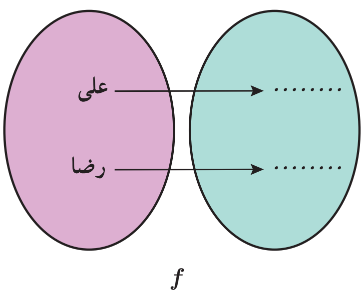
وارون تابع f، خود یک تابع است؛ هرگاه در زوج‌های مرتب متفاوت تابع f مؤلفه‌های .... تکراری وجود نداشته باشد.

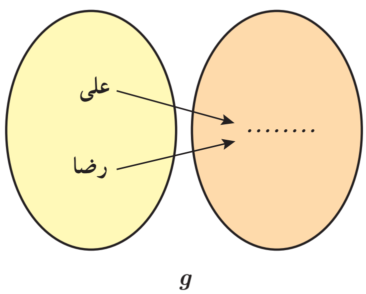
> به تابعی که در زوج‌های مرتب متفاوت خود، مؤلفه‌های دوم تکراری نداشته باشد، تابع **یک‌به‌یک** می‌گوییم.

تذکر : وارون هر تابع یک‌به‌یک، خود یک تابع است.

ت) تابعِ $f=\{(1,2),(-2,4),(2,-1),(-1,2)\}$ را در نظر بگیرید. تعیین کنید که این تابع یک‌به‌یک است یا خیر؟

۲ نمودارهای پیکانی زیر بیانگر تابع اثر انگشت و تابع گروه خونی علی و رضا است.





الف) مشخص کنید که کدام نمودار پیکانی مربوط به اثر انگشت و کدام نمودار پیکانی مربوط به گروه خونی است.

ب) آیا f و g هر دو تابع‌اند؟

پ) در مورد تابع بودن f^{-1} و g^{-1} چه می‌توان گفت؟

ت) کدام‌یک از دو تابع f و g یک‌به‌یک هستند؟

ث) عبارت‌های زیر را کامل کنید.

با دانستن گروه خونی یک انسان، هویت او به‌طور یکتا تعیین ....

با دانستن اثر انگشت یک انسان، هویت او به‌طور یکتا تعیین ....

خواندنی

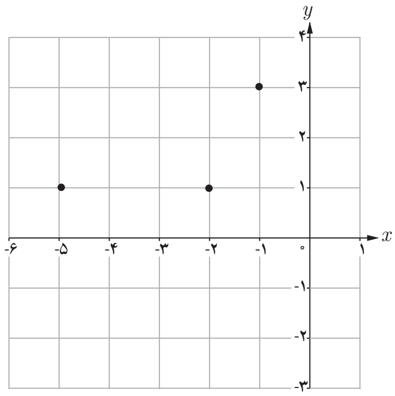
قرن‌ها پیش رشیدالدین فضل‌الله همدانی، طبیب و مورخ برجستهٔ ایرانی در کتاب جامع التواریخ به رسم چینی‌ها در شناسایی افراد از طریق اثر انگشت اشاره کرده و توضیح داده بود که «شواهد و تجربیات نشان می‌دهد که اثر انگشت هیچ دو نفری کاملاً یکسان نیست». در آن زمان در ایران نیز از اثر انگشت شست برای مهر کردن اسناد استفاده می‌کردند. در اوایل قرن بیستم، غربی‌ها نیز با الهام گرفتن از شرقی‌ها برای شناسایی در تحقیقات جنایی از اثر انگشت بهره گرفتند. امروزه تشخیص اثر انگشت به عنوان یکی از دقیق‌ترین و سریع‌ترین روش بیومتریک در حفظ امنیت سیستم‌های کنترل دسترسی و همچنین در ساعت‌های حضور و غیاب، کاربرد بسیاری دارد.

فعالیت

۱ در شکل داده شده، با وصل کردن نقاط مشخص شده به هم، نموداری رسم کنید که تابع باشد.

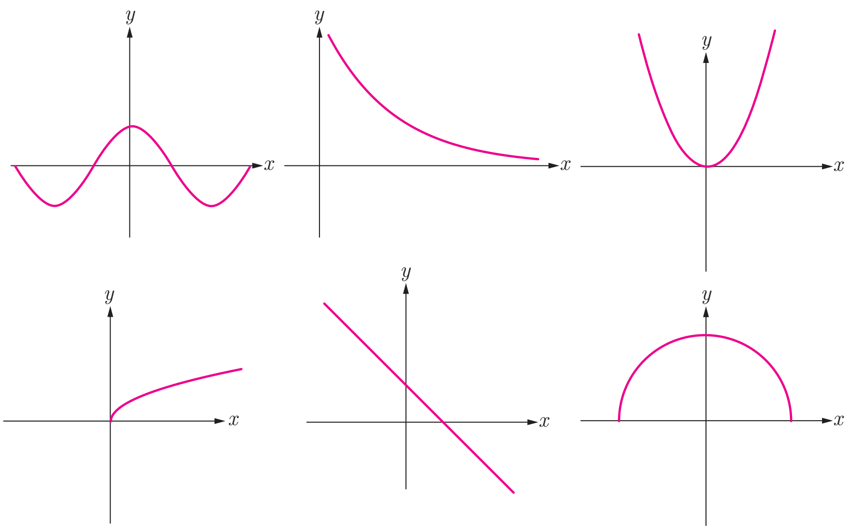
الف) آیا تابعی که رسم کرده‌اید یک‌به‌یک است؟

ب) با کامل کردن عبارت زیر مشخص کنید که چگونه با در دست داشتن نمودار یک تابع، می‌توان تشخیص داد که آیا آن تابع یک به یک است یا خیر؟



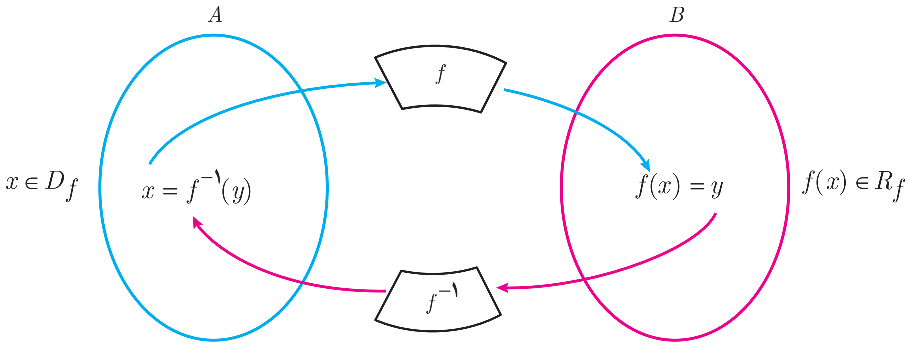
اگر هر خطِ موازی محور .... نمودار تابع را حداکثر در یک نقطه قطع کند، آن‌گاه آن تابع یک به یک است.

۲ کدام‌یک از توابع زیر یک‌به‌یک است؟



به‌دست آوردن ضابطهٔ تابع وارون یک تابع خطی غیر ثابت

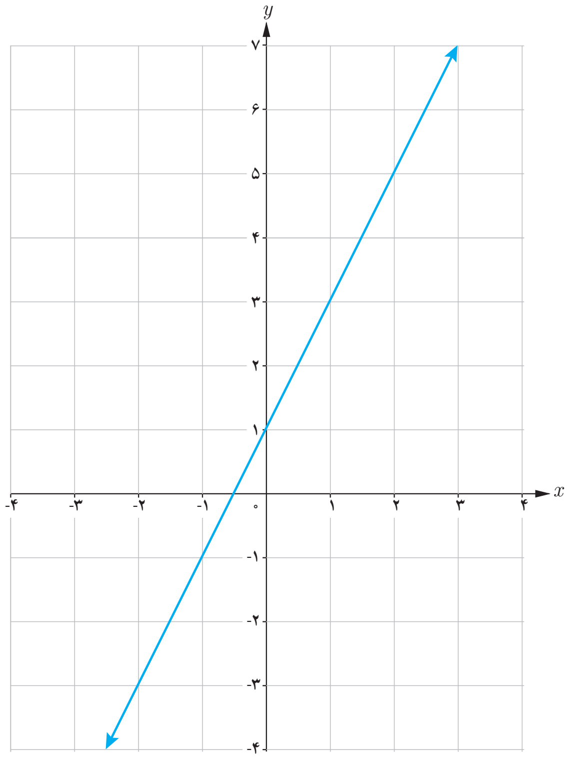
اگر f تابعی یک به یک باشد و $f^{-۱}$ تابع وارون آن باشد، نمودار زیر ارتباط f و $f^{-۱}$ را نشان می‌دهد. (R_f نماد برد تابع f است).



فعالیت

تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۲x+۱$ را در نظر می‌گیریم.

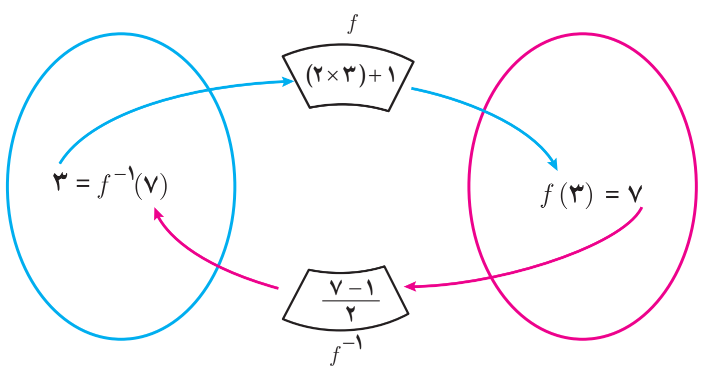
الف) به کمک نمودار f توضیح دهید که چرا f یک به یک است.



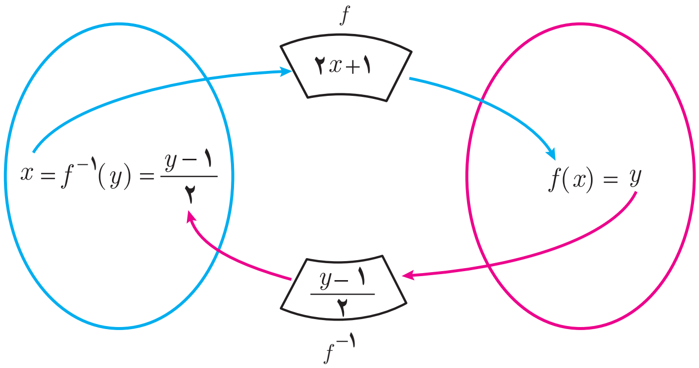
ب) نمودار زیر را توضیح دهید :

$(۷,۳) \in f^{-۱}$ و $(۳,۷) \in f$

به عبارت دیگر $f(۳) = ۷$ و $f^{-۱}(۷) = ۳$



پ) در حالت کلی برای هر عضو دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۲x+۱$ ، داریم :



ت) بنابراین می‌توان نوشت :

$$f(x) = ۲x+۱ \qquad (x \in D_f)$$

$$f^{-۱}(y) = \frac{y-۱}{۲} \qquad (y \in R_f)$$

آنچه که اهمیت دارد این است که دامنه $f^{-۱}$ همان برد f است. بنابراین یک نمایش مناسب برای $f^{-۱}$ به‌صورت زیر است :

$$f^{-۱}(x) = \frac{x-۱}{۲}$$

به‌طور کلی :

برای به‌دست آوردن ضابطه تابع وارون یک تابع خطی غیر ثابت مانند f، در معادله $y = f(x)$ ، x را برحسب y محاسبه می‌کنیم. سپس با جابه‌جا کردن y و x، ضابطهٔ تابع $f^{-۱}(x)$ را به‌دست می‌آوریم.

وارون تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۲x+۱$ ، چنین محاسبه می‌شود :

$$f(x) = ۲x+۱ \Rightarrow y = ۲x+۱$$
$$\Rightarrow ۲x = y-۱$$
$$\Rightarrow x = \frac{y-۱}{۲}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(y) = \frac{y-۱}{۲}$$
$$\Rightarrow f^{-۱}(x) = \frac{x-۱}{۲}$$

کار در کلاس

۱ هر تابع خطی غیرثابت یک‌به‌یک است. (چرا؟) وارون هر یک از توابع خطی زیر را به‌دست آورید.

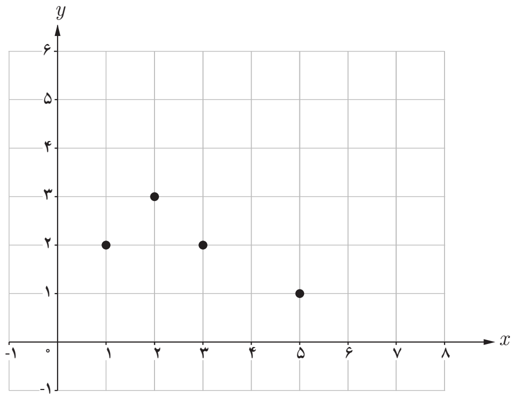
الف) $f(x) = x+۵$

ب) $g(x)=۴x$

پ) $u(x)=۲x+۳$

ت) $v(x)=\frac{۲}{۳}x-۴$

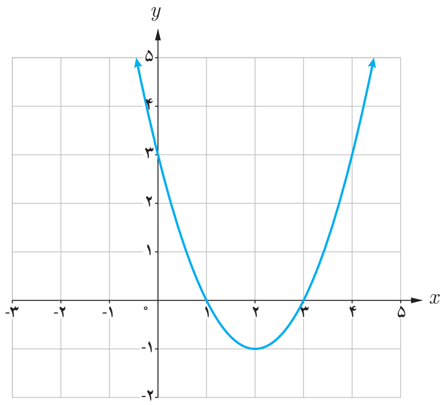
۲ الف) چرا نمودار داده شده، نمودار یک تابع یک‌به‌یک نیست؟



ب) با حذف تنها یک نقطه، نمودار مقابل را به یک تابع یک‌به‌یک تبدیل کنید. مسئله چند جواب دارد؟

کار در کلاس

الف) به نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=x^۲-۴x+۳$ در شکل مقابل، دقت کنید.
با محدود کردن دامنهٔ این تابع روی کدام بازه‌های زیر می‌توان یک تابع یک‌به‌یک ساخت؟



☐ $[۱,۴)$

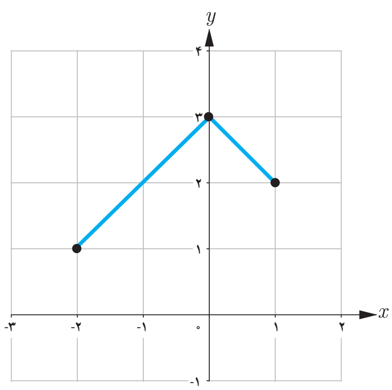
☐ $[۰,۲]$

ب) آیا هر تابع درجهٔ ۲، تابعی یک‌به‌یک است؟ چرا؟

تمرین

۱ وارون تابع $f=\{(۲,۳),(-۲,۱),(-۱,۲)\}$ را به‌دست آورید.

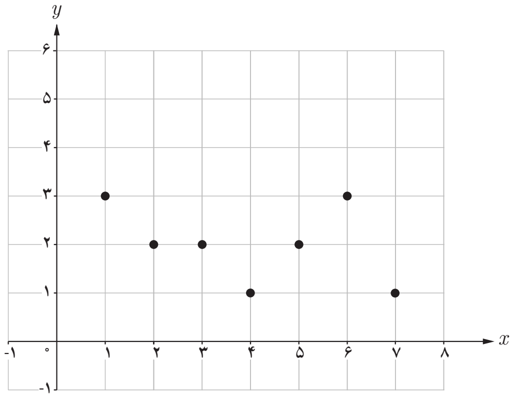
۲ نمودار وارون تابع داده شده در شکل مقابل را رسم کنید.



۳ ضابطهٔ وارون هر یک از توابع با ضابطه‌های زیر را بیابید.

الف) $f(x)=۵x-۲$ ب) $f(x)=\frac{۳}{۵}x+۴$ پ) $f(x)=\frac{-۷x+۳}{۵}$

۴ می‌خواهیم با حذف تعدادی از نقاط نمودار مقابل، آن را به یک تابع یک‌به‌یک تبدیل کنیم. حداکثر چند نقطه می‌تواند باقی بماند؟

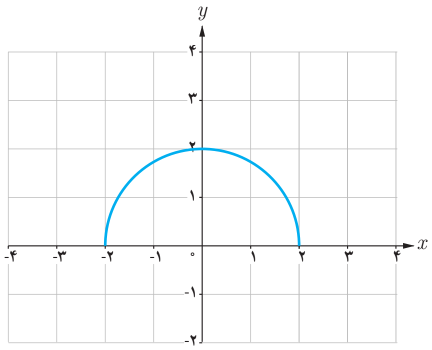


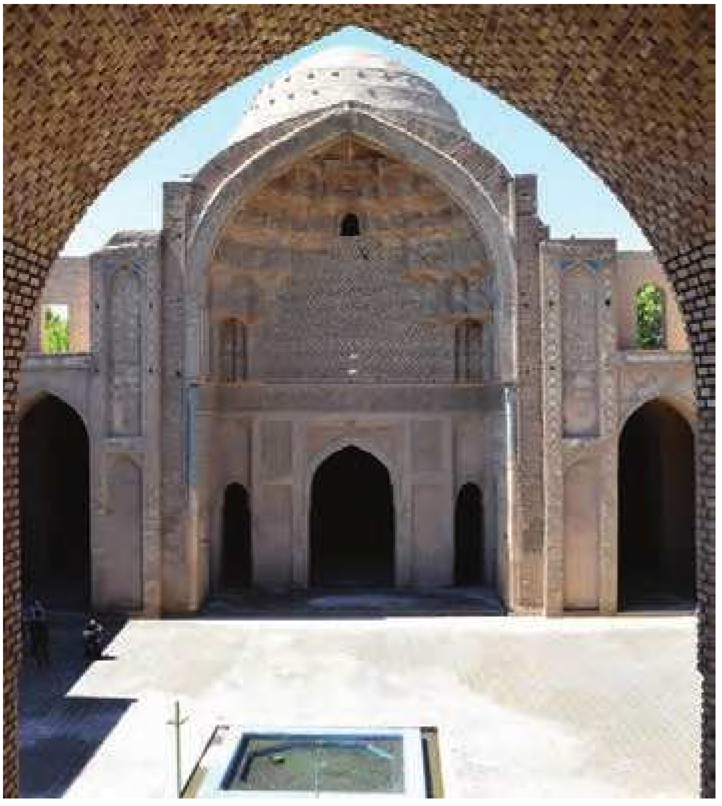
۵ نمودار تابعی با دامنهٔ $[۰,۲]$ و برد $[۲,۵]$ را رسم کنید:

الف) به شرطی که این تابع یک‌به‌یک باشد.

ب) به شرطی که این تابع یک‌به‌یک نباشد.

۶ با حذف بخشی از نمودار نیم‌دایرهٔ داده شده، نمودار یک تابع یک‌به‌یک را مشخص کنید.





مسجد جامع ورامین (تهران)

درس سوم

اعمال جبری روی توابع

اگر f و g به‌ترتیب دو تابع با دامنه‌های D_f و D_g باشند، در این‌صورت جمع، تفریق، ضرب و تقسیم آنها را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم.

نام عمل	تعریف ضابطه	تعریف دامنه
جمع	$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$	$D_{f+g}=D_f\cap D_g$
تفریق	$(f-g)(x)=f(x)-g(x)$	$D_{f-g}=D_f\cap D_g$
ضرب*	$(f.g)(x)=f(x).g(x)$	$D_{f.g}=D_f\cap D_g$
تقسیم	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$	$D_{\frac{f}{g}}=D_f\cap D_g-\{x\mid g(x)=۰\}$

فعالیت

۱ اگر $f(x)=۲x-۱$ و $g(x)=x-۲$، آن‌گاه مجموع، تفاضل، حاصل‌ضرب و حاصل‌تقسیم آنها $\left(\frac{f}{g}\right)$ را به‌دست آورید و دامنهٔ هر یک را مشخص کنید.

حل :

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)=(۲x-۱)+(x-۲)=۳x-۳$$

$(f-g)(x)=$ ....

$$(f.g)(x)=f(x).g(x)=(۲x-۱).(x-۲)=۲x^۲-۵x+۲$$

$$D_{f+g}=D_{f-g}=D_{f.g}=D_f\cap D_g=\mathbb{R}\cap\mathbb{R}=\mathbb{R}$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$$

$$D_{\frac{f}{g}}=\left(D_f\cap D_g\right)-\{x\mid g(x)=۰\}=\left(\mathbb{R}\cap\mathbb{R}\right)-\{x\mid x-۲=۰\}=\mathbb{R}-\{۲\}$$

* ضرب دو تابع f و g را با نمادهای $f\times g$ و یا fg هم نشان می‌دهند.

۲ توابع f و g به‌صورت زیر تعریف شده‌اند.

$$f=\{(-۲,۳),(-۱,۵),(۰,-۲),(۱,۲)\}$$

$$g=\{(-۲,\frac{۱}{۳}),(-۱,۰),(۱,\frac{۲}{۳}),(۴,-۶)\}$$

با توجه به توابع f و g جاهای خالی را پر کنید.

$$D_f=\{-۲,-۱,۰,۱\}$$

$$D_g=\{...,...,...,...\}$$

$$D_f\cap D_g=\{-۲,-۱,۱\}$$

$$f+g=\{(-۲,۳+\frac{۱}{۳}),(-۱,۵+...),(...,۲+\frac{۲}{۳})\}=\{(-۲,...),(-۱,۵),(۱,\frac{۸}{۳})\}$$

$$g-f=\{(-۲,\frac{۱}{۳}-۳),(-۱,۰-...),(۱,...-۲)\}=\{(-۲,-\frac{۸}{۳}),(-۱,...),(۱,...)\}$$

$$f.g=\{(-۲,۳\times\frac{۱}{۳}),(...,۵\times۰),(...,۲\times\frac{۲}{۳})\}=\{(-۲,۱),(...,...),(۱,\frac{۴}{۳})\}$$

$$D_{f/g}=\{-۲,-۱,۱\}-\{-۱\}=\{-۲,۱\}$$

$$\frac{f}{g}=\{(-۲,\frac{۳}{۱/۳}),(۱,\frac{۲}{...})\}=\{(-۲,...),(۱,...)\}$$

$$D_{g/f}=\{-۲,-۱,۱\}-...=...$$

$$\frac{g}{f}=...$$

کار در کلاس

۱ توابع f و g را درنظر بگیرید.

$$f=\{(۰,۰),(۵,۰),(-۳,۴)\}$$

$$g=\left\{(۰,۲),(۱,\frac{۳}{۵}),(-۳,\frac{۲}{۷}),(۵,-۴)\right\}$$

دامنه و ضابطهٔ توابع f+g، f−g ، f.g ، $\frac{f}{g}$ و $\frac{g}{f}$ را به‌دست آورید.

۲ برای دو تابع با ضابطه‌های $f(x)=x^2+3x+1$ و $g(x)=x-3$ جدول داده شده را کامل کنید.

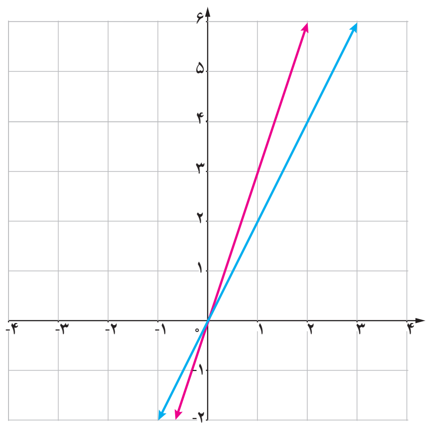
تابع	ضابطه	دامنه
$f+g$	$(f+g)(x)=$	
$f-g$	$(f-g)(x)=$	
$f.g$	$(f.g)(x)=$	
$\frac{f}{g}$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x)=$	

۳ برای دو تابع با ضابطه‌های $u(x)=\sqrt{x}+1$ و $v(x)=x-1$ جدول داده شده را کامل کنید.

تابع	ضابطه	دامنه
$u+v$	$(u+v)(x)=$	
$u-v$	$(u-v)(x)=$	
$u.v$	$(u.v)(x)=$	
$\frac{u}{v}$	$\left(\frac{u}{v}\right)(x)=$	

فعالیت

مطابق شکل، دو تابع f و g به ترتیب با رنگ‌های قرمز و آبی نشان داده شده‌اند.



الف) ضابطهٔ دو تابع f و g را به‌دست آورید.

$f(x)=\dots$ $\qquad$ $g(x)=\dots$

ب) ضابطهٔ دو تابع $f+g$ و $f-g$ را به‌دست آورید.

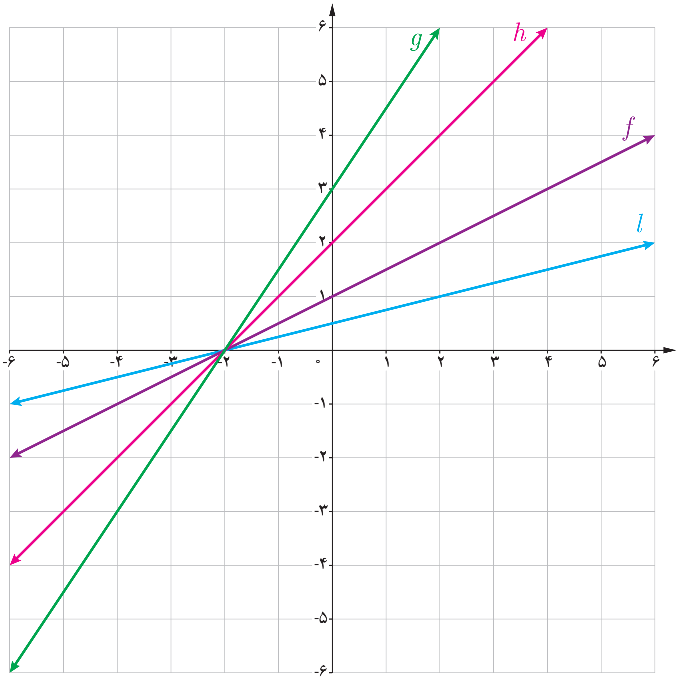
$(f-g)(x)=\dots$ $\qquad$ $(f+g)(x)=\dots$

پ) با تکمیل جدول مقابل، نمودارهای توابع $f+g$ و $f-g$ را با رنگ‌های مختلف رسم کنید.

x	۰	۱
$f(x)$		
$g(x)$		
$(f+g)(x)$		
$(f-g)(x)$		

ت) آیا جمع دو تابع خطی همیشه یک تابع خطی است؟ در مورد تفریق آنها چه می‌توان گفت؟

فعالیت



با توجه به شکل دیده می‌شود که $l(x)=\frac{1}{2}f(x)$. جاهای خالی را پر کنید.

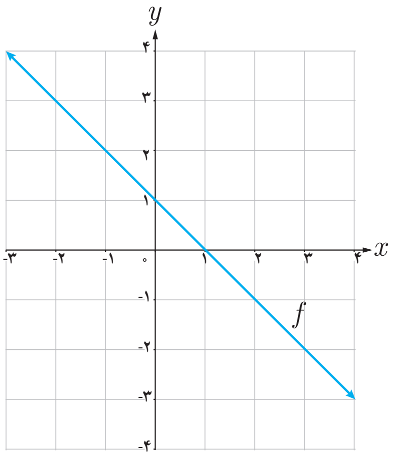
$g(x) = \cdots\cdots f(x)$

$h(x) = \cdots\cdots f(x)$

با توجه به نمودار فوق ملاحظه می‌شود که :

اگر k عددی مثبت باشد، برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y = kf(x)$ کافی است عرض هر نقطه از نمودار تابع با ضابطهٔ $y = f(x)$ را k برابر کنیم.

کار در کلاس

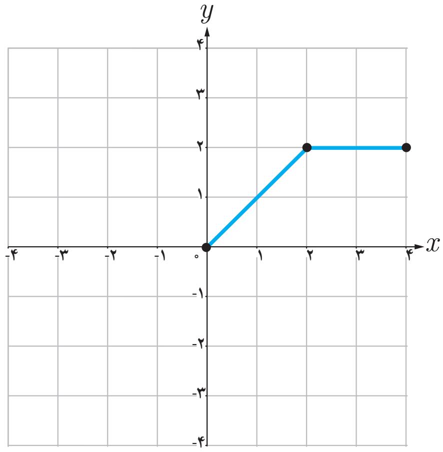


۱ با توجه به نمودار تابع با ضابطهٔ $y = f(x)$ در شکل مقابل، نمودار تابع با ضابطهٔ $y = -f(x)$ را رسم کنید.

۲ عبارت زیر را کامل کنید.

برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y = -f(x)$ کافی است قرینهٔ نمودار تابع ضابطهٔ $y = f(x)$ را نسبت به محور .... رسم کنیم.

۳ در شکل روبه‌رو، نمودار تابع f داده شده است. نمودار تابع با ضابطهٔ $y=-۲f(x)$ را رسم کنید.



تمرین

۱ با استفاده از نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=|x|$، نمودار هر یک از توابع با ضابطه‌های زیر را رسم کنید.

الف) $g(x)=-|x|$ ب) $h(x)=-|x-۳|$ پ) $l(x)=۲|x-۲|$

۲ در هر مورد، دامنه و ضابطهٔ حاصل جمع، ضرب، تقسیم و تفریق دو تابع داده شده را بیابید.

الف) $g(x)=\frac{۱}{x}$ $f(x)=|x|$ ب) $g(x)=x+۲$ $f(x)=x^۲-۴$

پ) $g(x)=-\sqrt{x}$ $f(x)=\sqrt{x}$ ت) $g(x)=x^۲+۳x-۱۰$ $f(x)=\frac{x-۲}{x+۵}$

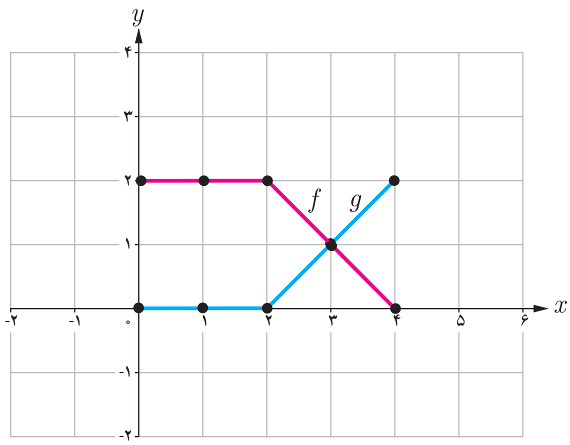
ث) $g=\{(-۱,۲),(۰,۳),(۲,۴),(۳,۰)\}$ $f=\{(۲,۵),(۳,۴),(۰,-۲)\}$

۳ با استفاده از نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{x}$ ، هر یک از نمودارهای زیر را رسم کنید.

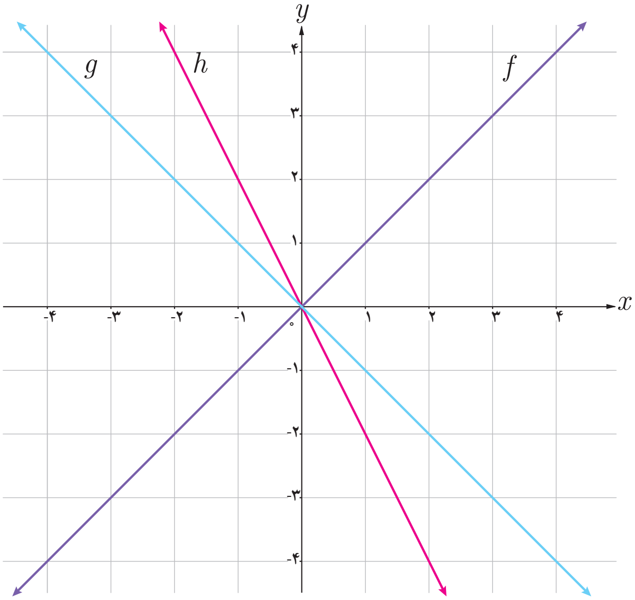
الف) $r(x)=۲\sqrt{x}$ ب) $s(x)=-\sqrt{x-۲}$ پ) $t(x)=-۳\sqrt{x}$

ت) $u(x)=۱-\sqrt{x}$ ث) $v(x)=۱-\sqrt{x-۳}$

۴ در شکل مقابل، نمودار دو تابع f و g رسم شده است. نمودار حاصل جمع این دو تابع را به‌دست آورید.

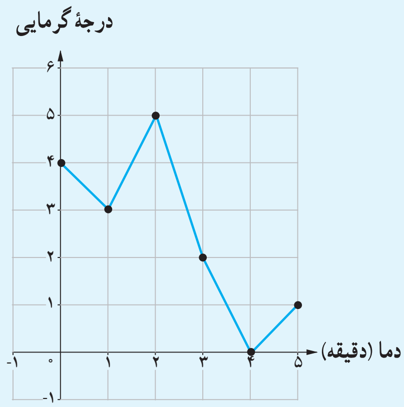


۵ با توجه به نمودار سه تابع داده شده، مشخص کنید کدام‌یک از آنها برابر مجموع دو تابع دیگر است؟

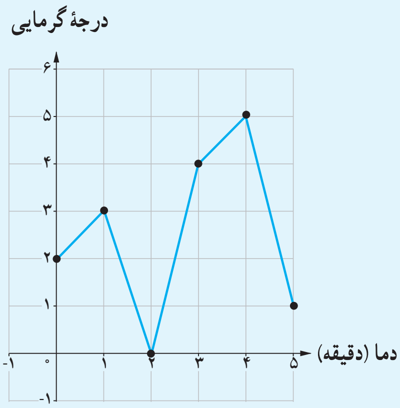


خواندنی

یک اجاق دارای دو منبع گرمایی قابل تنظیم است که می‌توانند هم‌زمان، به‌طور مستقل و جدا از هم گرما تولید کنند. نمودار دمایی که این دو منبع گرمایی تولید می‌کنند، به‌صورت زیر است. این نمودارها نشان می‌دهد که در عرض ۵ دقیقه، چگونه مقدار دما افزایش و یا کاهش می‌یابد. با توجه به نمودارهای زیر بیشترین و کمترین دمایی که در این اجاق تولید می‌شود چه مقدار است؟



نمودار منبع دوم



نمودار منبع اول

فصل

۴ مثلثات

کرمان، کلوت شهداد

ماهوارهٔ امید اولین ماهوارهٔ ساخت ایران است که در بهمن ماه ۱۳۸۷ در مدار فضا قرار گرفت. در شکل بالا این ماهواره در h کیلومتری سطح زمین قرار دارد و در مدار خودش حول خط استوا حرکت می‌کند. اگر α زاویهٔ بین مرکز زمین (نقطهٔ O) تا ماهوارهٔ S و دوردست‌ترین نقطهٔ قابل دید روی کرهٔ زمین (نقطهٔ P) تا این ماهواره باشد و شعاع تقریبی کرهٔ زمین ۶۴۰۰ کیلومتر باشد آنگاه

$$\cos\alpha = \frac{۶۴۰۰}{۶۴۰۰+h}$$ و

$\widehat{PA} = ۶۴۰۰\times\hat{\alpha}$ (بر حسب رادیان)

درس اوّل

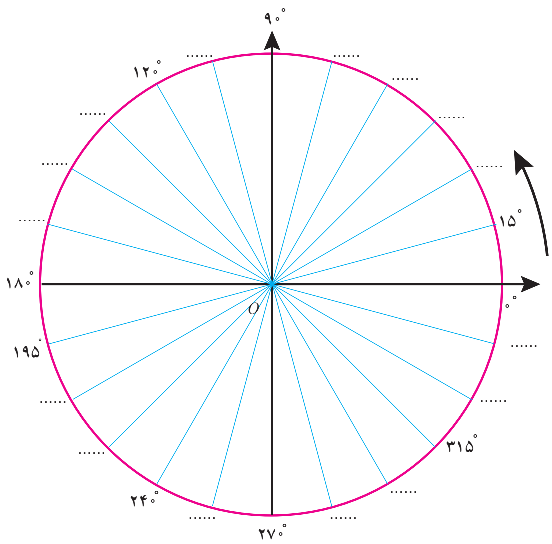
واحدهای اندازه‌گیری زاویه

یادآوری

- اگر محیط دایره‌ای را به ۳۶۰ کمان مساوی تقسیم کنیم، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌روی هرکدام از این کمان‌ها **۱ درجه** است. اندازهٔ هر کمان با زاویهٔ مرکزی روبه‌روی آن کمان برحسب درجه برابر است.
- **دایرهٔ مثلثاتی** دایره‌ای است به شعاع واحد که جهت مثبت آن برخلاف گردش عقربه‌های ساعت است. به این جهت، **جهت مثلثاتی** می‌گوییم. معمولاً مرکز این دایره مبدأ مختصات است.

شکل مقابل یک دایرهٔ مثلثاتی را نمایش می‌دهد که به ۲۴ قسمت مساوی تقسیم شده است. در جاهای خالی زاویهٔ مناسب را روی شکل مشخص کنید.

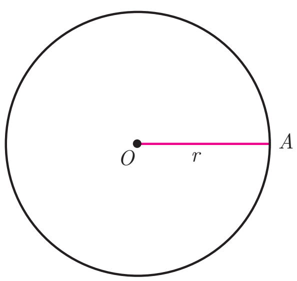
برای اندازه‌گیری زاویه، واحد دیگری وجود دارد که در ادامه با آن آشنا می‌شوید.



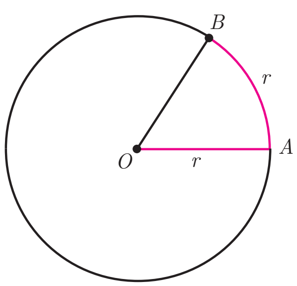
در فعالیت زیر رابطهٔ بین اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به یک کمان و طول کمان روبه‌روی آن مشخص می‌شود.

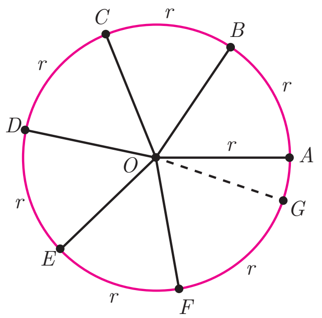
فعالیت

۱) یک شیء دایره‌ای شکل انتخاب کنید و نخی را دور آن بپیچید و سپس باز کنید؛ طول نخ را با خط‌کش اندازه بگیرید. طول این نخ چه کمیتی از دایره را مشخص می‌کند؟ با استفاده از این مقدار شعاع دایره را به‌دست آورید.



۲) قطعه نخی را به اندازهٔ شعاع دایره برش دهید و آن را از نقطهٔ A روی آن دایره قرار دهید تا نقطهٔ B حاصل شود (شکل مقابل). اندازه $\widehat{AOB}$ را با نقاله اندازه‌گیری کنید. این زاویه تقریباً چند درجه است؟



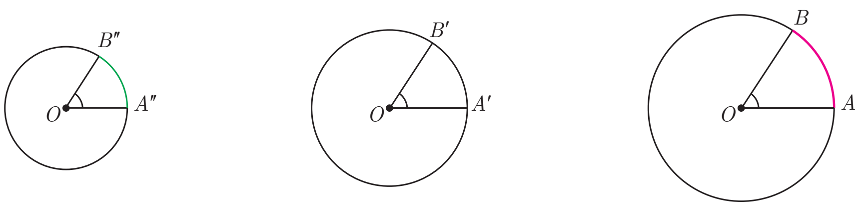


۳ دوباره این قطعه نخ را از نقطهٔ B روی دایره قرار دهید تا نقطهٔ C حاصل شود و این کار را ادامه دهید تا نقاط D، E، F و G روی دایره به دست آیند (شکل مقابل). در این حالت $\widehat{BOC}$، $\widehat{COD}$، $\widehat{DOE}$، $\widehat{EOF}$ و $\widehat{FOG}$ با زاویه .... برابر و هر یک تقریباً .... درجه است. آیا دو نقطهٔ G و A برهم منطبق می‌شوند؟

به این ترتیب ۶ زاویهٔ مرکزی حاصل می‌شود که طول کمان روبه‌روی هر یک از آنها با .... دایره برابر است. به هر یک از این زاویه‌ها **یک رادیان** می‌گوییم.

> **۱ رادیان** برابر است با اندازهٔ زاویهٔ مرکزیِ روبه‌رو به کمانی از دایره به طول شعاع دایره.

در تمام دایره‌های زیر اندازهٔ زاویهٔ مشخص شده ۱ رادیان است. در هر کدام با استفاده از نقاله اندازهٔ زاویه را بر حسب درجه مشخص کنید.

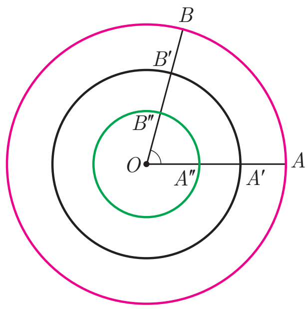


به عبارت دیگر اگر اندازهٔ $\widehat{AOB}$، ۱ رادیان باشد، در شکل مقابل داریم:

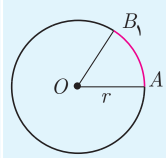
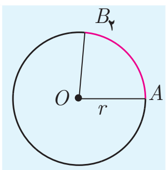
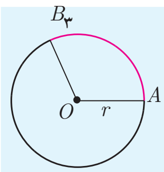
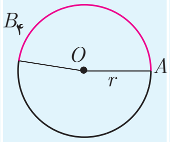
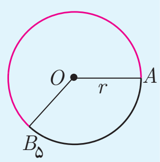
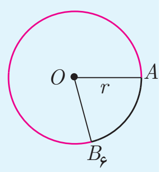
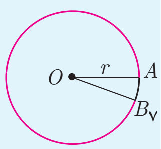
$OA = \widehat{AB}$

$OA' = \widehat{A'B'}$

$OA'' = \widehat{A''B''}$



۴ جدول زیر را کامل کنید.

شکل							
طول کمان AB_i $1 \leq i \leq 7$	r	$\frac{3}{2}r$	$2r$		$4r$		$6r$
اندازهٔ زاویه $\angle AOB_i$ $1 \leq i \leq 7$	۱ رادیان	$\frac{3}{2}$ رادیان	۲ رادیان	۳ رادیان		۵ رادیان	

همان‌طور که می‌بینید در هر ستون با تقسیم طول کمان به اندازهٔ شعاع دایره (r)، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مربوط به آن بر حسب رادیان به‌دست می‌آید.

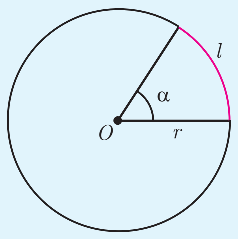
با توجه به جدول صفحهٔ قبل می‌توان گفت:

$$\text{اندازهٔ یک زاویه برحسب رادیان} = \frac{\text{طول کمان روبه‌روی زاویه}}{\text{اندازهٔ شعاع دایره}}$$

اگر l طول کمان روبه‌روی زاویه، r اندازهٔ شعاع دایره و α اندازهٔ زاویه برحسب رادیان باشد، آنگاه رابطهٔ بالا را به صورت زیر می‌توان نوشت:

$$\alpha = \frac{l}{r}$$

در رابطهٔ بالا l و r هم واحدند.



کار در کلاس

با استفاده از رابطهٔ بالا جدول زیر را کامل کنید:

l		۱۰ متر	۵۰ متر	۹۰ سانتی‌متر	۲۰۰ سانتی‌متر		۵۰۰ سانتی‌متر	
r	۲۰ سانتی‌متر		۱۰ متر		۱ متر	۰/۵ متر	۵ متر	۵ سانتی‌متر
α	۲۰ رادیان	۱۰ رادیان		۳ رادیان		۱/۵ رادیان		۱ رادیان

یادآوری

می‌دانیم نسبت محیط هر دایره به اندازهٔ قطر آن عددی ثابت است که آن را با π نمایش می‌دهند و به آن عدد پی می‌گویند. مقدار تقریبی این عدد ۳/۱۴ است. حال جدول زیر را کامل کنید:

زاویه برحسب رادیان	π رادیان	۳/۱۴ رادیان	۳ رادیان	۲ رادیان	۱ رادیان	۰/۵ رادیان
زاویه برحسب درجه	دقیقاً 180°	تقریباً	تقریباً	تقریباً	تقریباً 57°	تقریباً ....

بنابراین، اندازهٔ زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به کمان نیم دایره برابر است با .... درجه یا .... رادیان. به عبارت دیگر اندازهٔ زاویه نیم‌صفحه برابر است با .... رادیان. در نتیجه:

$$\text{یک درجه} = \frac{\pi}{180}\ \text{رادیان}$$

به این ترتیب :

$\pi = 180^\circ$ رادیان

$\div 2$: $90^\circ = \dots\dots$ رادیان

$\div 3$: $\dots\dots = \frac{\pi}{3}\ \dots\dots$

$\div 4$: $\dots\dots = \dots\dots$ رادیان

$\div 6$: $30^\circ = \dots\dots$ رادیان

کار در کلاس

۱ مطابق نمونه هریک از زاویه‌ها را از درجه به رادیان تبدیل کنید :

$30^\circ \xrightarrow{\times \frac{\pi}{180}\ \text{رادیان}} \frac{\pi}{6}$ رادیان

$36^\circ \longrightarrow \dots\dots\dots$

$45^\circ \longrightarrow \dots\dots\dots$

$60^\circ \longrightarrow \dots\dots\dots$

$90^\circ \longrightarrow \dots\dots\dots$

$180^\circ \longrightarrow \dots\dots\dots$

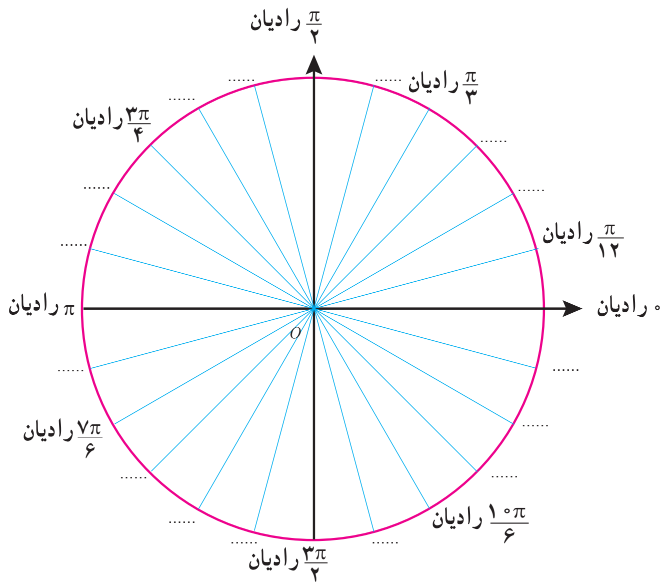
اگر D اندازهٔ زاویهٔ α برحسب درجه و R اندازهٔ زاویه α برحسب رادیان باشد، آنگاه

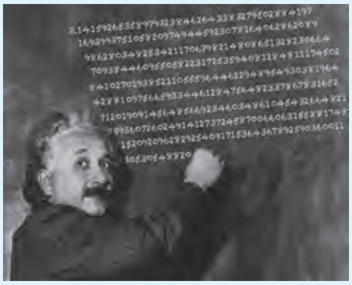
$$\frac{D}{180^\circ} = \frac{R}{\pi\ \text{رادیان}}$$

۲ حال جدول زیر را با استفاده از این رابطه کامل کنید :

D (درجه)	5°		24°		120°	
R (رادیان)	$\frac{\pi}{36}$	$\frac{\pi}{7}$		$\frac{2\pi}{5}$		$\frac{5\pi}{4}$

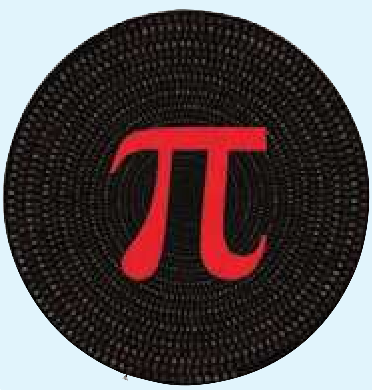
۳ در شکل زیر در هریک از جاهای خالی زاویهٔ مناسب را برحسب رادیان مشخص کنید.





خواندنی

روز چهاردهم مارس به عنوان روز جهانی عدد پی نام‌گذاری شده است؛ زیرا اولین سه رقم این عدد تاریخ ۱۴ مارس را به‌صورت ۳/۱۴ نشان می‌دهد. این تاریخ مصادف با سالروز تولد آلبرت انیشتین نیز است. تاکنون حدود ۱۳ تریلیون رقم بعد از ممیز عدد پی محاسبه شده است. باتوجه به اصم بودن این عدد و بی‌قاعده بودن ارقام اعشاری آن امکان یافتن هر نوع عددی از جمله تاریخ تولد، شماره حساب بانکی، شماره تلفن و نظایر آنها در بین ارقام آن وجود دارد. مثلاً تاریخ تولد مرحوم پروفسور محمود حسابی ۳ اسفند ۱۲۸۱ است که می‌توان آن را به‌صورت نمایش ۶ رقمی ۸۱۱۲۰۳ نوشت. از طریق سامانهٔ mypiday.com می‌توان این را در بین ارقام اعشاری عدد پی یافت. شکل زیر ارقام عدد پی را تا رسیدن به این نمایش نشان می‌دهد. حال شما از طریق این سامانه تاریخ تولد خودتان را در بین ارقام عدد پی بیابید.



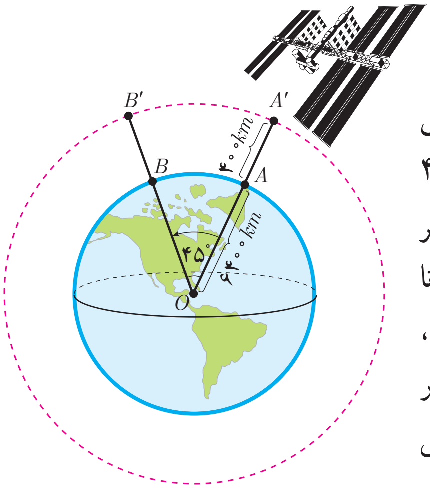
خواندنی

یک زاویه برحسب رادیان را با استفاده از ماشین حساب می‌توان به طور تقریبی برحسب درجه محاسبه کرد. در اغلب ماشین حساب‌ها دکمه‌ای با نماد π وجود دارد. مثلاً برای محاسبهٔ ۱ رادیان کافی است حاصل $۱ \times \frac{۱۸۰}{\pi}$ را به‌دست آوریم که تقریباً برابر با $۵۷/۳^\circ$ است.

حال، شما مقدار تقریبی زاویه‌های زیر را مشابه نمونه با ماشین حساب به دست آورید.

۰/۵ رادیان	$\simeq$	....
$\frac{۴}{۵}$ رادیان	$\simeq$	....
۲ رادیان	$\simeq$	....
۳ رادیان	$\simeq$	....
۳/۱۴ رادیان	$\simeq$	....
$\frac{\pi}{۳}$ رادیان	$=$	....
$\frac{\pi}{۴}$ رادیان	$=$	....
π رادیان	$=$	....

فعالیت



ایستگاه فضایی بین‌المللی را مطابق شکل مقابل در نظر بگیرید که در فاصلهٔ تقریبی ۴۰۰ کیلومتری بالای سطح کره زمین قرار دارد. اگر این ایستگاه توسط ایستگاه زمینی از نقطهٔ A تا نقطهٔ B که با مرکز زمین زاویه ۴۵° می‌سازند، رصد شود، این ایستگاه چه مسافتی را در مدار خود از A' به B' پوشش می‌دهد؟ شعاع تقریبی کرهٔ زمین را ۶۴۰۰ کیلومتر فرض کنید.

۱) ابتدا زاویهٔ مرکزی ۴۵° را به رادیان تبدیل کنید.

$\alpha = ۴۵^\circ \times .... = \frac{\pi}{۴}$ رادیان = اندازهٔ زاویهٔ مرکزی $A\hat{O}B$ برحسب رادیان

۲) شعاع مدار دایره‌ای شکل که ایستگاه فضایی روی آن قرار دارد، برابر است با $r = ...$

۳) طول کمان روبه‌روی $A'\hat{O}B'$ با فرض $\pi \simeq ۳/۱۴$ و با استفاده از رابطه $\alpha = \frac{l}{r}$ به طور تقریبی برابر است با: $A'B'$ طول کمان $= l = \frac{\pi}{۴} \times ... \simeq ۵۳۳۸\ km$

تمرین

۱) هریک از زاویه‌های -۱۲°، ۳۶°، ۷۲°، -۱۰۵° و ۳۱۵° را به رادیان تبدیل کنید و روی دایرهٔ مثلثاتی نشان دهید.

۲) هریک از زاویه‌های $\frac{-\pi}{۱۸}$ رادیان، $\frac{-۲\pi}{۵}$ رادیان، $\frac{۳\pi}{۴}$ رادیان، $\frac{۷\pi}{۸}$ رادیان، $\frac{۶\pi}{۵}$ رادیان را به درجه تبدیل کنید و به‌طور تقریبی روی دایرهٔ مثلثاتی نشان دهید.

۳) زاویهٔ D برابر با $\frac{\pi}{۲۰}$ رادیان است. اندازهٔ این زاویه چند درجه است؟

۴) دایره‌ای به شعاع ۱۰ سانتی‌متر مفروض است. اندازهٔ زاویهٔ مرکزی مقابل به کمانی به طول ۸ سانتی‌متر از این دایره چند رادیان است؟

۵) درستی یا نادرستی هر یک از جملات زیر را با ذکر دلیل بررسی کنید.

الف) اگر زاویه بین دو ساق مثلث متساوی‌الساقینی ۱ رادیان باشد، آنگاه اندازه قاعدهٔ این مثلث کوچک‌تر از اندازهٔ هر یک از ساق‌های آن است.

ب) در دایره‌ای به شعاع ۱ سانتی‌متر طول کمان روبه‌روی زاویه π رادیان تقریباً برابر با ۳/۱۴ سانتی‌متر است.

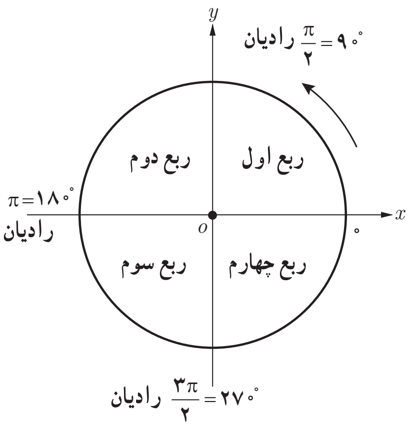
پ) انتهای کمان زاویه $\frac{۶\pi}{۵}$ رادیان در ربع دوم دایرهٔ مثلثاتی قرار دارد.

ت) زاویه‌های $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان، $\frac{\pi}{۹}$ رادیان، $\frac{۷\pi}{۳۶}$ رادیان، زوایای یک مثلث را تشکیل می‌دهند.

درس دوم

روابط تکمیلی بین نسبت‌های مثلثاتی

در شکل مقابل، یک دایرهٔ مثلثاتی با چهار ربع آن مشخص شده است. جدول زیر علامت چهار نسبت مثلثاتی در هر ربع را نشان می‌دهد.

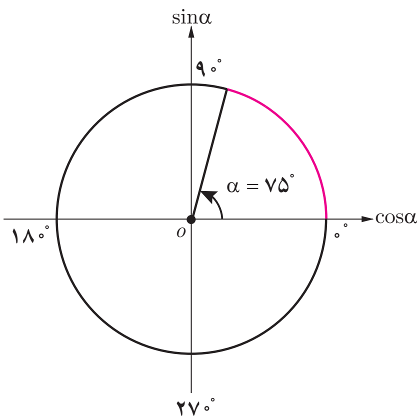


ربع / نسبت مثلثاتی	اول $۰ < \alpha < \frac{\pi}{۲}$	دوم $\frac{\pi}{۲} < \alpha < \pi$	سوم $\pi < \alpha < \frac{۳\pi}{۲}$	چهارم $\frac{۳\pi}{۲} < \alpha < ۲\pi$
$\sin\alpha$	+	+	−	−
$\cos\alpha$	+	−	−	+
$\tan\alpha$	+	−	+	−
$\cot\alpha$	+	−	+	−

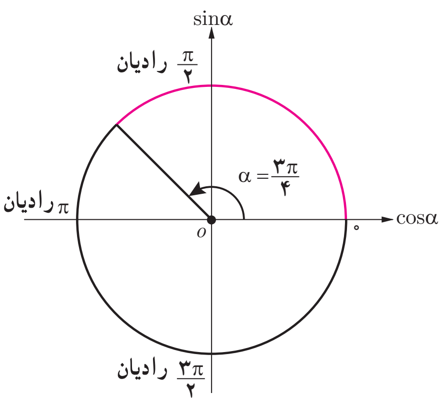
فعالیت

۱ جداول زیر را مطابق نمونه کامل کنید.

علامت نسبت مثلثاتی	انتهای کمان روبه‌روی α	زاویه α
$\tan\alpha > ۰$	ربع اول	۷۵°
$\sin\alpha$		۱۵۰°
$\cos\alpha$		۲۱۰°
$\cot\alpha$		۲۴۰°
$\tan\alpha$		۲۸۵°



علامت نسبت مثلثاتی	انتهای کمان روبه‌روی α	زاویه α
$\cos\alpha < ۰$	ربع دوم	$\frac{۳\pi}{۴}$ رادیان
$\sin\alpha$		$\frac{۴\pi}{۵}$ رادیان
$\tan\alpha$		$\frac{۵\pi}{۳}$ رادیان
$\cos\alpha$		$\frac{۵\pi}{۱۲}$ رادیان
$\cot\alpha$		$\frac{۵\pi}{۴}$ رادیان



۲ اگر $\sin\alpha = \frac{-۱}{۳}$ و انتهای کمان روبه‌رو به زاویهٔ α در ربع سوم باشد، محاسبات زیر را کامل کنید :

$$\cos^۲\alpha = ۱ - \sin^۲\alpha = \dots\dots \xrightarrow{\cos\alpha<۰} \cos\alpha = -\frac{\dots\dots}{\dots\dots}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dots\dots\dots \longrightarrow \tan\alpha = \dots\dots$$

$$\cot\alpha = \frac{۱}{\tan\alpha} = \dots\dots\dots \longrightarrow \cot\alpha = ۲\sqrt{۲}$$

۳ اگر $\cot\alpha = -۲$ و $\cos\alpha > ۰$ سایر نسبت‌های مثلثاتی α را بیابید.

حل : چون $\cos\alpha > ۰$ و $\cot\alpha < ۰$ لذا انتهای کمان α در ربع .... واقع است. بنابراین :

$$\frac{۱}{\sin^۲\alpha} = ۱ + \cot^۲\alpha = \dots\dots\dots \longrightarrow \sin^۲\alpha = \dots\dots\dots \longrightarrow \sin\alpha = \frac{-۱}{\sqrt{۵}}$$

$$\cos^۲\alpha = ۱ - \sin^۲\alpha = \dots\dots\dots \longrightarrow \cos\alpha = \dots\dots\dots$$

$$\tan\alpha = \frac{۱}{\cot\alpha} \longrightarrow \tan\alpha = \dots\dots\dots$$

کار در کلاس

۱ اگر $\cos x = \frac{-۴}{۵}$ و $\sin x > ۰$، نسبت‌های مثلثاتی دیگر زاویهٔ x را بیابید.

۲ جدول زیر را کامل کنید.

زاویه α / نسبت	۲π رادیان $= ۳۶۰^\circ$	$\frac{۳\pi}{۲}$ رادیان $= ۲۷۰^\circ$	π رادیان $= ۱۸۰^\circ$	$\frac{\pi}{۲}$ رادیان $= ۹۰^\circ$	$\frac{\pi}{۳}$ رادیان $= ۶۰^\circ$	$\frac{\pi}{۴}$ رادیان $= ۴۵^\circ$	$\frac{\pi}{۶}$ رادیان $= ۳۰^\circ$	۰ رادیان $= ۰^\circ$
$\sin\alpha$	۰	-۱			$\frac{\sqrt{۳}}{۲}$		$\frac{۱}{۲}$	
$\cos\alpha$			-۱			$\frac{\sqrt{۲}}{۲}$		۱
$\tan\alpha$		تعریف نشده		تعریف نشده				
$\cot\alpha$					$\frac{\sqrt{۳}}{۳}$	۱		

۳ حاصل عبارت‌های زیر را به دست آورید.

الف) $\cot\frac{\pi}{۶}-\tan\frac{\pi}{۳}\times\sin\frac{\pi}{۴}=$

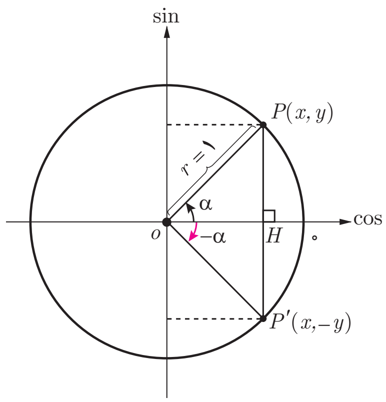
ب) $\frac{\tan^{۲}(\frac{\pi}{۶})+\sin^{۲}(\frac{\pi}{۴})}{\cot^{۲}(\frac{\pi}{۴})-\cos^{۲}(\frac{\pi}{۳})}+\cos^{۲}۷۵^{\circ}+\sin^{۲}۷۵^{\circ}=$

در ادامه می‌خواهیم ببینیم نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه، متمم و مکمل با هم چه ارتباطی دارند.

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های قرینه

فعالیت

دو زاویهٔ α و $-\alpha$ را قرینهٔ یکدیگر می‌گویند. اگر در شکل مقابل، $\alpha=۳۰^{\circ}$، نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ -۳۰° در $O\overset{\Delta}{P'}H$ عبارت‌اند از :



قرینهٔ یک نقطه به مختصات (x,y) نسبت به محور افقی نقطه‌ای به مختصات $(x,-y)$ است.

$\sin(-۳۰^{\circ})=\frac{-y}{r}=-\sin۳۰^{\circ}=\frac{-۱}{۲}$

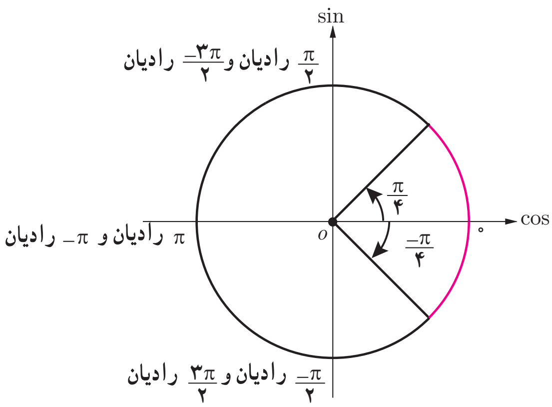
$\cos(-۳۰^{\circ})=\dots\dots\dots=\dots\dots\dots=\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\tan(-۳۰^{\circ})=\frac{-y}{x}=\dots\dots\dots=\dots\dots\dots$

$\cot(-۳۰^{\circ})=\dots\dots\dots=\dots\dots\dots=\dots\dots\dots$

در حالت کلی :

$$\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$$
$$\cos(-\alpha)=\cos\alpha$$
$$\tan(-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(-\alpha)=-\cot\alpha$$



کار در کلاس

۱ سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $-\frac{\pi}{۴}$ رادیان را مطابق نمونه به دست آورید.

$\sin(-\frac{\pi}{۴})=-\sin\frac{\pi}{۴}$

۲ حاصل هریک از عبارت‌های زیر را مطابق نمونه به دست آورید.

$$\cot(\frac{-\pi}{۳})\times\cos(\frac{-\pi}{۶})+\tan(\frac{-\pi}{۴})=-\cot\frac{\pi}{۳}\times\cos\frac{\pi}{۶}-\tan\frac{\pi}{۴}=-\frac{\sqrt{۳}}{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}-۱=\frac{-۳}{۲}$$

الف) $\frac{\cos(-۹۰^\circ)+\sin(-۲۷۰^\circ)}{\sin(-۱۸۰^\circ)-\cos(-۳۶۰^\circ)}=\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}=\dots\dots\dots\dots$

ب) $\cot(\frac{-\pi}{۶})+\tan(\frac{-\pi}{۳})=\dots\dots\dots$

پ) $\cos(-۴۵^\circ)\times\cos(-۶۰^\circ)+\sin(-۴۵^\circ)\times\sin(-۶۰^\circ)=\dots\dots+\dots\dots=\dots\dots$

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های مکمل

فعالیت

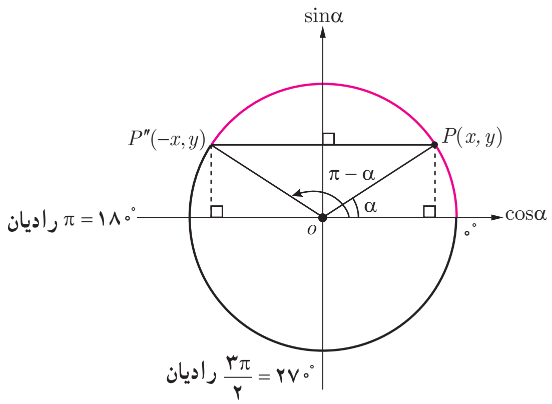
دو زاویهٔ α و β را مکمل گوییم؛ هرگاه مجموع آنها ۱۸۰° یا π رادیان شود. مثلاً دو زاویهٔ ۳۰° و ۱۵۰° مکمل یکدیگرند. همچنین دو زاویهٔ $\frac{\pi}{۳}$ رادیان و $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان مکمل یکدیگرند (چرا؟). در دایرهٔ مثلثاتی زیر اگر $\alpha=۳۰^\circ$ آنگاه با توجه به مختصات نقطهٔ P'' و انتهای کمان زاویهٔ ۱۵۰° که در ربع دوم واقع است، نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۱۵۰° عبارت‌اند از :

$\sin ۱۵۰^\circ=\sin(۱۸۰^\circ-۳۰^\circ)=y=\sin ۳۰^\circ=\frac{۱}{۲}$

$\cos ۱۵۰^\circ=\cos(۱۸۰^\circ-۳۰^\circ)=-x=-\cos ۳۰^\circ=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}$

$\tan ۱۵۰^\circ=\dots\dots\dots\dots=\dots\dots\dots\dots$

$\cot ۱۵۰^\circ=\dots\dots\dots\dots=\dots\dots\dots\dots$



قرینهٔ یک نقطه به مختصات (x,y) نسبت به محور عمودی نقطه‌ای به مختصات $(-x,y)$ است.

در حالت کلی :

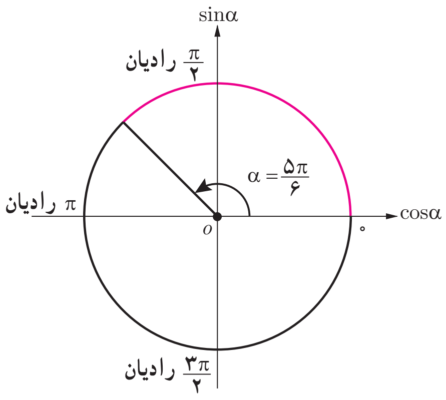
$$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$$
$$\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$$
$$\tan(\pi-\alpha)=-\tan\alpha$$
$$\cot(\pi-\alpha)=-\cot\alpha$$

کار در کلاس

۱ مکمل هریک از زاویه‌های زیر را مشخص کنید :

الف) ۷۵° ب) -۲۵° پ) $\frac{\pi}{۱۲}$ رادیان   ت) $\frac{-\pi}{۴}$ رادیان

۲ نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\frac{۵\pi}{۶}$ رادیان را مطابق نمونه به‌دست آورید.



$$\sin\frac{۵\pi}{۶}=\sin(\pi-\frac{\pi}{۶})=\sin\frac{\pi}{۶}=\frac{۱}{۲}$$

$$\cos\frac{۵\pi}{۶}=\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\tan\frac{۵\pi}{۶}=\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\cot\frac{۵\pi}{۶}=\dots\dots\dots\dots\dots$$

فعالیت

حاصل هریک از نسبت‌های مثلثاتی زیر را مطابق نمونه به دست آورید.

$$\tan\frac{۲\pi}{۳}=\tan\ (\pi-\frac{\pi}{۳})=-\tan\frac{\pi}{۳}=-\sqrt{۳}$$

$$\cos\frac{۳\pi}{۴}=\cos\ (\dots\dots\dots)=\dots\dots\dots$$

$$\sin ۱۲۰^\circ=\sin\ (۱۸۰^\circ-\dots\dots)=\dots\dots\dots\dots=\dots\dots\dots$$

$$\cot\ (-۱۲۰^\circ)=-\cot\ (\dots\dots)=-\cot\ (۱۸۰^\circ-\dots\dots)=\dots\dots\dots$$

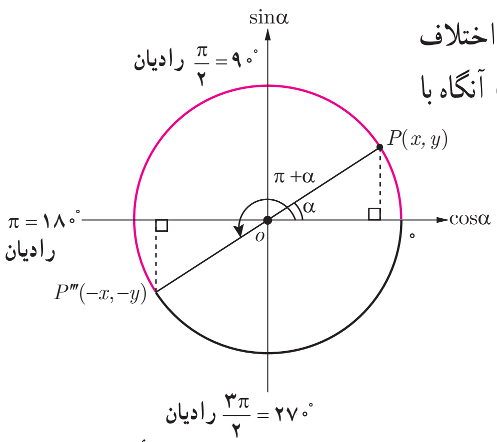
$$\cos\ (۱۳۵^\circ)\ =\dots\dots\dots\dots=\dots\dots\dots\dots=\dots\dots\dots$$

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف π رادیان

فعالیت

نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ ۲۱۰° را به دست آورید.

انتهای کمان زاویه ۲۱۰° در ربع سوم واقع است. در ضمن $۲۱۰^\circ=۱۸۰^\circ+۳۰^\circ$، یعنی اختلاف دو زاویهٔ ۲۱۰° و ۳۰° برابر با π رادیان است. در دایره مثلثاتی مقابل، اگر $\alpha=۳۰^\circ$ آنگاه با توجه به مختصات نقطه P'''، نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۲۱۰° عبارت‌اند از :



قرینهٔ یک نقطه به مختصات (x,y) نسبت به مبدأ مختصات نقطه‌ای به مختصات $(-x,-y)$ است.

$$\sin ۲۱۰^\circ=\sin\ (۱۸۰^\circ+۳۰^\circ)=-y=-\sin ۳۰^\circ=\frac{-۱}{۲}$$

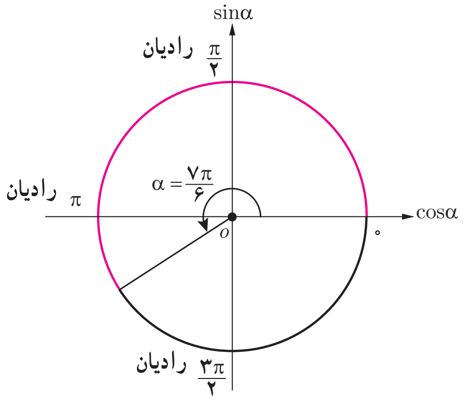
$$\cos ۲۱۰^\circ=\dots\dots\dots\dots\ =-x=\dots\dots$$

$$\tan ۲۱۰^\circ=\frac{\sin ۲۱۰^\circ}{\cos ۲۱۰^\circ}=\dots\dots$$

$$\cot ۲۱۰^\circ=\dots\dots\dots=\dots\dots$$

در حالت کلی :

$$\sin(\pi+\alpha) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\pi+\alpha) = -\cos\alpha$$
$$\tan(\pi+\alpha) = \tan\alpha$$
$$\cot(\pi+\alpha) = \cot\alpha$$



کار در کلاس

سایر نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\frac{۷\pi}{۶}$ رادیان را مطابق نمونه مشخص کنید.

$$\sin\frac{۷\pi}{۶} = \sin(\pi+\frac{\pi}{۶}) = -\sin\frac{\pi}{۶} = -\frac{۱}{۲}$$

فعالیت

حاصل هریک از نسبت‌های مثلثاتی زیر را مطابق نمونه بیابید.

$$\sin ۲۲۵^\circ = \sin(۱۸۰^\circ + ۴۵^\circ) = -\sin ۴۵^\circ = \frac{-\sqrt{۲}}{۲}$$

$\tan ۲۲۵^\circ =$ ....

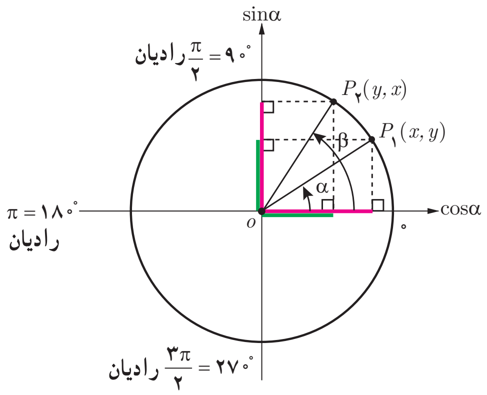
$\cos(\frac{-۴\pi}{۳}) = \cos$ ... $= \cos(\pi +$ ... $) =$ .... $=$ ....

$\sin(\frac{-۷\pi}{۶}) =$ ....

$\cot(\frac{۵\pi}{۴}) =$ ....

نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های متمم

فعالیت



دو زاویهٔ α و β را متمم گوییم؛ هرگاه مجموع آنها ۹۰° یا $\frac{\pi}{۲}$ رادیان شود. مثلاً دو زاویهٔ $\alpha=۳۰^\circ$ و $\beta=۶۰^\circ$ در دایره مثلثاتی مقابل متمم یکدیگرند. در این حالت :

$$\sin ۳۰^\circ = \cos ۶۰^\circ = \frac{۱}{۲}$$

$$\cos ۳۰^\circ = \sin ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\tan ۳۰^\circ = \cot ۶۰^\circ = \frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

$$\cot ۳۰^\circ = \tan ۶۰^\circ = \sqrt{۳}$$

زاویه‌ای معرفی کنید که با متمم خودش برابر باشد. برای چنین زاویه‌ای داریم :

$$\sin \ldots\ldots = \cos \ldots\ldots = \ldots\ldots$$

$$\tan \ldots\ldots = \cot \ldots\ldots = \ldots\ldots$$

همچنین زاویه ...... و $\frac{\pi}{۲}$ رادیان متمم یکدیگرند؛ بنابراین :

$$\sin\frac{\pi}{۲} = \cos \ldots\ldots = \ldots\ldots$$

$$\tan\frac{\pi}{۲} = \cot \ldots\ldots = \ldots\ldots$$

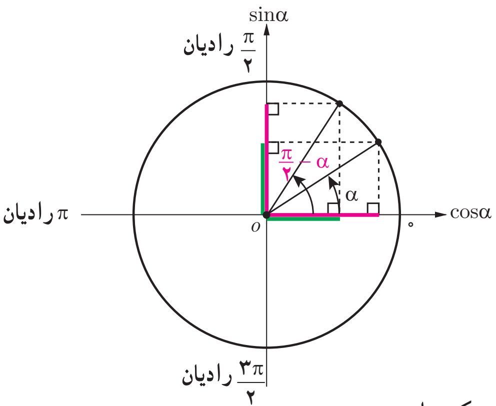
در حالت کلی :

$$\sin(\frac{\pi}{۲}-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲}-\alpha) = \sin\alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲}-\alpha) = \cot\alpha$$

$$\cot(\frac{\pi}{۲}-\alpha) = \tan\alpha$$



به عبارت دیگر : اگر دو زاویهٔ α و β متمم باشند(رادیان $\alpha+\beta=\frac{\pi}{۲}$) آنگاه سینوس یکی با کسینوس دیگری و تانژانت یکی با کتانژانت دیگری برابر است. به بیان دیگر :

$$\sin\alpha = \cos\beta \quad , \quad \tan\alpha = \cot\beta$$

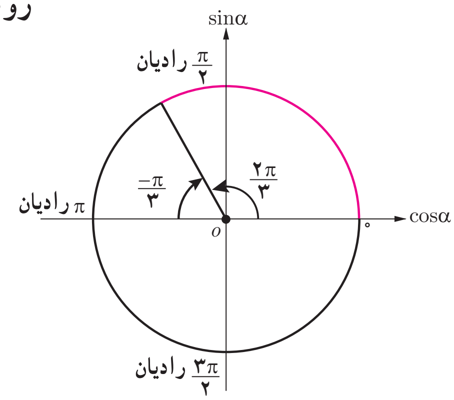
$$\cos\alpha = \sin\beta \quad , \quad \cot\alpha = \tan\beta$$

نسبت‌های مثلثاتی دو زاویه با اختلاف $\frac{\pi}{۲}$ رادیان

فعالیت

نسبت‌های مثلثاتی زاویهٔ $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان را به‌دست آورید.

چون انتهای کمان زاویهٔ $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان در ربع دوم واقع است، به دو روش می‌توان نسبت‌های مثلثاتی آن را یافت.



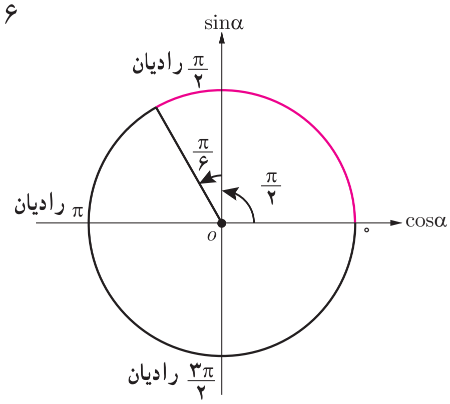
روش اول ــ زاویه $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان و $\frac{\pi}{۳}$ رادیان مکمل یکدیگرند؛ یعنی $\frac{۲\pi}{۳} = \pi - \frac{\pi}{۳}$. بنابراین :

$$\sin\frac{۲\pi}{۳} = \sin(\pi - \frac{\pi}{۳}) = \text{..........} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos\frac{۲\pi}{۳} = \text{..........} = -\cos\frac{\pi}{۳} = \text{..........}$$

$$\tan\frac{۲\pi}{۳} = \text{..........} = \text{..........} = \text{..........}$$

$$\cot\frac{۲\pi}{۳} = \text{..........} = \text{..........} = -\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$



روش دوم ــ اختلاف دو زاویهٔ $\frac{۲\pi}{۳}$ رادیان و $\frac{\pi}{۶}$ رادیان برابر با $\frac{\pi}{۲}$ رادیان است؛ یعنی $\frac{۲\pi}{۳} = \frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۶}$. بنابراین با توجه به علامت نسبت‌های مثلثاتی در ربع دوم :

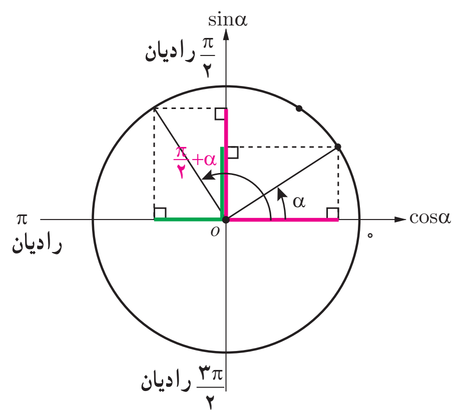
$$\sin\frac{۲\pi}{۳} = \sin(\frac{\pi}{۲} + \frac{\pi}{۶}) = \cos\frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\cos\frac{۲\pi}{۳} = \cos(\text{..........}) = -\sin\text{..........} = -\frac{۱}{۲}$$

$$\tan\frac{۲\pi}{۳} = \text{..........} = -\cot\frac{\pi}{۶} = \text{..........}$$

$$\cot\frac{۲\pi}{۳} = \text{..........} = \text{..........} = \text{..........}$$

در حالت کلی :



$$\sin(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = -\sin\alpha$$

$$\tan(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = -\cot\alpha$$

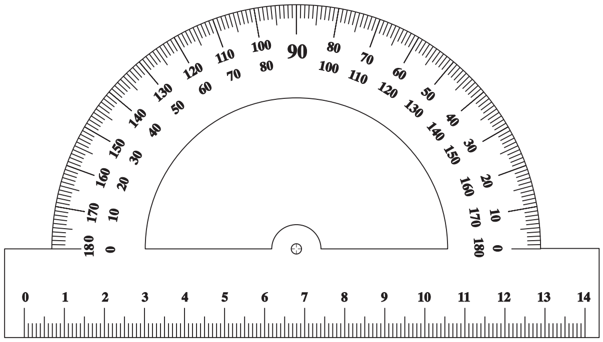
$$\cot(\frac{\pi}{۲} + \alpha) = -\tan\alpha$$

کار در کلاس

نسبت‌های مثلثاتی زاویه ۱۳۵° را به دو روش به‌دست آورید.

کار در کلاس

به کمک نقاله سؤالات زیر را پاسخ دهید :



۱ سینوس کدام دو زاویه برابر است؟ (مثلاً $\sin 10^\circ = \sin 170^\circ$)

۲ اختلاف کدام دو زاویه $\frac{\pi}{2}$ رادیان $= 90^\circ$ می‌شود؟
نسبت‌های مثلثاتی یک نمونه را به دست آورید.

۳ آیا دو زاویه می‌توان یافت که دارای کسینوس یکسان باشند؟ چرا؟

۴ نسبت‌های مثلثاتی زاویه 180° را از روی مکمل آن بیابید.

۵ نسبت‌های مثلثاتی زاویه 135° را از روی مکمل آن بیابید.

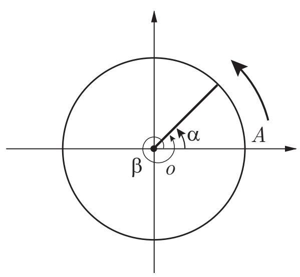
نسبت‌های مثلثاتی زوایا با مجموع یا تفاضل $2k\pi$ رادیان (مضارب زوج π رادیان)

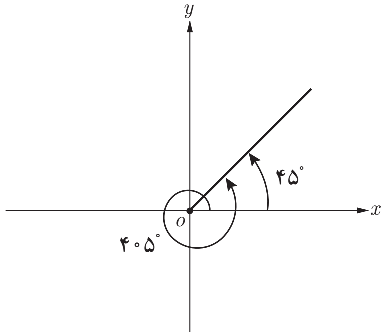
فعالیت

یادآوری می‌کنیم برای رسم زاویه در دایرهٔ مثلثاتی نقطهٔ A در شکل مقابل مبدأ حرکت است. برخی از زوایا از یک دور کامل دایرهٔ مثلثاتی یعنی 360° بزرگ‌ترند مانند زاویهٔ 405°.
برای رسم چنین زاویه‌ای ابتدا در جهت مثلثاتی یک دور کامل را طی می‌کنیم؛ سپس ادامهٔ زاویه را که به اندازه 45° است رسم می‌کنیم. در این حالت دو زاویه 405° و 45° را هم انتها می‌نامیم.
دو زاویهٔ α و β را هم انتها گوییم؛ هرگاه اضلاع انتهایی آنها بر هم منطبق شود (شکل مقابل).
اگر دو زاویه هم انتها باشند، اختلاف آنها مضرب زوجی از π رادیان یا 180° است. مثلاً

خواندنی

دانشمندان ایرانی ـ اسلامی نقش مؤثری در پیشرفت علم مثلثات داشته‌اند. در اوایل قرن نهم میلادی محمدبن موسی خوارزمی جداول دقیقی از نسبت‌های مثلثاتی سینوس، کسینوس و تانژانت را معرفی کرد. وی همچنین در موضوع مثلثات روی کره پیشگام بود. در قرن دهم میلادی ابوالوفا بوزجانی جداول نسبت‌های مثلثاتی را توسعه داد و روابط جدیدی برای محاسبهٔ نسبت‌های مثلثاتی و حل مثلث ارائه کرد. در موضوع روش مثلث‌بندی، ریاضی‌دانان مسلمان اولین افرادی بودند که سهم بسزایی در توسعهٔ آن داشتند از جملهٔ آنها ابوریحان بیرونی در اوایل قرن یازدهم میلادی بود. وی روش مثلث‌بندی را برای اندازه‌گیری کرهٔ زمین و محاسبه فاصلهٔ بین مکان‌های مختلف معرفی کرد. در اواخر قرن یازدهم میلادی عمر خیام با به‌کارگیری جدول‌های مثلثاتی معادلات درجه سوم را حل کرد. در قرن سیزدهم میلادی خواجه نصیرالدین طوسی اولین فردی بود که مثلثات را به‌عنوان یک سبک ریاضی در کتاب خود به نگارش درآورد. وی که یک ستاره‌شناس بود، به مثلث کروی توجه ویژه‌ای کرد و قوانینی را در این شاخه ارائه نمود. در قرن پانزدهم میلادی غیاث‌الدین جمشید کاشانی قوانین جدیدی را در موضوع حل مثلث و مثلث‌بندی مطرح کرد. وی همچنین مقادیر تابع سینوس در جدول توابع مثلثاتی را تا ۸ رقم اعشار برای زوایای $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ, \ldots, 90^\circ$ محاسبه کرد. وی عدد پی را تا ۱۶ رقم اعشاری ارائه نمود.





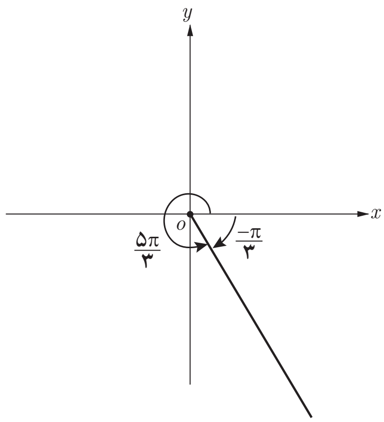
زاویه‌های ۴۰۵° و ۴۵° هم انتها هستند؛ زیرا $۴۰۵^\circ - ۴۵^\circ = ۳۶۰^\circ$ (شکل سمت راست) در این حالت نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های ۴۰۵° و ۴۵° یکسان‌اند. چون انتهای کمان زاویهٔ ۴۵° در ربع اول است، بنابراین :

$\sin ۴۰۵^\circ = \sin(۳۶۰^\circ + ۴۵^\circ) = \sin ۴۵^\circ = \dots\dots$

$\cos ۴۰۵^\circ = \dots\dots\dots\dots = \dots\dots = \dots\dots$

$\tan ۴۰۵^\circ = \dots\dots\dots\dots = \dots\dots = \dots\dots$

$\cot ۴۰۵^\circ = \dots\dots\dots\dots = \dots\dots = \dots\dots$



حال همین بررسی را روی زاویهٔ $\frac{۵\pi}{۳}$ رادیان انجام دهید؛ چون $\dots\dots - ۲\pi = \frac{۵\pi}{۳}$ بنابراین دو زاویه $\dots\dots$ و $\frac{۵\pi}{۳}$ رادیان هم انتها هستند (شکل سمت راست).

چون انتهای کمان زاویهٔ $\frac{۵\pi}{۳}$ رادیان در ربع چهارم است؛ بنابراین :

$\sin \frac{۵\pi}{۳} = \sin(۲\pi - \frac{\pi}{۳}) = \sin(\frac{-\pi}{۳}) = \dots\dots\dots$

$\cos \frac{۵\pi}{۳} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

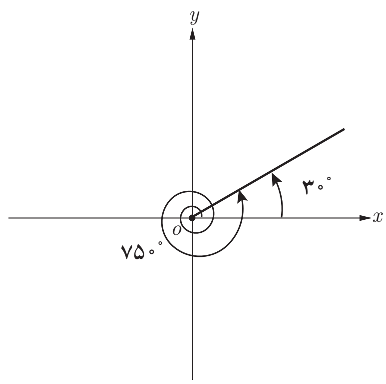
$\tan \frac{۵\pi}{۳} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

$\cot \frac{۵\pi}{۳} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

در حالت کلی برای هر عدد صحیح k،

$\sin(۲k\pi - \alpha) = -\sin\alpha$	$\sin(۲k\pi + \alpha) = \sin\alpha$
$\cos(۲k\pi - \alpha) = \cos\alpha$	$\cos(۲k\pi + \alpha) = \cos\alpha$
$\tan(۲k\pi - \alpha) = -\tan\alpha$	$\tan(۲k\pi + \alpha) = \tan\alpha$
$\cot(۲k\pi - \alpha) = -\cot\alpha$	$\cot(۲k\pi + \alpha) = \cot\alpha$

کار در کلاس



مطابق نمونه هر یک از نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های زیر را مشخص کنید. (شکل سمت راست)

$\sin ۷۵۰^\circ = \sin(۲\times۳۶۰^\circ + ۳۰^\circ) = \sin ۳۰^\circ = \frac{۱}{۲}$

$\tan(-۳۱۵^\circ) = -\tan(۳۱۵^\circ) = -\tan(۳۶۰^\circ - ۴۵^\circ) = -\tan(-۴۵^\circ) = -(-\tan ۴۵^\circ) = \tan ۴۵^\circ = ۱$

۱) $\cos ۳۰۰^\circ = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

۲) $\sin ۴۲۰^\circ = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

۳) $\tan(-۲۲۵^\circ) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

۴) $\cot(-۳۳۰^\circ) = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$

۵ $\sin\frac{۱۱\pi}{۴} =$ ....

۶ $\cos(\frac{-۷\pi}{۴}) =$ ....

تمرین

۱ حاصل هر یک از عبارت‌های زیر را به دست آورید :

الف) $\tan ۱۳۵^\circ + \cot ۱۲۰^\circ =$ ب) $\cos(-۲۱۰^\circ)+\cot(۲۴۰^\circ)=$

پ) $\sin ۶۳۰^\circ + \tan(-۵۴۰^\circ) =$

ت) $\cos(-۷۲۰^\circ) + \cot(-۶۰۰^\circ) + \tan ۷۲۰^\circ - \tan(-۶۰۰^\circ) =$

ث) $\sin(\frac{۲۵\pi}{۳}) - \cos(\frac{۲۳\pi}{۴}) =$ ج) $\dfrac{\sin\frac{۳\pi}{۴} - \cos\frac{۵\pi}{۶}}{\sin(\frac{-۳\pi}{۴}) + \tan(\frac{-۴\pi}{۳})} =$

۲ جدول زیر را کامل کنید :

زاویه x / نسبت	۱۲۰°	۱۳۵°	۱۵۰°	۲۱۰°	۲۲۵°	۲۴۰°	۳۰۰°	۳۳۰°
$\sin x$								
$\cos x$								
$\tan x$								
$\cot x$								

۳ بدون استفاده از ماشین حساب درستی تساوی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $\sin ۸۴۰^\circ = \sin ۶۰^\circ$ ب) $\cos(-۳۲۴^\circ) = \cos ۳۶^\circ$

پ) $\tan(-۱۰۰۰^\circ) = \tan ۸۰^\circ$ ت) $\sin ۸۷۵^\circ = \sin ۱۵۵^\circ$

۴ در تساوی زیر به جای x یک زاویهٔ مناسب قرار دهید :

$\sin x = \cos(۲۰^\circ + x)$

آیا برای زاویهٔ x تنها یک مقدار می‌توان یافت؟ جواب خود را با جواب‌های دوستان خود مقایسه کنید.

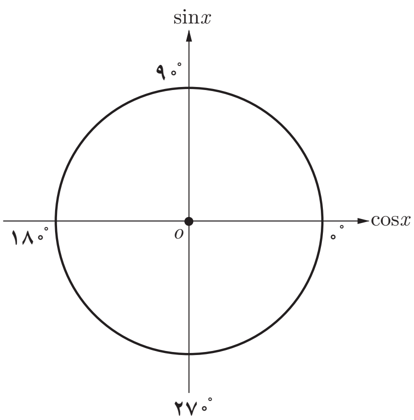
خواندنی (کار با ماشین حساب)

با استفاده از ماشین حساب مطابق نمونه نسبت‌های مثلثاتی زاویه‌های $\frac{\pi}{۸}$ رادیان و $\frac{۳\pi}{۸}$ رادیان را به طور تقریبی بیابید. (ماشین حساب باید در حالت رادیان باشد).

$\sin\frac{۳\pi}{۸} = \cos\frac{\pi}{۸} \simeq ۰/۹۲۳۹$

حاصل هر یک از نسبت‌های مثلثاتی زیر را با ماشین حساب به طور تقریبی به دست آورید.

$\tan ۲۰^\circ$ و $\sin\frac{\pi}{۱۵}$ و $\cos ۱۰۵^\circ$ و $\tan\frac{۳\pi}{۴}$ و $\cos\frac{۵\pi}{۹}$ و $\tan ۱۷۰^\circ$



درس سوم

توابع مثلثاتی

توابعی نظیر تابع سینوس با ضابطهٔ $y=\sin x$ و تابع کسینوس با ضابطهٔ $y=\cos x$ نمونه‌هایی از توابع مثلثاتی‌اند که در این درس با نمودار آنها آشنا می‌شوید.

رسم تابع سینوس

فعالیت

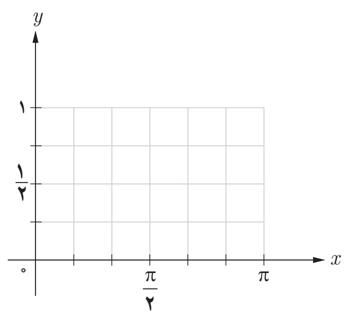
مختصات نقطه	$y=\sin x$	x
$(۰,۰)$	۰	۰
...	...	—
...	...	$\frac{\pi}{۲}$
...	...	$\frac{۵\pi}{۶}$
...	...	π

۱ جدول روبه‌رو را کامل کنید.

مجموعهٔ زوج‌های مرتب حاصل در جدول مقابل یک تابع به صورت زیر مشخص می‌کند.

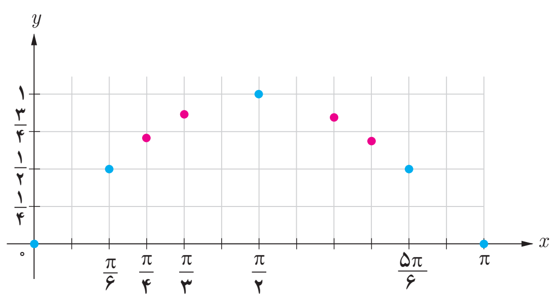
$$f=\left\{(۰,۰),(\frac{\pi}{۶},\cdots),(\cdots,\cdots),(\cdots,\cdots),(\cdots,\cdots)\right\}$$

۲ نقاط حاصل در جدول را در شکل زیر مشخص کنید.

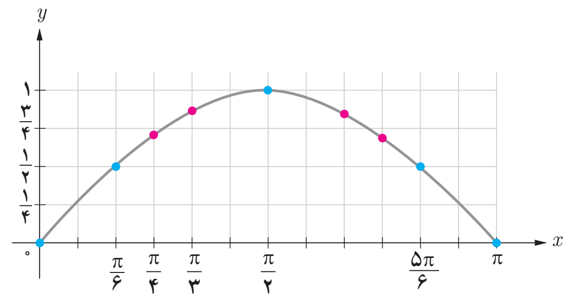


۳ با افزودن نقاط $(\frac{\pi}{۴}$ و $\frac{\sqrt{۲}}{۲})$، $(\frac{\pi}{۳}$ و $\cdots)$، $(\frac{۲\pi}{۳}$ و $\frac{\sqrt{۳}}{۲})$ و $(\frac{۳\pi}{۴}$ و $\cdots)$ به جدول بالا، شکل زیر به‌دست می‌آید.

(با فرض $\sqrt{۲}\simeq ۱/۴$ و $\sqrt{۳}\simeq ۱/۷$)

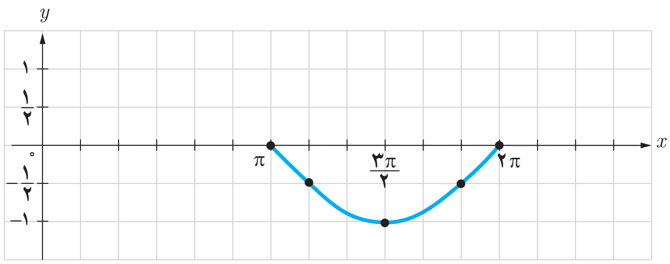


۴ نقاط حاصل در شکل را به‌ترتیب به یکدیگر وصل می‌کنیم تا شکل مقابل به‌دست بیاید. با افزودن تعداد نقاط جدول فوق در بازه $[۰ , \pi]$ این شکل به‌طور دقیق‌تری به‌دست می‌آید. شکل حاصل نمودار تابع سینوس با ضابطهٔ $y=\sin x$ را در این بازه مشخص می‌کند.

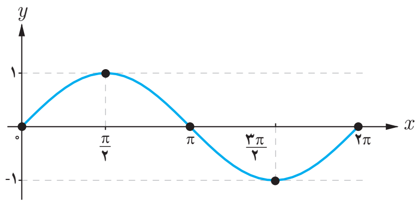


۵ مراحل صفحهٔ قبل را برای رسم نمودار تابع سینوس در بازهٔ $[\pi$ و $۲\pi]$ انجام دهید. برای این کار ابتدا جدول زیر را کامل کنید؛ سپس نقاط به دست آمده در جدول را در صفحه مختصات مطابق شکل زیر مشخص و آنها را به ترتیب به یکدیگر وصل کنید.

مختصات نقطه	$y=\sin x$	x
$(\pi,۰)$	۰	π
...	...	$\frac{۷\pi}{۶}$
...	...	$\frac{۳\pi}{۲}$
...	$\frac{-۱}{۲}$	$\frac{۱۱\pi}{۶}$
...	...	۲π



۶ با توجه به شکل‌های فوق، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\sin x$ در بازهٔ $[۰$ و $۲\pi]$ در شکل زیر رسم شده است. حال با توجه به این شکل جدول زیر را دربارهٔ مقدار این تابع در هر بازه تکمیل کنید.



$[\frac{۳\pi}{۲},۲\pi]$	$[\pi , \frac{۳\pi}{۲}]$	$[\frac{\pi}{۲},\pi]$	$[۰ , \frac{\pi}{۲}]$
			مقدار تابع سینوس از ۰ به ۱ افزایش می‌یابد.
			مقدار تابع سینوس در ربع اول مثبت است.

۷ با توجه به رابطهٔ $\sin (x+۲k\pi) = \sin x$، $k\in\mathbb{Z}$، که در درس قبل آشنا شدید می‌توان گفت:

$\sin (x+۲\pi)= \sin x$

یعنی مقدار تابع سینوس با اضافه کردن ۲π رادیان به کمان آن تغییری نمی‌کند. بنابراین نمودار تابع سینوس در بازه‌های $[۰$ و $۲\pi]$ و $[۲\pi , ۴\pi]$ یکسان است.

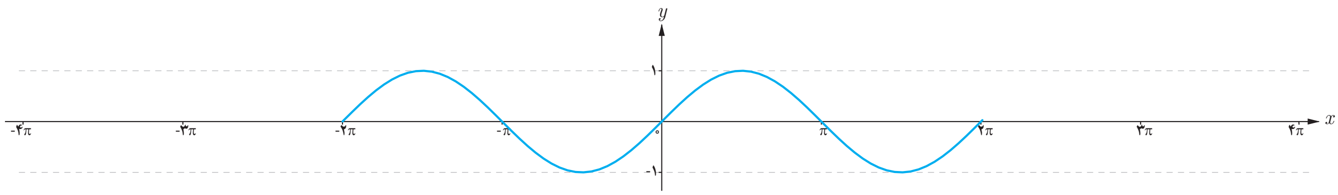
همچنین داریم:

$\sin (x-۲\pi)= \sin x$

یعنی مقدار تابع سینوس با کم کردن ۲π رادیان از کمان آن تغییری نمی‌کند. در نتیجه نمودار تابع سینوس در بازه‌های $[۰ , ۲\pi]$

و .... یکسان است. در حالت کلی چون مقدار تابع سینوس با اضافه یا کم کردن مضارب زوج π رادیان به کمان آن تغییر نمی‌کند، نمودار تابع سینوس در بازه‌های $[2k\pi$ و $(2k+2)\pi]$، $k\in\mathbb{Z}$، یکسان است. به این ترتیب منحنی این تابع که در بازه $[0 , 2\pi]$ رسم شده در بازه‌های $[2\pi , 4\pi]$، $[4\pi , \ldots]$، $[-2\pi , \ldots]$، $[-4\pi , \ldots]$ تکرار می‌شود.

در شکل زیر نمودار تابع سینوس در ۲ تکرار رسم شده است. این نمودار را برای ۴ تکرار کامل کنید.



۸ با توجه به شکل بالا جاهای خالی را دربارهٔ ویژگی‌های تابع سینوس با ضابطهٔ $y=\sin x$ کامل کنید.

الف) دامنهٔ تابع سینوس ..... و برد آن ..... است.

ب) مقدار تابع سینوس در طول‌های $x=k\pi$، $k\in\mathbb{Z}$، برابر با ..... است.

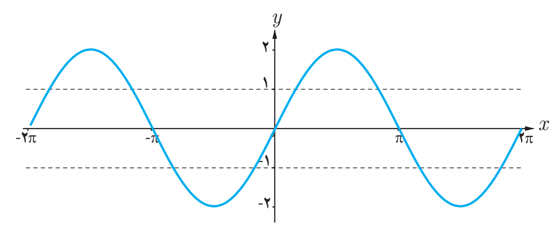
پ) حداکثر مقدار تابع سینوس برابر با ..... است که در نقاطی به طول‌های $x=\frac{\pi}{2}$، $x=$ .....، $x=$ .....، $x=$ ..... و در حالت کلی $x=\frac{\pi}{2}+2k\pi$، $k\in\mathbb{Z}$، به‌دست می‌آید.

ت) حداقل مقدار تابع سینوس برابر با ..... است که در نقاطی به طول‌های $x=\frac{3\pi}{2}$، $x=$ .....، $x=$ .....، $x=$ ..... و در حالت کلی $x=\frac{3\pi}{2}+2k\pi$، $k\in\mathbb{Z}$، به‌دست می‌آید.

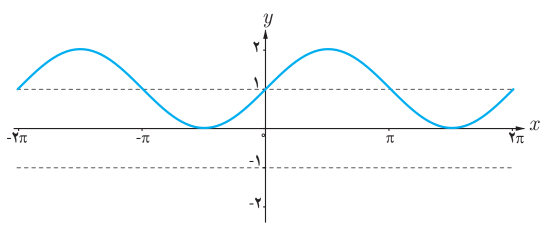
کار در کلاس

هر یک از توابع با ضابطه‌های داده شده دارای کدام نمودار است؟

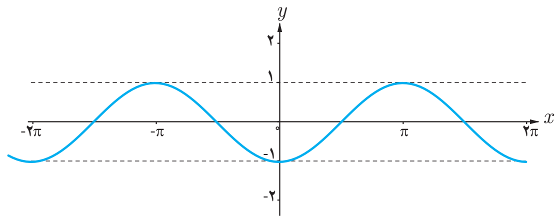
۱ $y=2\sin x$ ۲ $y=\sin(x-\frac{\pi}{2})$ ۳ $y=\sin x+1$ ۴ $y=-\sin x+1$



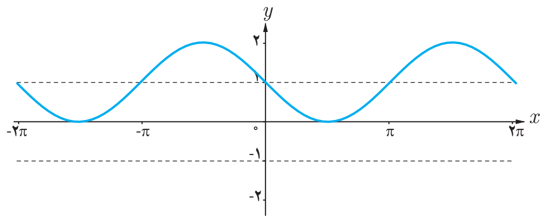
(الف)



(ب)



(پ)



(ت)

رسم تابع کسینوس

فعالیت

۱ جدول زیر را کامل کنید.

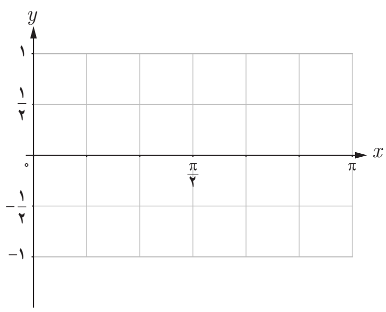
مختصات نقطه	$y=\cos x$	x
$(۰,۱)$	۱	۰
$(\frac{\pi}{۴},۰/۷)$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}\simeq ۰/۷$	$\frac{\pi}{۴}$
....	....	$\frac{\pi}{۲}$
....	....	$\frac{۳\pi}{۴}$
....	....	π

به این ترتیب مجموعه زوج‌های مرتب زیر به‌دست می‌آید.

$f=\{(۰,۱),(\cdots\cdots,\cdots\cdots),(\cdots\cdots,\cdots\cdots),(\cdots\cdots,\cdots\cdots),(\cdots\cdots,\cdots\cdots)\}$

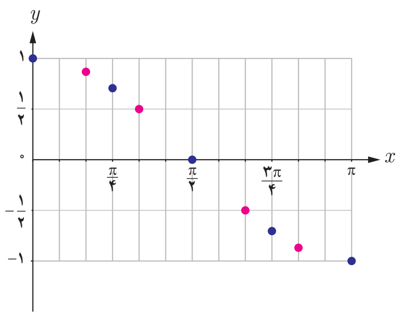
آیا این مجموعه یک تابع را مشخص می‌کند؟

۲ نقاط جدول بالا را در این شکل مشخص کنید.

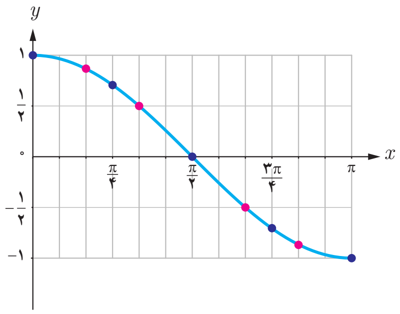


۳ نقاط به طول‌های $x=\frac{\pi}{۶},\frac{\pi}{۳},\frac{۲\pi}{۳},\frac{۵\pi}{۶}$ را به جدول بالا اضافه کنید تا شکل زیر به‌دست آید. ($\sqrt{۳}\simeq ۱/۷$).

x	$\frac{\pi}{۶}$	$\frac{\pi}{۳}$	$\frac{۲\pi}{۳}$	$\frac{۵\pi}{۶}$
$y=\cos x$	...	...	$\frac{-۱}{۲}$	...

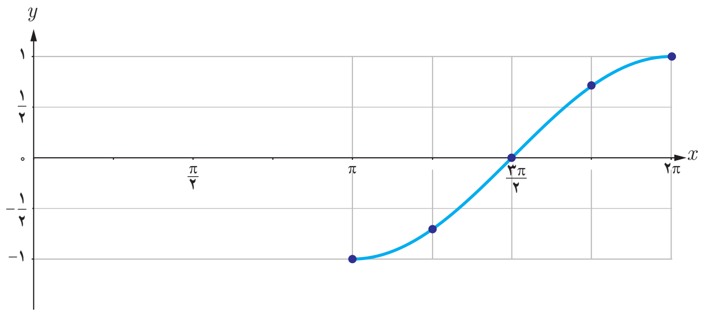


۴ نقاط شکل صفحهٔ قبل را به ترتیب به یکدیگر وصل می‌کنیم تا شکل مقابل به‌دست آید. این شکل نمودار تابع کسینوس با ضابطه $y=\cos x$ را در بازهٔ $[\circ\,,\pi]$ مشخص می‌کند.

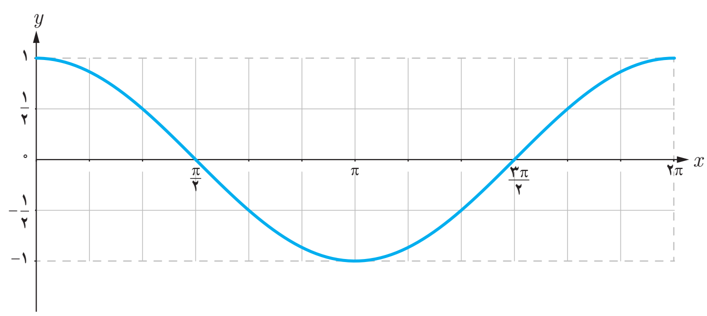


۵ جدول زیر را کامل کنید تا نمودار تابع کسینوس در بازهٔ $[\pi$ و $۲\pi]$ به‌صورت شکل مقابل به‌دست آید.

x	π	$\frac{۵\pi}{۴}$	$\frac{۳\pi}{۲}$	$\frac{۷\pi}{۴}$	۲π
y	-۱	...	...	...	۱

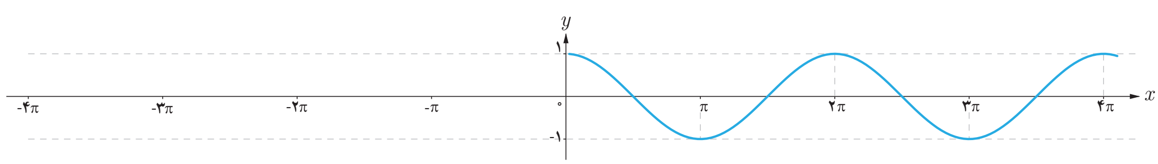


۶ با توجه به مراحل بالا نمودار تابع کسینوس با ضابطهٔ $y=\cos x$ در بازهٔ $[\circ\,,۲\pi]$ در شکل زیر رسم شده است. با توجه به این شکل جدول زیر را کامل کنید.



$[\circ,\frac{\pi}{۲}]$	$[\frac{\pi}{۲},\pi]$	$[\pi,\frac{۳\pi}{۲}]$	$[\frac{۳\pi}{۲},۲\pi]$
مقدار تابع کسینوس از ۱ به ۰ کاهش می‌یابد.			
مقدار تابع کسینوس در ربع اول مثبت است.			

۷ تابع کسینوس دارای نمودار یکسانی در بازه‌های $[\circ\,,۲\pi]$، $[۲\pi\,,۴\pi]$، $[-۲\pi\,,\circ]$ و $[-۴\pi\,,-۲\pi]$ است. در شکل زیر نمودار تابع کسینوس در بازهٔ $[\circ\,,۴\pi]$ رسم شده است. شکل را کامل کنید.



۸ با توجه به شکل صفحهٔ قبل جاهای خالی را در خصوص ویژگی‌های تابع با ضابطهٔ $y=\cos x$ کامل کنید.

الف) دامنهٔ تابع کسینوس .... و برد آن .... است.

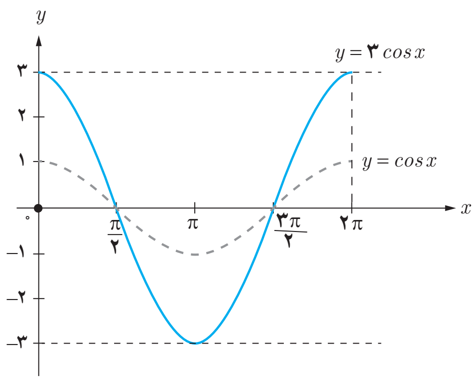
ب) مقدار تابع کسینوس در طول‌های .... برابر با صفر است.

پ) حداکثر مقدار تابع کسینوس .... است که در طول‌های $x=۲k\pi$، $k\in\mathbb{Z}$، به‌دست می‌آید.

ت) حداقل مقدار تابع کسینوس ...... است که در طول‌های .... به‌دست می‌آید.

کار در کلاس

شکل زیر نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۳\cos x$ را نشان می‌دهد. به‌طور مشابه هر یک از توابع با ضابطه‌های داده شده را در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$، با استفاده از نمودار تابع کسینوس رسم کنید.



۱) $y=\cos(x+\frac{\pi}{۲})$

۲) $y=\cos x-۱$

۳) $y=۱-\frac{۱}{۲}\cos x$

۴) $y=\cos(x-\frac{\pi}{۲})+۱$

تمرین

۱ آیا نمودارهای هر جفت از توابع با ضابطه‌های زیر بر هم منطبق‌اند یا خیر؟

۱) $y=\sin x$, $y=\cos(x-\frac{\pi}{۲})$

۲) $y=\cos x$, $y=\sin(\frac{\pi}{۲}+x)$

۳) $y=\cos x$, $y=\cos(۲\pi-x)$

۴) $y=\sin x$, $y=\sin(۵\pi-x)$

۲ نمودار هر یک از توابع با ضابطه‌های زیر را در دستگاه مختصات در بازه‌های داده شده رسم کنید.

۱) $y=\frac{۱}{۲}\sin x$, $[۰,۲\pi]$

۲) $y=۲\cos x+۱$, $[-۲\pi,۲\pi]$

۳) $y=۱-\sin x$, $[-۲\pi,۲\pi]$

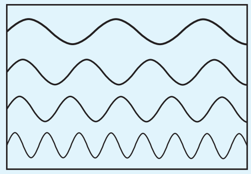
۴) $y=-۱+\cos x$, $[-۴\pi,۴\pi]$

۵) $y=۱+\sin(x+\frac{\pi}{۴})$, $[۰,۲\pi]$

۶) $y=\cos(x-\frac{\pi}{۲})$, $[۲\pi,۴\pi]$

خواندنی

اصوات به‌صورت مخلوطی از موج‌های سینوسی شکل با بسامدهای مختلف می‌توانند نمایش داده شوند.



خواندنی

طول روز به‌طور تقریبی در ایران در t امین روز سال برحسب ساعت با استفاده از تابع مثلثاتی H با ضابطهٔ زیر مدل‌سازی می‌شود.

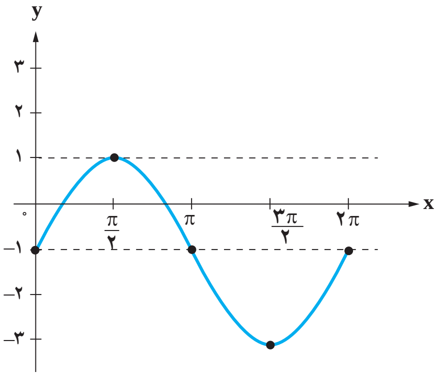
$$H(t)=۱۲+۲/۴\sin\frac{۲\pi}{۳۶۵}(t-۱)$$

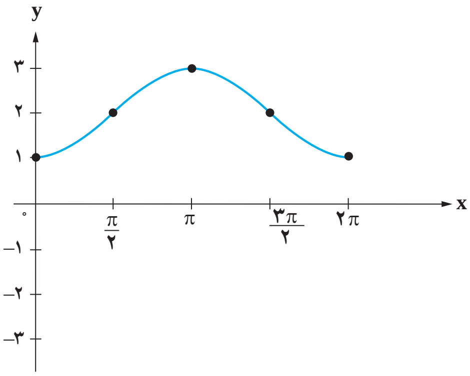
در این رابطه عدد ۱ که به‌معنای اولین روز سال یعنی اولین روز فروردین ماه است؛ اعتدال بهاری نام دارد. در این روز، مدت زمان روز و شب در سراسر کرهٔ زمین با هم برابر است. همچنین عدد ۱۲ تعداد ساعات روشنایی در یک روز به‌طور متوسط است. ضریب ۲/۴ در این رابطه عددی است که اگر آن را با ۱۲ جمع یا از آن کم کنیم، طولانی‌ترین و کوتاه‌ترین مدت زمان روز در یک شبانه‌روز حاصل می‌شود که عبارت‌اند از ۱۴/۴ ساعت (اول تیر ماه) و ۹/۶ ساعت (اول دی ماه). عدد ۳۶۵ نیز تعداد روزهای سال است. به‌عنوان مثال طول روز در اول مهر ماه که ۱۸۷ امین روز سال است، تقریباً برابر است با :

$H(۱۸۷)\simeq ۱۱/۸$ ساعت

حال، شما طول تقریبی روز را در روزهای ۱۲ اردیبهشت ماه، ۱۵ مرداد ماه، ۲۲ بهمن‌ماه و ۳۰ آذر ماه به دست آورید.

۳ با توجه به نمودار توابع سینوس و کسینوس، مشخص کنید هریک از دو نمودار زیر کدام یک از ضابطه‌های داده شده را دارند. نمودار تابع با سایر ضابطه‌ها را نیز رسم کنید.





الف) $y=۲\cos x+۱$

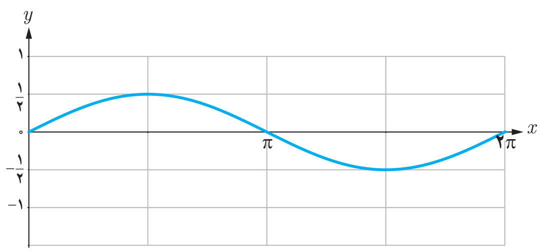
ب) $y=۲\sin x-۱$

پ) $y=۲-\cos x$

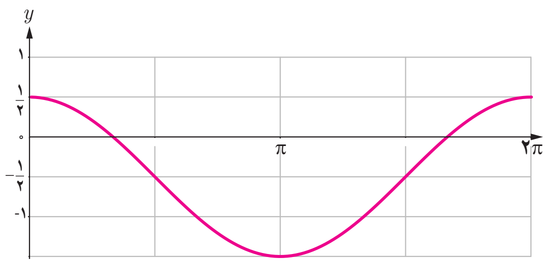
ت) $y=\sin x-۲$

۴ با ذکر دلیل مشخص کنید کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست‌اند.

الف) شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\frac{۱}{۲}\sin x$ را نشان می‌دهد.



ب) شکل زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=\cos x-\frac{۱}{۲}$ را نشان می‌دهد.



پ) برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۱+\sin x$ کافی است نمودار تابع سینوس را به اندازهٔ یک واحد در راستای محور xها انتقال دهیم.

ت) برای رسم نمودار تابع با ضابطهٔ $y=-\cos x$ کافی است نمودار تابع کسینوس را نسبت به محور xها قرینه کنیم.

فصل

۵ توابع نمایی و لگاریتمی

سنگ نوشته‌های گنج‌نامه (همدان) نوشتارهایی از دوران هخامنشی بر دل صخره‌های الوند (قدمت حدوداً ۲۵۰۰ سال)

ریتون طلایی هگمتانه (کشف شده در همدان) شاهکار هنر فلزکاری عصر هخامنشیان (قدمت بیش از ۲۵۰۰ سال)

آیا تا به حال اندیشیده‌اید که باستان‌شناسان چگونه طول عمر یک اثر باستانی را تخمین می‌زنند؟
با استفاده از روش سال‌یابی کربن ۱۴، می‌توان عمر یک اثر باستانی را محاسبه کرد. در این روش، تعیین قدمت اثر، با یک تابع لگاریتمی مدل‌سازی می‌شود.

درس اوّل

تابع نمایی و ویژگی‌های آن

فعالیت

مسابقات جام حذفی فوتبال ایران در فصل ۹۴-۹۳ با شرکت ۳۲ تیم ودر پنج مرحله بازی از یک شانزدهم نهایی تا بازی نهایی به صورت زیر برگزار شد. همان طور که می‌بینید، در هر مرحله تیم برنده به مرحلهٔ بعدی می‌رود وتیم بازنده حذف می‌شود؛ به همین دلیل جام حذفی نامیده می‌شود.

۱ در بازی نهایی چند تیم حضور دارند؟ ....

۲ در مرحلهٔ قبل از بازی نهایی چند تیم حضور دارند؟ ....

۳ تعداد تیم‌ها در هرمرحله با تعداد تیم‌ها در مرحلهٔ قبل از آن چه ارتباطی دارد؟ ....

۴ چه رابطه‌ای بین تعداد مراحل و تعداد کل تیم‌های شرکت کننده در این مسابقات برقرار است؟ ....

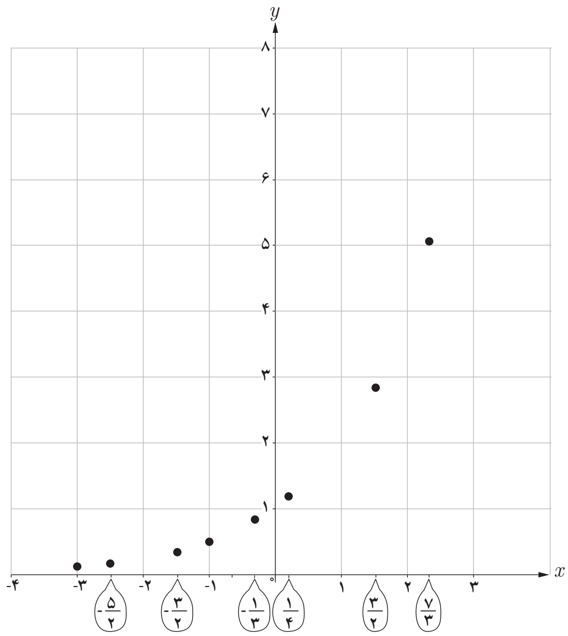
۵ باتوجه به الگوی ارائه شده درشکل، اگر تعداد مراحل برابر ۶ باشد، تعداد تیم‌های اولیه چند تاست؟ ....

۶ اگر تعداد مراحل x و تعداد کل تیم‌ها y باشد، چه رابطه‌ای بین x و y برقرار است؟ ....

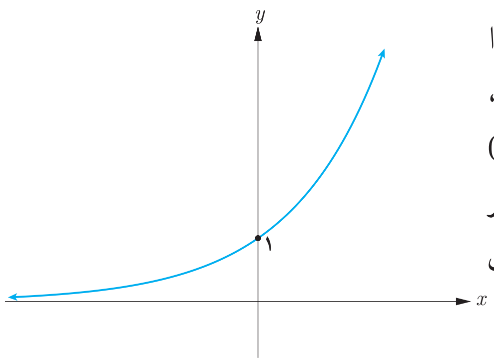
فعالیت

جدول زیر را کامل و نقاط به‌دست آمده را در نمودار مشخص کنید. مقادیر به صورت تقریبی نوشته شده است.

x	-4	-3	$-\frac{5}{2}$	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{7}{3}$	3
2^x	....	۰/۱۲	۰/۱۸	....	۰/۳۵	۰/۵	۰/۷۹	...	۱/۱۹	...	۲/۸۳	....	۵/۰۴	....



دیدیم که برای هر عدد گویای a، مقداری برای 2^a به‌دست می‌آید و نقطهٔ $(a, 2^a)$ را می‌توان در دستگاه مختصات نشان داد. این موضوع برای اعداد گنگ نیز برقرار است، یعنی برای هر عدد گنگ مانند b نیز مقداری برای 2^b خواهیم داشت و مختصات $(b, 2^b)$ نیز نقطه‌ای را در دستگاه مختصات نمایش می‌دهد. اگر برای تمام اعداد حقیقی r، مقادیر 2^r را به‌دست آوریم و نقاط $(r, 2^r)$ را در دستگاه مختصات مشخص کنیم، نمودار مقابل به‌دست خواهد آمد.



توان‌های حقیقی

در کتاب سال دهم، به ازای هر عدد حقیقی مثبت a $(a\neq 1)$ و عدد گویای $\frac{m}{n}$، مقدار $a^{\frac{m}{n}}$ را تعریف کردیم و ویژگی‌های مقدماتی آن را به‌دست آوردیم. این قوانین برای توان‌های حقیقی نیز برقرار است؛ یعنی اگر a و b دو عدد حقیقی مثبت و مخالف ۱ و x و y دو عدد حقیقی باشند، داریم :

الف) $a^{0}=1$ ب) $a^{-x}=\frac{1}{a^{x}}$ پ) $a^{x}.a^{y}=a^{x+y}$ ت) $(a^{x})^{y}=a^{xy}$

ث) $(ab)^{x}=a^{x}.b^{x}$ ج) $(\frac{a}{b})^{x}=\frac{a^{x}}{b^{x}}$ چ) $\frac{a^{x}}{a^{y}}=a^{x-y}$

کار در کلاس

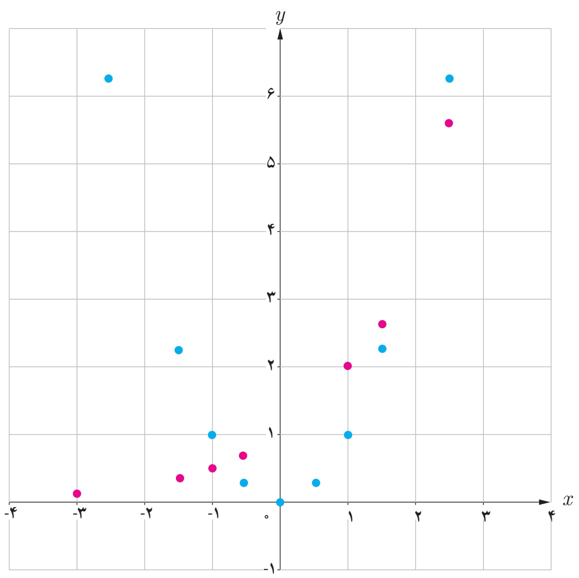
۱ جدول‌های زیر را تکمیل کنید. (مقادیر به‌صورت تقریبی نوشته شده است.)

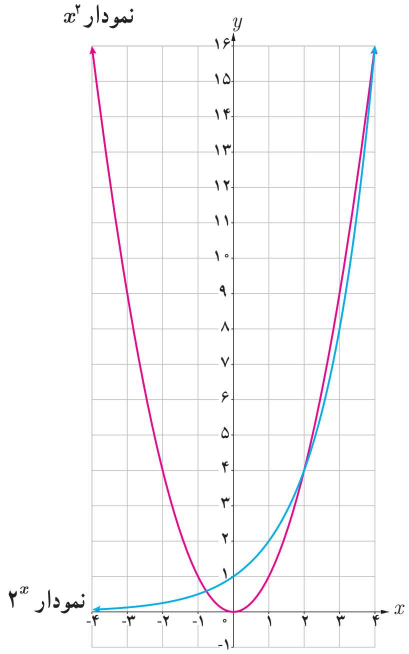
x	$-\frac{5}{2}$	....	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
$y=x^{2}$	۶/۲۵	۴	۲/۲۵	۱	۰/۲۵	۰	۰/۲۵	۱	۲/۲۵	....	۶/۲۵

x	-3	-2	$-\frac{3}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$\frac{3}{2}$	2	$\frac{5}{2}$
$y=2^{x}$	۰/۱۲	....	۰/۳۵	۰/۵	۰/۷۱	....	....	۲	۲/۸۳	....	۵/۶۶

۲ حال، این دو نمودار را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. در چند نقطه مقادیر 2^{x} و x^{2} با هم مساوی‌اند؟

۳ در x^{2}، متغیر در .... و عدد ثابت در .... است؛ ولی در 2^{x}، .... در توان و .... درپایه است.



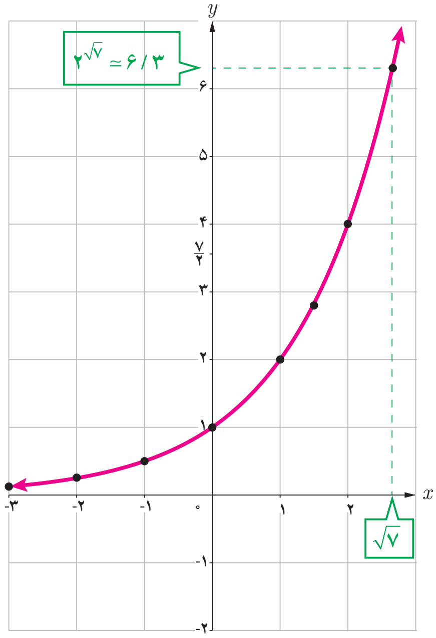


هر تابع با ضابطهٔ $f(x)=a^x$ که در آن $a\in\mathbb{R}$ و $a>۰$, $a\neq ۱$ یک تابع نمایی نامیده می‌شود.

مثال : توابع با ضابطه‌های $y=۲^x$ و $y=۳^x$ و $y=(\frac{۱}{۲})^x$ و $y=(\frac{۱}{۴})^x$ نمونه‌ای از توابع نمایی هستند.

فعالیت

درشکل مقابل نمودار تابع نمایی با ضابطهٔ $y=۲^x$ رسم شده است.



۱ محل تقاطع این نمودار با محور عرض‌ها چه نقطه‌ای است؟ ....

۲ دامنه و برد این تابع را به صورت بازه بنویسید.

....

۳ آیا این تابع یک‌به‌یک است؟ چرا؟..

۴ عدد $\sqrt{۲}$ را روی محور xها مشخص کنید و به کمک نمودار، مقدار $۲^{\sqrt{۲}}$ را به‌صورت تقریبی به‌دست آورید. ....

۵ عدد $\frac{۷}{۲}$ روی محور yها مشخص شده است. با استفاده از نمودار، مقدار تقریبی عدد a را روی محور طول‌ها به‌دست آورید؛ به طوری که $۲^a\simeq\frac{۷}{۲}$. ....

۶ اعداد زیر را از کوچک به بزرگ مرتب کنید.

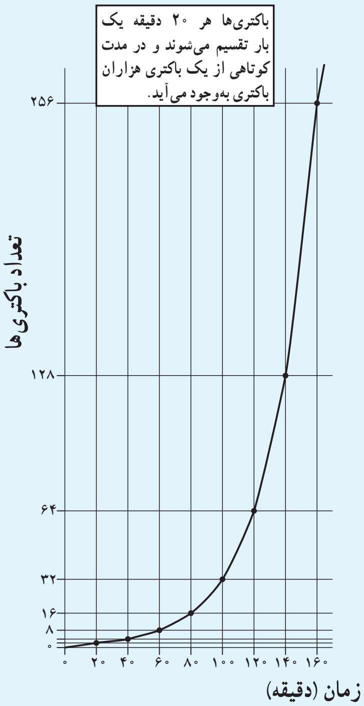
$۲^{\sqrt{۵}}$, $۲^{\frac{۳}{۲}}$, $۲^{\frac{۵}{۲}}$, $۲^{۰/۳}$, $۲^{۵}$, $۲^{-۰/۴}$, $۲^{-۱}$

....

۷ درحالت کلی اگر $x<y$، چه رابطه‌ای بین ۲^x و ۲^y برقرار است؟ ....

خواندنی

بیشتر باکتری‌ها در فاصلهٔ ۲۰ دقیقه به حداکثر رشد خود می‌رسند و قادر به تولیدمثل می‌شوند. در شرایط محیطی مساعد، باکتری با سرعت زیادی تکثیر می‌شود. مثلاً یک باکتری بعد از ۲۰ دقیقه به دو باکتری تبدیل می‌شود. ۲۰ دقیقه بعد، از آن دو باکتری، چهار باکتری به‌وجود می‌آید و به همین ترتیب تعداد باکتری‌ها به ۸، ۱۶، ۳۲، ۶۴، ۱۲۸، ۲۵۶ و ... می‌رسد. اگر این روش تکثیر باکتری‌ها تا ۲۴ ساعت ادامه یابد، از یک باکتری، توده‌ای از باکتری به وزن ۲۰۰۰ تن به‌وجود خواهد آمد! باکتری‌ها از طریق تولید سم یا تخریب سلول‌های بدن، باعث بیماری می‌شوند و به بدن آسیب می‌رسانند.




باکتری سل

خواندنی

در اغلب ماشین حساب‌ها دکمه $\boxed{x^y}$ (یا y^x) وجود دارد که با استفاده از آن می‌توانید مقادیر اعداد توان‌دار را به دست آورید. برای مثال جهت محاسبهٔ $۲^۵$، ابتدا عدد ۲ را وارد می‌کنید؛ سپس دکمهٔ $\boxed{x^y}$ و بعد عدد ۵ و سپس دکمهٔ تساوی را فشار می‌دهید که عدد ۳۲ ظاهر می‌شود.

اگر عدد توان، طبیعی نبود، آن را داخل پرانتز قرار می‌دهیم. تذکر: دربرخی از ماشین حساب‌ها به‌جای دکمهٔ x^y، نمادی به صورت $\boxed{\wedge}$ وجود دارد که همان کار را انجام می‌دهد.

برای تمرین، مقادیر زیر را با استفاده از ماشین حساب به دست آورید. (تا یک رقم اعشار)

$\boxed{۲} \to \boxed{x^y} \to \boxed{(} \to \boxed{۲} \to \boxed{\sqrt{\ }} \to \boxed{)} \to \boxed{=} \to \boxed{۲/۶}$

۱) $۲^{\sqrt{۲}}$

۲) $۲^{\sqrt{۸}}$

۳) $۲^{۰/۱}$

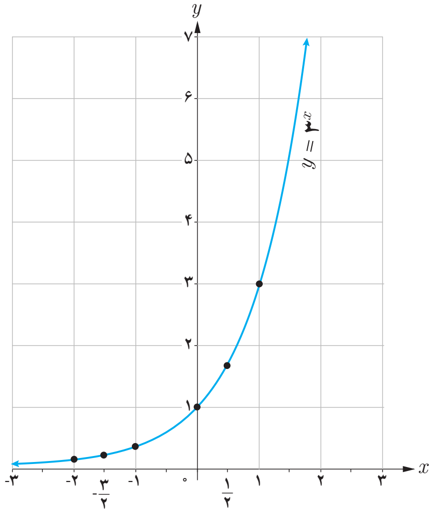
۴) $۲^{-۰/۵}$

۵) $۲^{(۱+\sqrt{۳})}$

کار در کلاس

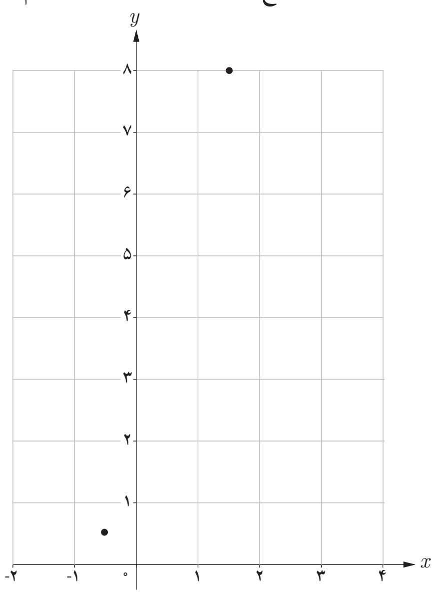
نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۳^x$ با استفاده از نقاط جدول زیر رسم شده است.

$y=۳^x$	x
۰/۱۱	-۲
۰/۱۹	$-\frac{۳}{۲}$
۰/۳۳	-۱
۱	۰
۱/۷۳	$\frac{۱}{۲}$
۳	۱



۱ جدول زیر را کامل کنید و با استفاده از آن نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۴^x$ را رسم کنید.

$y=۴^x$	x
$\frac{۱}{۴}$	.....
$\frac{۱}{۲}$	$-\frac{۱}{۲}$
.....	۰
.....	$\frac{۱}{۲}$
۸	$\frac{۳}{۲}$



۲ دامنه و برد توابع فوق را باهم مقایسه کنید. ....

۳ با استفاده از نمودار، درجاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

الف) $۳^{۲/۵}$ ◯ $۳^{\frac{۷}{۳}}$

ب) $۴^{\sqrt{۷}}$ ◯ $۴^{\sqrt{۵}}$

۴ اگر $x<y$، در جاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

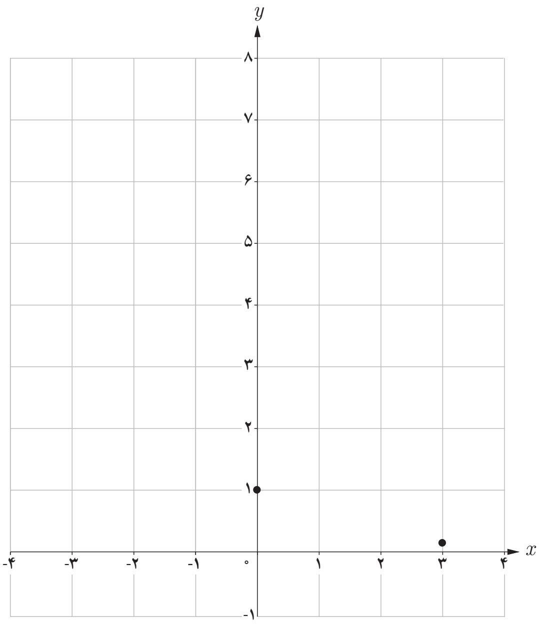
الف) ۳^x ◯ ۳^y

ب) ۴^x ◯ ۴^y

فعالیت

۱ با استفاده از جدول زیر، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(\frac{1}{2})^x$ را رسم کنید.

x	-3	-2	......	0	1	......	3
$y=(\frac{1}{2})^x$	......	......	$\sqrt{2}$	1	......	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$



۲ محل تقاطع نمودار این تابع با محور y ها چه نقطه‌ای است؟

....

۳ دامنه و برد این تابع را بنویسید.

....

۴ آیا این تابع یک‌به‌یک است؟چرا؟

....

....

۵ با استفاده از نمودار فوق، درجاهای خالی علامت مناسب قرار دهید.

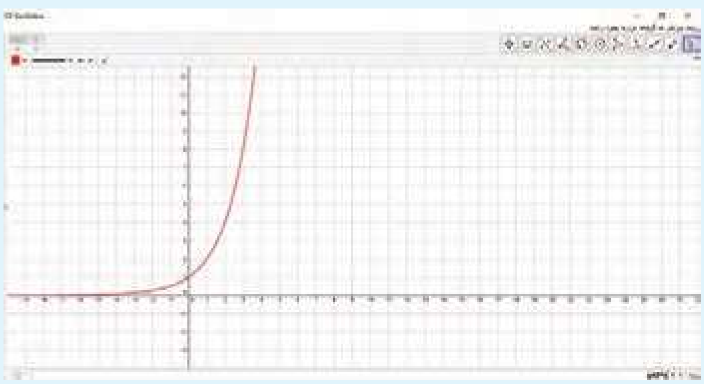
الف) $(\frac{1}{2})^{0.5} \bigcirc (\frac{1}{2})^{1.5}$ ب) $(\frac{1}{2})^{\sqrt{2}} \bigcirc (\frac{1}{2})^{4}$ پ) $(\frac{1}{2})^{4} \bigcirc (\frac{1}{2})^{3}$

۶ با استفاده از نمودار، اگر $x<y$، چه رابطه‌ای بین $(\frac{1}{2})^y$ و $(\frac{1}{2})^x$ وجود دارد؟ ....

خواندنی

با استفاده از نرم‌افزار جئوجبرا (GeoGebra) می‌توانید نمودارهای توابع نمایی را به راحتی رسم کنید. برای این کار در نوار دستور،ضابطهٔ تابع را حروف‌چینی کرده وکلید Enter را بزنید. در پنجرهٔ گرافیکی، نمودار مطلوب نمایش داده می‌شود.

در تصویر مقابل، نمودار تابع با ضابطهٔ $y=2^x$ در محیط این نرم‌افزار نمایش داده شده است.



خواندنی

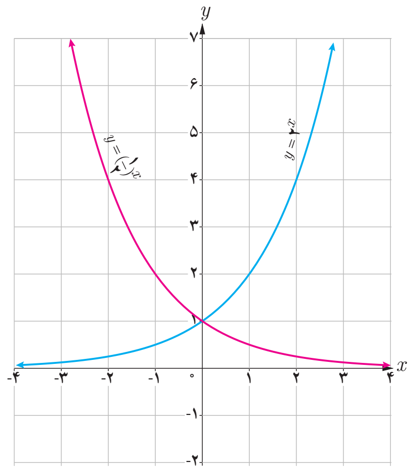
یک داروی بیماری آسم که به صورت قرص ۱۰۰ میلی‌گرمی موجود است، برای یک بیمار تجویز شده است. اگر او این قرص را مصرف کند و بدانیم در زمان مصرف دارو هیچ میزانی از آن در بدن وی موجود نیست، در این صورت می‌توان پیش‌بینی کرد که بعد از گذشت t دقیقه، در مجموع از این دارو به میزان A میلی‌گرم، در جریان خون او وجود خواهد داشت که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$A=۱۰۰\left[۱-(۰/۹)^t\right]$$

کار در کلاس

نمودار توابع با ضابطه‌های $y=۲^x$ و $y=(\frac{۱}{۲})^x$ را در نظر بگیرید.

۱ نمودارهای این دو تابع نسبت به کدام محور مختصات قرینه‌اند؟ ....



۲ با جایگذاری $x-$ به جای x در تابع با ضابطهٔ $y=۲^x$ به تابع با ضابطهٔ .... $y=$ یا همان .... $y=$ دست می‌یابیم.

۳ دامنه و برد این دو تابع چه رابطه‌ای با هم دارند؟ ....

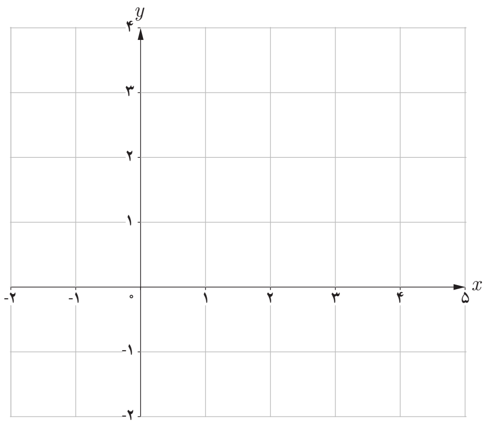
۴ دو تابع نمایی دیگری که نسبت به محور yها قرینه‌اند، مثال بزنید. ....

....

نمودار توابع با ضابطه‌های $y=a^x$ و $y=a^{-x}$ ($a>۰$ و $a\neq۱$) نسبت به محور yها قرینه‌اند.

کار در کلاس

نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(\frac{۱}{۳})^x$ را رسم کنید.



سرو کهن ابرکوه (یزد) با عمر تقریبی ۴۰۰۰ سال

فعالیت

با توجه به مطالبی که در این درس آموخته اید، جملات زیر را تکمیل کنید.

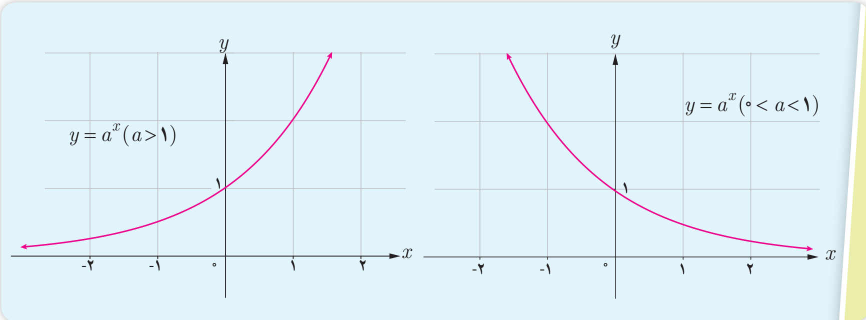
۱ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=a^x$ ($a>1$) مجموعهٔ اعداد حقیقی و برد آن .... است.

۲ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=a^x$ ($0<a<1$) .... و برد آن بازهٔ $(0 , +\infty)$ است.

۳ نمودار توابع فوق محور yها را درنقطهٔ .... قطع می‌کند و محور xها را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کند.

۴ این دو تابع، یک به یک .... زیرا خطوط موازی محور xها، نمودار آنها را حداکثر در ....نقطه قطع می‌کند.

نمودار توابع نمایی در حالت کلی مشابه نمودارهای زیر است.



معادلات نمایی

معادله‌ای را که در آن متغیر در توان قرار گرفته باشد، معادلهٔ نمایی می‌نامند.
برای حل معادلات نمایی از خاصیت یک به یک بودن تابع نمایی استفاده می‌کنیم.
اگر a یک عدد حقیقی مثبت مخالف ۱ باشد و داشته باشیم $a^x=a^y$ آنگاه $x=y$ و برعکس.

مثال : معادله های نمایی مقابل را حل کنید.

الف) $3^{2x-3}=81 \rightarrow 3^{2x-3}=3^4 \rightarrow 2x-3=4 \rightarrow x=\frac{7}{2}$

ب) $4^{2x-1}=8^{x+1} \rightarrow (2^2)^{2x-1}=(2^3)^{x+1} \rightarrow 4x-2=3x+3 \rightarrow x=5$

پ) $5^{3n-1}=125^{2n+1} \rightarrow 5^{3n-1}=5^{6n+3} \rightarrow 3n-1=6n+3 \rightarrow n=-\frac{4}{3}$

تمرین

۱ کدام یک از ضابطه‌های زیر مربوط به یک تابع نمایی است؟

الف) $y=2x^2-3x+1$
ب) $y=x^3$
پ) $y=(0/1)^x$
ت) $y=(\frac{3}{2})^x$
ث) $y-3x=2$
ج) $y=\sqrt{x-1}$

۲ کدام یک از نقاط زیر، روی نمودار تابع با ضابطهٔ $y=3^x$ قرار دارند؟

الف) $(1,0)$
ب) $(3,1)$
پ) $(0,1)$
ت) $(\sqrt{3}, \frac{1}{3})$
ث) $(1,3)$
ج) $(-1, \frac{1}{3})$

۳ کدام گزاره صحیح است؟

الف) نقطهٔ $(\frac{1}{2}, \sqrt{5})$ روی نمودار تابع با ضابطهٔ $y=5^x$ قرار دارد.

ب) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطهٔ $y=10^x$ با محور yها، نقطهٔ $(0,10)$است.

پ) دامنهٔ توابع با ضابطه‌های $y=2^x$ و $y=x^2$ مساوی‌اند.

ت) محل تقاطع نمودار تابع با ضابطهٔ $y=6^x$ با محور xها، نقطهٔ $(6,0)$ است.

۴ الف) نمودار تابع با ضابطهٔ $y=3^x$ را رسم کنید و مقدار تقریبی عدد $3^{\sqrt{2}}$ را با توجه به نمودار به‌دست آورید.

ب) نمودار تابع با ضابطهٔ $y=(\frac{1}{2})^x$ را رسم کنید و مقدار تقریبی $(\frac{1}{2})^{\sqrt{5}}$ را با توجه به نمودار به‌دست آورید.

۵ فرض کنیم $f(x)=3^x$ ، $g(x)=(\frac{1}{16})^x$ و $h(x)=10^x$، مقادیر زیر را به‌دست آورید.

الف) $f(3)$
ب) $g(-1)$
پ) $h(-2)$

۶ معادلات نمایی زیر را حل کنید.

الف) $2^{3n-2}=\frac{1}{32^2}$
ب) $9^{3y-3}=27^{y+1}$
پ) $4^{3x+2}=\frac{1}{64^3}$
ت) $9^x=3^{x^2-4x}$
ث) $(\frac{3}{5})^{x+1}=\frac{25}{9}$

خواندنی

جمعیت جهان در طول قرن گذشته به سرعت رشد کرده است. در نتیجه تقاضای افزاینده‌ای برای منابع جهان ایجاد شده است. در بیشتر مواقع، از توابع و معادلات نمایی برای مدل‌سازی رشدهای سریع استفاده می‌شود. جمعیت جهان که با P نشان داده می‌شود، در سال ۱۹۶۰ برابر با ۳ میلیارد نفر و در سال ۲۰۰۸ برابر با ۶/۷ میلیارد نفر بوده است. این رشد جمعیت را می‌توان با رابطه $P(x)=3(1/017)^{x-1960}$ که در آن x نشان‌دهنده سال است، نمایش داد و از آن برای پیش‌بینی جمعیت در سال‌های آینده استفاده کرد.

درس دوم

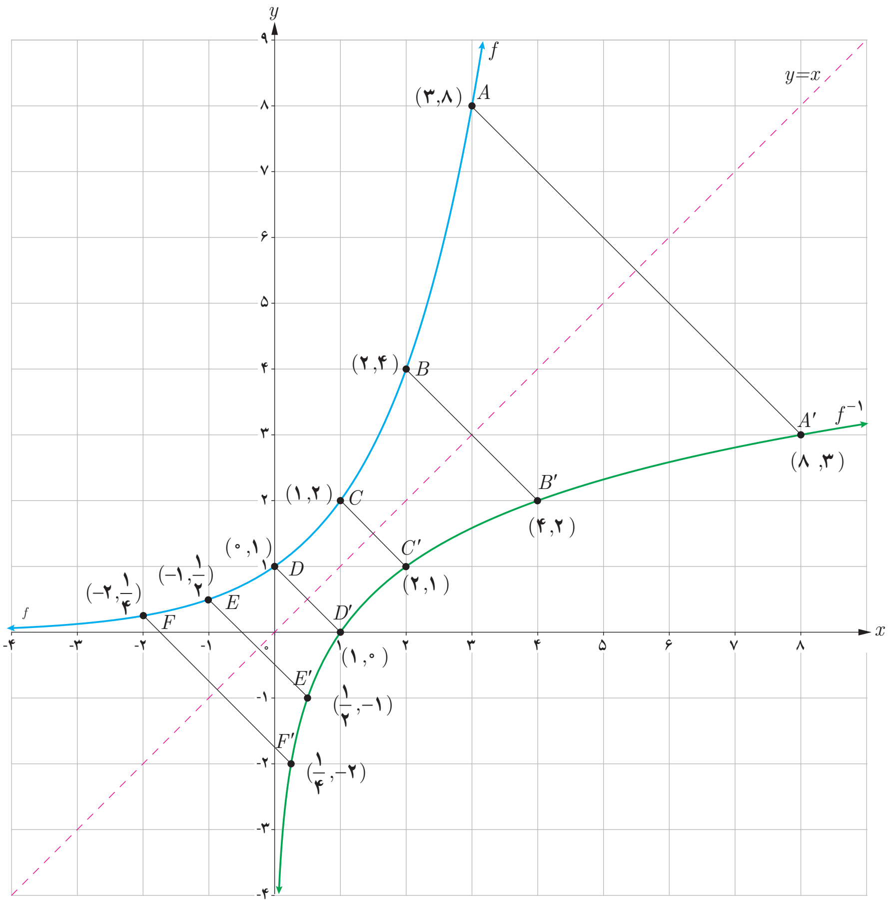
تابع لگاریتمی و ویژگی‌های آن

بسیاری از اندازه‌گیری‌ها در علوم مختلف، طیف وسیعی از اعداد را در برمی‌گیرد که برای سادگی محاسبات، می‌توان آنها را توان‌هایی از یک عدد خاص در نظر گرفت و اندازه‌های بسیار بزرگ را در ابعاد بسیار کوچک‌تری نشان داد یا اندازه‌های بسیار کوچک را در ابعاد مناسب نمایش داد. کاربرد این ساده‌سازی محاسبات در علوم مختلف مانند فیزیک، شیمی، زیست‌شناسی، زمین‌شناسی، جمعیت‌شناسی، مهندسی و... مشهود است.

تابع لگاریتمی

فعالیت

در درس اول با تابع نمایی با ضابطهٔ $f(x)=2^x$ و نمودار آن آشنا شدیم. همان‌طور که مشاهده کردیم، این تابع یک به یک است؛ بنابراین وارون آن نیز یک تابع است. نمودار تابع f و وارون آن، تابع f^{-1} در دستگاه مختصات زیر رسم شده است که نسبت به خط $y=x$ قرینه‌اند.



خواندنی

روش لگاریتم‌گیری در سال ۱۶۱۴ از سوی جان نپر (۱۶۱۷ـ۱۵۵۰)، ریاضی‌دان اسکاتلندی در کتابی با عنوان «توصیفی بر قانون شگفت‌انگیز لگاریتم» ارائه شد.

در فیزیک، مفهومی به‌نام شدت صوت وجود دارد که درک انسان را از بلندی صوت بیان می‌کند. تراز شدت یک صوت عبارت است از لگاریتم (در پایهٔ ده) نسبت شدت آن صوت به شدت صوت مبنا. تراز شدت صوت را با β نشان می‌دهند و یکای آن را به افتخار بل فیزیک‌دان امریکایی مخترع تلفن، بل (B) و دسی‌بل (dB) نام‌گذاری کرده‌اند. هر بل برابر ده دسی‌بل است. ($I_\circ$ شدت صوت مبناست که برابر آستانهٔ شنوایی گوش سالم است.)

$\beta=\log_{I_\circ} I$

صدا	تراز شدت صوت dB
شدت صوت مبنا	۰
نفس کشیدن	۱۰
برگ درختان در نسیم	۲۰
صحبت کردن از فاصلهٔ یک متری	۴۰
همهمه در فروشگاه	۶۰
سر و صدای خودروها در خیابان شلوغ	۷۰
آستانهٔ دردناکی (برای بسامد ۱۰۰۰ Hz)	۱۲۰
مسلسل	۱۳۰
غرش هواپیمای جت در حین بلند شدن	۱۴۰
راکت فضایی، در موقع بلند شدن	۱۷۰

۱ دامنه و برد دو تابع f و f^{-1} در نمودار قبل را به‌دست آورید.

....

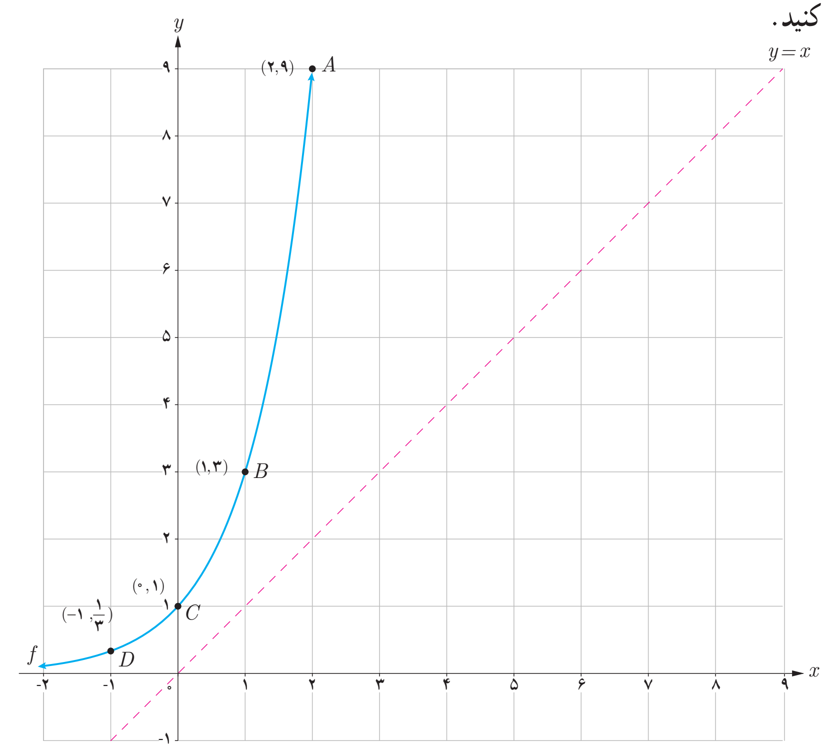
۲ با توجه به نقاط f و f^{-1} در نمودار، جدول زیر را تکمیل کنید.

$f(۲) = \dots$	$f(۰) = \dots$	$f(-۱) = \dots$	$f(-۲) = \frac{۱}{۴}$
$f^{-۱}(۴) = \dots$	$f^{-۱}(۱) = \dots$	$f^{-۱}(\frac{۱}{۲}) = \dots$	$f^{-۱}(\frac{۱}{۴}) = \dots$

فعالیت

نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۳^x$ در دستگاه مختصات زیر رسم شده است.

۱ با توجه به نقاط نمودار f، نمودار $f^{-۱}$ را رسم کنید.



۲ با توجه به نقاط f و $f^{-۱}$ در نمودار قبل، جاهای خالی را تکمیل کنید.

$f(\dots) = ۹$	$f(۱) = \dots$	$f(۰) = \dots$	$f(-۲) = \frac{۱}{۹}$
$f^{-۱}(۹) = \dots$	$f^{-۱}(\dots) = ۱$	$f^{-۱}(۱) = \dots$	$f^{-۱}(\frac{۱}{۹}) = \dots$

۳ دامنه و برد دو تابع f و $f^{-۱}$ را به‌دست آورید. ....

با توجه به مطالب فوق، وارون تابع با ضابطهٔ $f(x) = ۳^x$ را به‌صورت $f^{-۱}(x) = \log_۳ x$ نشان می‌دهیم و آن را لگاریتمِ x در مبنای ۳ می‌نامیم.

به عبارت دیگر توابع نمایی و لگاریتمی وارون یکدیگرند.

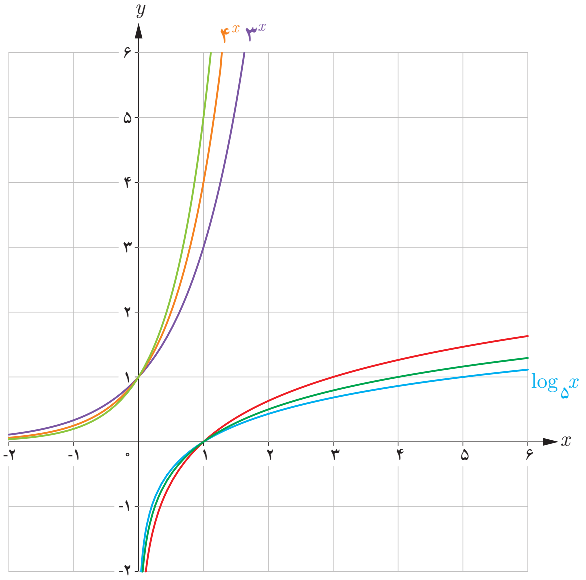
۴ با توجه به نمودار توابع نمایی و لگاریتمی، دامنه و برد آنها را به‌طور کلی بنویسید. ....

وارون تابع نمایی با ضابطهٔ $f(x) = a^x$ را به‌صورت $f^{-1}(x) = \log_a x$ نشان می‌دهیم و آن را لگاریتم x در مبنای a می‌نامیم. به عبارت دیگر برای هر عدد حقیقی مثبت a $(a\neq 1)$ داریم:

$$f(x) = a^x \Leftrightarrow f^{-1}(x) = \log_a x$$

کار در کلاس

در شکل مقابل، نمودار شش تابع رسم شده است که دو به دو وارون یکدیگرند. برای توابعی که ضابطهٔ آنها نوشته شده، ضابطهٔ وارون آنها را روی نمودار مربوطه بنویسید و دامنه و برد هر تابع را مشخص کنید.

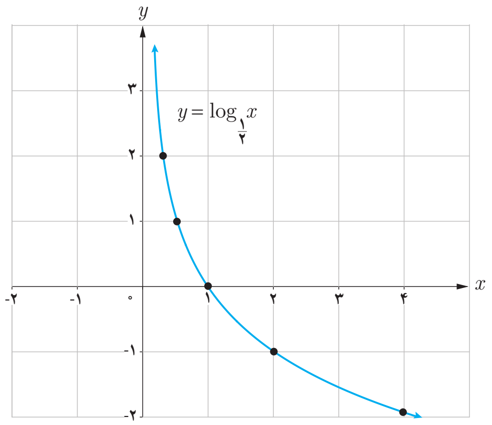


کار در کلاس

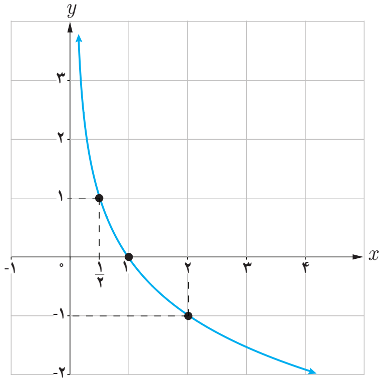
۱ نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ را در نظر بگیرید. اعداد زیر بین کدام اعداد صحیح قرار دارند؟

الف) $\log_{\frac{1}{2}} 3$ ....

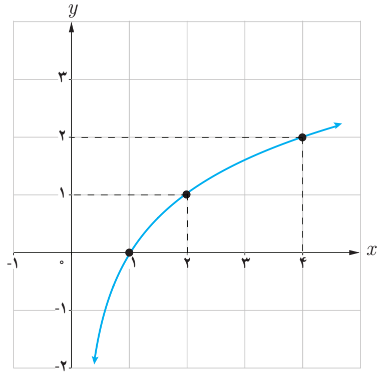
ب) $\log_{0/5}(1/5)$ ....



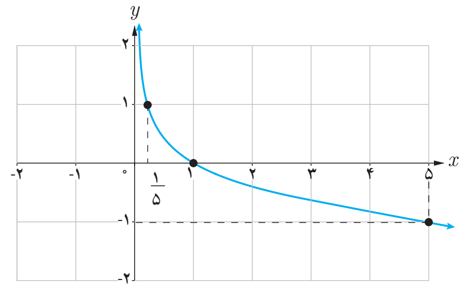
۲ نمودار چند تابع لگاریتمی در زیر رسم شده است. ضابطهٔ مربوط به هر کدام را بنویسید.



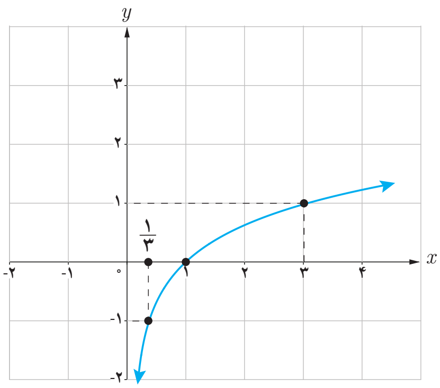
(۱)



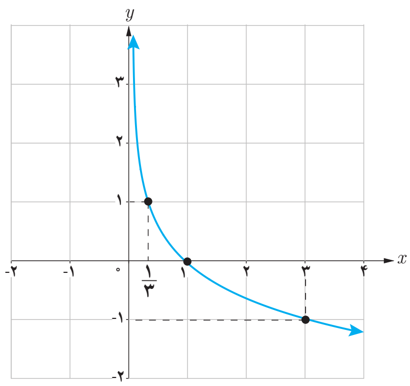
(۲)



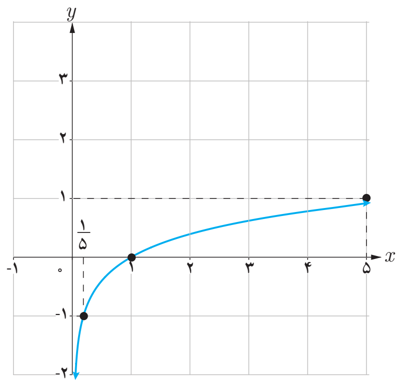
(۳)



(۴)



(۵)



(۶)

۳ با توجه به نمودارهای سؤال ۲، جدول زیر را کامل کنید.

شمارهٔ نمودار	مختصات نقاط							
	$(0,1)$	$(4,-2)$	$(4,2)$	$(\frac{1}{3},-1)$	$(\frac{1}{3},1)$	$(\frac{1}{2},1)$	$(2,1)$	$(1,0)$
(۱)							×	
(۲)							✓	
(۳)							×	
(۴)							×	
(۵)							×	
(۶)							×	

فعالیت

با توجه به مطالبی که تا به‌حال خوانده‌اید، جملات زیر را تکمیل کنید.

۱ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=\log_a x\,(a>1)$، مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت و برد آن .... است.

۲ دامنهٔ تابع با ضابطهٔ $y=\log_a x\,(0<a<1)$، بازه .... و برد آن .... است.

۳ نمودار توابع فوق، محور xها را در نقطهٔ .... قطع می‌کند و محور yها را قطع نمی‌کند.

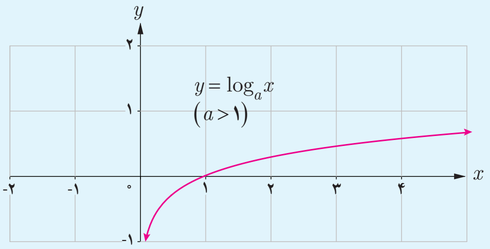
۴ این دو تابع، یک‌به‌یک .... زیرا خطوط موازی محور xها، نمودار آنها را حداکثر در .... نقطه قطع می‌کند.

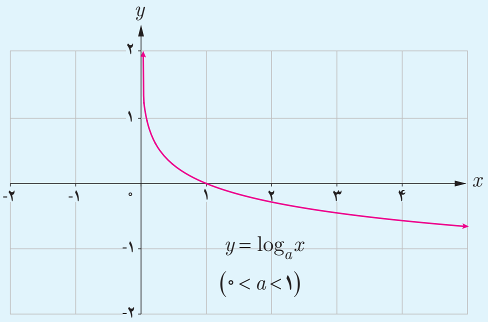
۵ وارون تابع نمایی، تابع .... است و وارون تابع لگاریتمی، تابع .... است.

اگر a عدد حقیقی مثبت $(a\neq 1)$ باشد، داریم: $a^0=1$، بنابراین همواره:

$$\log_a 1 = 0$$

نمودار تابع لگاریتمی در حالت کلی، مشابه نمودارهای زیر است.

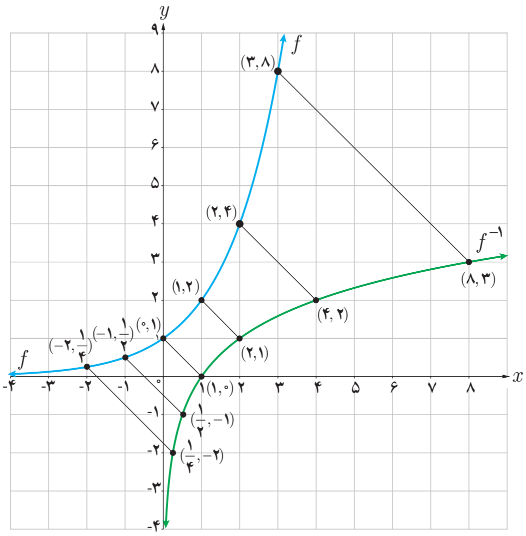




لگاریتم یک عدد

فعالیت

نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=2^x$ و $f^{-1}(x)=\log_2 x$ را در نظر بگیرید.



با توجه به نقاط این دو نمودار، جدول زیر را تکمیل کنید.

نمایی	$۲^{-۲}=\frac{۱}{۴}$	$۲^{-۱}=\frac{۱}{۲}$	$۲^{۰}=۱$	....	$۲^{۲}=۴$	....
لگاریتمی	$\log_{۲}\frac{۱}{۴}=-۲$	$\log_{۲}\frac{۱}{۲}=$	....	$\log_{۲}۲=۱$	....	$\log_{۲}۸=$......

به‌طور کلی اگر $a^y=x$ آن‌گاه $\log_a x=y$ و به عکس. $(x>۰\ ,\ a\neq ۱\ ,\ a>۰)$

$$b^a=c \Leftrightarrow \log_b c=a \qquad (c>۰\ ,\ b>۰\ ,\ b\neq ۱)$$

کار در کلاس

جدول زیر را مانند نمونه تکمیل کنید.

$۱۰^{۳}=۱۰۰۰ \rightarrow \log_{۱۰}۱۰۰۰=۳$	$\log_{۸}۱=۰ \rightarrow ۸^{۰}=۱$
$۹^{\frac{۱}{۲}}=۳ \rightarrow \log_{۹}۳=$	$\log_{۲}(\frac{۱}{۱۶})=-۴ \rightarrow ۲^{-۴}=$......
$۴^{۳}=۶۴ \rightarrow \log_{۴}۶۴=$	$\log_{۵}۱۲۵=۳ \rightarrow ۵^{۳}=$ ......
$۲^{۵}=۳۲ \rightarrow$ ......=	$\log_{\frac{۱}{۳}}۲۷=-۳ \rightarrow$ ......=......
$۲^{-۳}=$......$\rightarrow$......=	$\log_{\frac{۱}{۵}}۱۲۵=$ ......$\rightarrow$......=......
$۳^{-۴}=$......$\rightarrow$......=	$\log_{\frac{۱}{۲}}۱۶=$ ......$\rightarrow$......=......

دریاچه تار (دماوند)

تذکر

لگاریتم در مبنای ۱۰ را لگاریتم اعشاری می‌نامیم. در این حالت معمولاً مبنا نوشته نمی‌شود، یعنی به جای $\log_{۱۰} a$ می‌نویسیم $\log a$.

ویژگی‌های لگاریتم

فعالیت

۱ اگر a عدد حقیقی مثبت $(a \neq ۱)$ باشد، همواره داریم:

$$\log_a ۱ = ۰ \quad \text{و} \quad \log_a a = ۱ \quad \text{و} \quad \log_a \left(\frac{۱}{a}\right) = -۱$$

۲ برای اعداد حقیقی و مثبت a و b و c $(c \neq ۱)$ داریم:

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

اثبات: فرض کنیم $m = \log_c a$ و $n = \log_c b$، پس طبق تعریف $a = ...$ و $b = ...$، از این‌رو $ab = c^m . c^n = ...$ بنابراین طبق تعریف لگاریتم داریم: $\log_c ab = ...$ و در نتیجه:

$$\log_c ab = \log_c a + \log_c b$$

مثال: فرض کنید $\log ۲ \simeq ۰/۳$ و $\log ۳ \simeq ۰/۴۸$، مقدار $\log ۶$ را حساب کنید.

$$\log ۶ = \log(۳ \times ۲) = \log ۳ + \log ۲ \simeq ۰/۴۸ + ۰/۳ = ۰/۷۸$$

۳ اگر a و b اعدادی حقیقی و مثبت و $a \neq ۱$ و n یک عدد طبیعی باشد، داریم:

$$\log_a b^n = n \log_a b$$

اثبات:

$$\log_a b^n = \log_a \overbrace{b \ldots b}^{n\ \text{بار}} = \underbrace{\log_a b + \cdots + \log_a b}_{n\ \text{بار}} = n \log_a b$$

۴ برای اعداد حقیقی و مثبت a و b و c $(c \neq ۱)$ داریم:

$$\log_c \left(\frac{a}{b}\right) = \log_c a - \log_c b$$

اثبات: فرض می‌کنیم $\frac{a}{b} = d$. بنابراین:

$$a = bd \to \log_c a = \log_c b + \log_c d \to \log_c d = \log_c a - ....$$

$$\log_c \frac{a}{b} = ... - \log_c b$$

مثال: اگر $\log ۲ \simeq ۰/۳$، مقدار $\log ۵$ را محاسبه کنید.

$$\log ۵ = \log \frac{۱۰}{۲} = \log ۱۰ - \log ۲ = ۱ - \log ۲ \simeq ۱ - ۰/۳ = ۰/۷$$

خواندنی

ابداع لگاریتم یکی از مهم‌ترین ابداعات ریاضی است و کاربرد آن در ساده کردن محاسبات است. با لگاریتم، عمل ضرب به جمع و عمل تقسیم به تفریق تبدیل می‌شود.

خواندنی

همزمان با افزایش ارتفاع، فشار هوای اتمسفر(جو زمین) کاهش می‌یابد. رابطه محاسبه فشار براساس ارتفاع به‌صورت $a = ۱۵۵۰۰\left(۵ - \log_{۱۰}^{p}\right)$ است، که در آن a ارتفاع برحسب متر و p نیز فشار برحسب پاسکال است. فشار هوا را در بالای قلهٔ دماوند به ارتفاع ۵۶۱۰ متر محاسبه کنید.

کار در کلاس

اگر $\log ۲ \simeq ۰/۳$ و $\log ۳ \simeq ۰/۴۸$، مقادیر تقریبی اعداد زیر را به‌دست آورید.

۱) $\log ۱۲ = \log(۳\times۴) = \log ۳ + \log ۲^۲ = \log ۳ + ۲\log ۲ \simeq ۰/۴۸ + ۰/۶ = ۱/۰۸$

۲) $\log ۰/۷۵ =$ .... ۳) $\log \sqrt{۵} =$ ....

۴) $\log \frac{۲۵}{۱۸} =$ .... ۵) $\log \sqrt[۳]{۶} =$ ....

۶) $\log \frac{\sqrt{۲۷}}{\sqrt[۴]{۵}} =$ ....

معادلات لگاریتمی

یکی از مهم ترین کاربردهای لگاریتم، حل معادلات لگاریتمی است که معمولاً از مدل‌سازی یک مسئلهٔ واقعی به‌دست می‌آید. مانند محاسبهٔ شدت زلزله، مشخص کردن ضعیف‌ترین صدای قابل شنیدن یا آستانهٔ شنوایی، پیش‌بینی تعداد جمعیت یک جامعه پس از زمان مشخص و محاسبهٔ نیمه عمر عناصر رادیواکتیو. معادلات زیر نمونه‌هایی از معادلات لگاریتمی‌اند :

$\log_۴ x + ۱ = ۳ \quad , \quad \log_۳ x = \log_۳ ۷ \quad , \quad \log_۵ x + \log_۵(x-۱) = \log_۵ ۱۲$

منظور از حل معادلهٔ لگاریتمی، پیدا کردن مقادیری برای مجهول است که در معادله صدق کند.

به‌طور کلی اگر a یک عدد حقیقی مثبت $(a\neq۱)$، باشد آن‌گاه با توجه به یک‌به‌یک بودن تابع لگاریتمی، از تساوی $\log_a x = \log_a y \ (x, y>۰)$ می‌توان نتیجه گرفت $x=y$ و به عکس، اگر $x=y \ (x, y>۰)$ آن‌گاه $\log_a x = \log_a y$.

فعالیت

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱ $\log_۳ x = ۲ \rightarrow x = ۳^۲ = ۹$

۲ $\log_۵(x+۶) = \log_۵(۲x-۳) \rightarrow x+۶ = ۲x-۳ \rightarrow x = ۹$

که $x=۹$ برای هر دو لگاریتم قابل قبول است.

۳ $\log_۵(x+۶) + \log_۵(x+۲) = ۱ \rightarrow \log_۵\left[(x+۶)(x+۲)\right] = ۱$

$\rightarrow (x+۶)(x+۲) = ۵ \rightarrow x^۲+۸x+۱۲ = ۵$

$\rightarrow x^۲+۸x+۷ = ۰ \rightarrow (x+۷)(x+۱) = ۰ \rightarrow x=-۷$ یا $x=-۱$

توجه کنید که $x=-۷$ قابل قبول نیست؛ از این‌رو تنها جواب $x=-۱$ قابل قبول است که در معادلهٔ اصلی صدق می‌کند.

خواندنی

لاپلاس دانشمند بزرگ فرانسوی دربارهٔ لگاریتم گفته است :

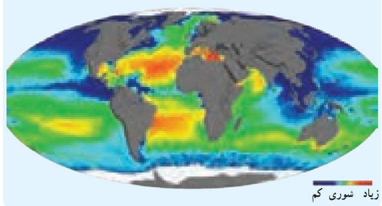
«لگاریتم ابزاری است قابل ستایش که به کمک آن کار چند ماه به چند روز کاهش می‌یابد، عمر اخترشناسان را دو برابر می‌کند و از خطاهای کوچک می‌گذرد و از عبارات طولانی و جدا نشدنی ریاضی بیزار است».

خواندنی

شوری آب اقیانوس‌ها با عرض جغرافیایی (فاصله از خط استوا) و عمق اقیانوس تغییر می‌کند. در مناطق استوایی میزان شوری آب در سطح اقیانوس‌ها به دلیل تبخیر سریع آب، بیشتر است. هرچه به قطب نزدیک‌تر می‌شویم، کاهش تبخیر و بارش باران باعث می‌شود شوری سطح آب کاهش یابد. تابع مربوطه عبارت است از :

$S(x) = ۳۱/۵ + ۱/۱\log(x+۱)$

که در این رابطه x نشان‌دهندهٔ عمق به متر و $S(x)$ نشان‌دهندهٔ مقدار گرم نمک موجود در هرکیلوگرم آب اقیانوس است.



۴ $\log_{۴}(x+۲)=\log_{۴}۸ \to x+۲=۸ \to x=\cdots$

۵ $۳\log_{۲}x=-\log_{۲}۲۷ \to \log_{۲}x^{۳}=$ .... $\to$ ....

۶ $\log(x+۱)-\log(x-۳)=۳ \to \log\dfrac{x+۱}{x-۳}=۳ \to$ ....

کار در کلاس

معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

۱ $\log_{۵}x=۳$ ....

۲ $\log_{۲}(۲x+۱)=۳$ ....

۳ $\log_{۲}(x+۱)+\log_{۲}(x+۴)=۲$ ....

۴ $\log_{۳}۲۴۳=۲x+۱$ ....

۵ $\log_{۳}(x-۱)=۴$ ....

۶ $\log(۲x)-\log(x-۳)=۱$ ....

۷ $۲\log_{۴}(x-۱)=۳$ ....

تمرین

۱ تساوی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $\log_{c}abd=\log_{c}a+\log_{c}b+\log_{c}d$ (a و b و c و d اعدادحقیقی مثبت‌اند و $c\neq۱$)

ب) $\log_{b}a=\dfrac{\log_{c}a}{\log_{c}b}$ (a و b و c اعدادحقیقی مثبت‌اند و $c\neq۱$ و b)

پ) $a^{\log_{a}b}=b$ (a و b اعدادحقیقی مثبت‌اند و $a\neq۱$)

ت) $\log_{b}a\times\log_{a}b=۱$

۲ حاصل عبارات زیر را به‌دست آورید.

الف) $\log_{۷} \sqrt[۵]{۴۹}$ ب) $\log_{۳} ۲۷^{\frac{۱}{۲}}$ پ) $-\log_{۵} ۱۲۵$ ت) $۳\log_{۱۰} \sqrt{۱۰۰۰}$

۳ اگر $f(x) = ۳ - ۲\log_{۴}(\frac{x}{۲} - ۵)$ ، مقدار $f(۴۲)$ را به‌دست آورید.

۴ الف) اگر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \log_{a} x$ از نقطهٔ $(۲, ۲)$ عبور کند، مقدار a را به‌دست آورید.

ب) اگر نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \log_{a} x$ از نقطهٔ $(-۴, \frac{۱}{۲})$ عبور کند، مقدار a چند است؟

۵ نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \log_{\frac{۱}{۳}} x$ را رسم کنید.

۶ کدام یک از گزاره‌های زیر درست و کدام نادرست است؟

الف) اگر $y = \log_{a} x$ ، آنگاه $a^{x} = y$.

ب) نمودار تابع با ضابطهٔ $y = \log_{a} x$ $(۰ < a < ۱)$ از نقطهٔ $(۱, ۰)$ عبور می‌کند.

پ) لگاریتم اعداد منفی تعریف نمی‌شود.

۷ معادلات لگاریتمی زیر را حل کنید.

الف) $\log_{۲}(p^{۲} - ۲) = \log_{۲} p$ ب) $\log_{۵}(x+۱) + \log_{۵}(x-۱) = ۱$

پ) $۳\log_{۴} a - \log_{۴} ۵ = \log_{۴} ۲۵$ ت) $\log_{\frac{۱}{۱۰}} (x^{۲} - ۲۱) = -۲$

تخت‌جمشید (فارس)

درس سوم

نمودارها و کاربردهای توابع نمایی و لگاریتمی

نمودارهای توابع نمایی و لگاریتمی

در درس اول و دوم با نمودار توابع نمایی و لگاریتمی آشنا شدیم. نمودار این توابع را می‌توان با استفاده از قوانینی که قبلاً فرا گرفته‌ایم، انتقال دهیم.

با توجه به آنچه که در مبحث انتقال توابع گفته شد، فعالیت زیر را انجام دهید.

فعالیت

نمودار هر تابع را به ضابطهٔ آن نظیر کنید.

الف) $k(x) = -\log_2 x$

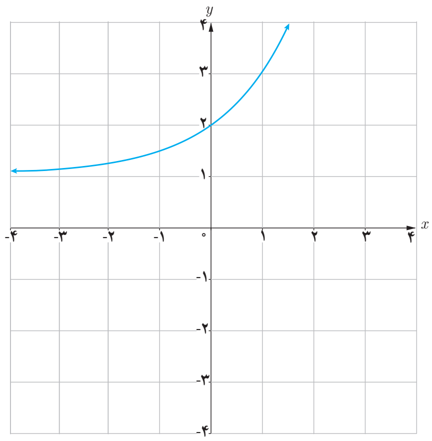
ب) $l(x) = 2 + \log_3 x$

پ) $h(x) = -(\frac{1}{2})^x$

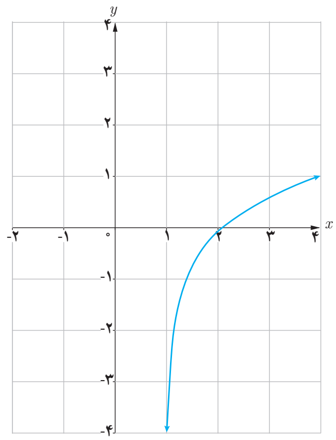
ت) $g(x) = \log_3 (x-1)$

ث) $j(x) = 3^{(x-1)}$

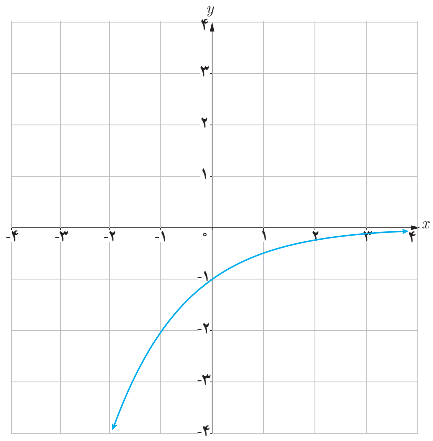
ج) $f(x) = 2^x + 1$



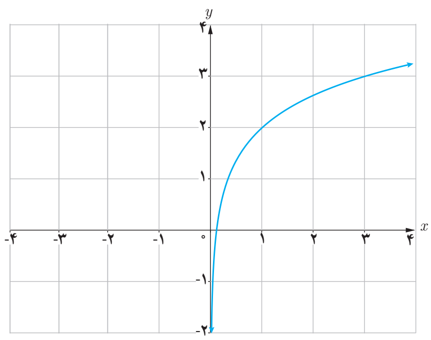
(۱)



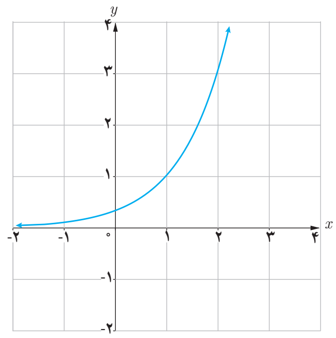
(۲)



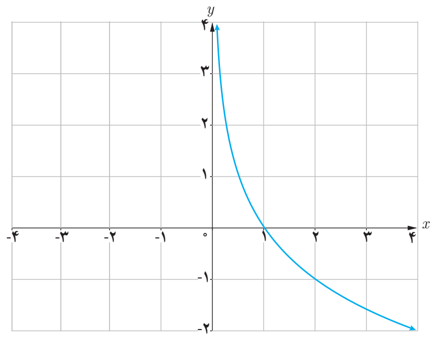
(۳)



(۴)



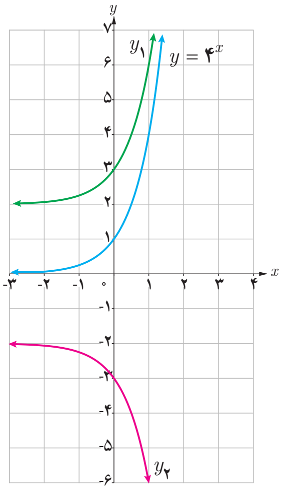
(۵)

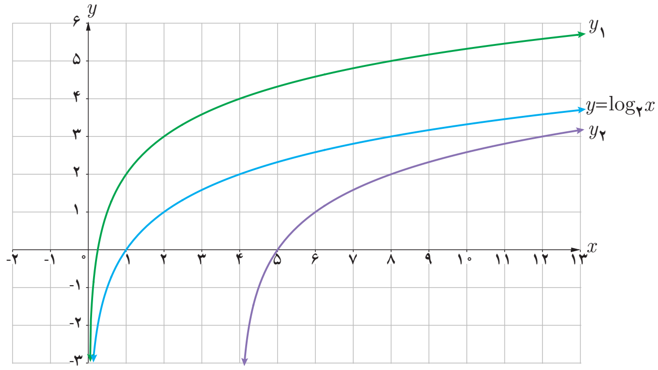


(۶)

کار در کلاس

در شکل های زیر، نمودار یک تابع نمایی و یک تابع لگاریتمی و انتقال یافته‌های آنها رسم شده است. ضابطهٔ توابع انتقال یافته را بنویسید.



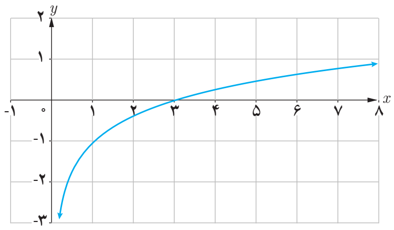


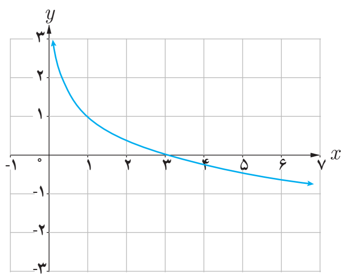
کار در کلاس

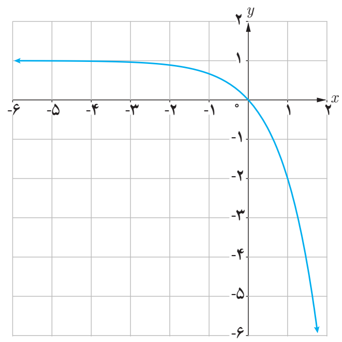
کدام یک از ضابطه‌ها به کدام یک از نمودارها تعلق دارند؟

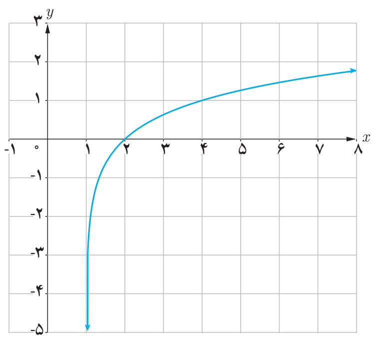
۱) $y=\log_۳(x-۱)$ ۲) $y=۳^x+۱$ ۳) $y=۱-۳^x$

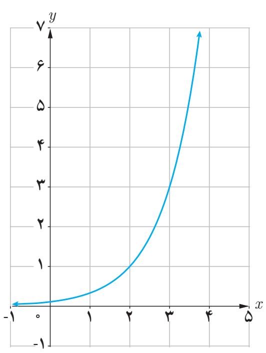
۴) $y=\log_۳ x-۱$ ۵) $y=۱-\log_۳ x$ ۶) $y=۳^{(x-۲)}$

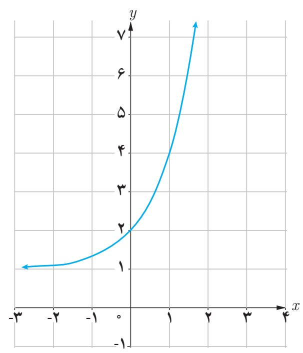

(الف)


(ب)


(پ)


(ت)


(ث)

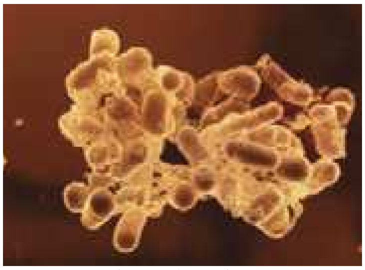

(ج)

کاربرد توابع نمایی و لگاریتمی

تابع نمایی :

در حالت کلی یک تابع به‌صورت $h(x)=ka^x$ $(a\neq ۱, a>۰)$ رفتار نمایی دارد که در بسیاری از مسائل اقتصادی، طبیعی و مهندسی و... ظاهر می‌شود.

مثال : اشریشیاکلی (Escherichia coli) یا به‌طور اختصار E.coli نوعی باکتری است که به‌طور طبیعی در دستگاه گوارش زندگی می‌کند و تکثیر آن به‌صورت نمایی است. عوامل مختلفی مانند زیاد شدن آن باعث بیماری می‌شود. نوع خاصی از این بیماری با ۱۰۰ باکتری شروع می‌شود و هر باکتری در مدت نیم ساعت به دو قسمت تقسیم می‌شود. اندازهٔ هر توده باکتری بعد از t ساعت از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :



تودهٔ باکتری اشریشیاکلی

$$p(t)=۱۰۰\times ۲^{۲t} \qquad (۰\leq t\leq ۱۶)$$

با فرض اینکه هیچ کدام از باکتری‌ها از بین نروند، تعداد باکتری‌ها در یک توده پس از ۳ ساعت برابر است با :

$$p(۳)=۱۰۰\times ۲^{۶}=۶۴۰۰$$

تابع لگاریتمی :

ریشتر، مقیاسی برای اندازه‌گیری بزرگی زمین‌لرزه است که میزان انرژی آزادشده در زلزله را نشان می‌دهد. اگر بزرگی زلزله‌ای برابر M در مقیاس ریشتر باشد، انرژی آزاد شدهٔ آن زلزله برابر E در واحد اِرگ (Erg) است که از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$\log E=۱۱/۸+۱/۵M$$

انرژی یک زلزلهٔ ۸ ریشتری تقریباً برابر با انرژی انفجار یک میلیارد تن مادهٔ انفجاری TNT است.

مثال : روز پنجم دی ماه ۱۳۸۲ زلزله‌ای به شدت ۶/۶ ریشتر، شهر بم و مناطق اطراف آن را در شرق استان کرمان لرزاند. مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله چقدر بوده است؟

$$\log E=۱۱/۸+۱/۵M\rightarrow$$

$$\log E=۱۱/۸+۱/۵\,(۶/۶)$$

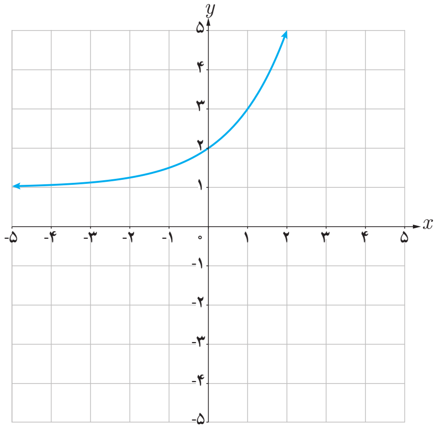
$$\rightarrow \log E=۲۱/۷ \rightarrow E=۱۰^{۲۱/۷}\,Erg$$

کار در کلاس

زلزلهٔ ۳۱ خرداد سال ۱۳۶۹ رودبار ــ منجیل به بزرگی ۷/۴ ریشتر در ساعت سی دقیقهٔ بامداد رخ داد. مقدار انرژی آزاد شده در این زلزله را محاسبه کنید.

تمرین

۱ در دستگاه مختصات روبه‌رو نمودار تابع با ضابطهٔ $y=a+۲^{(x-b)}$ رسم شده است. a و b را به‌دست آورید.



۲ فرض می‌کنیم $g(x)=۴^x+۲$. الف) $g(-۱)$ را به‌دست آورید. ب) اگر $g(x)=۶۶$، مقدار x چقدر است؟

۳ نمودار تابع با ضابطهٔ $y=۴^x-۱$ را در بازهٔ $[-۲و۲]$ رسم کنید.

۴ نمودار توابع با ضابطه‌های زیر را رسم کنید.

الف) $y=-۲^x+۱$

ب) $y=-\log_۲(x-۱)$

پ) $y=۲^{|x|}$

ت) $y=\frac{|x|}{x}\log x$

فصل ۶

حد و پیوستگی

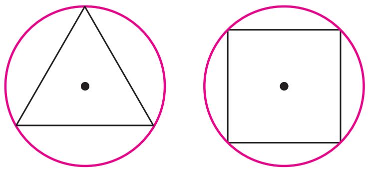
برج کاشانه در نزدیکی مسجد جامع شهر بسطام قرار دارد. بسطام در شمال شاهرود و در استان سمنان واقع است. قدمت این برج حدود ۷۰۰ سال است و ارتفاع برج از داخل ۲۴ و از بیرون ۲۰ متر است. فضای داخلی برج ده ضلعی و نمای بیرونی آن سی ضلعی منتظم است.

درس اوّل

فرایندهای حدی

فعالیت

در دایره‌های زیر به شعاع r یک مثلث متساوی‌الاضلاع و یک مربع به گونه‌ای رسم شده‌اند که رأس‌های آنها روی دایره واقع‌اند. چنین چند ضلعی‌هایی را محاطی می‌نامیم. واضح است که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع و مساحت مربع از مساحت دایره کمتر است.

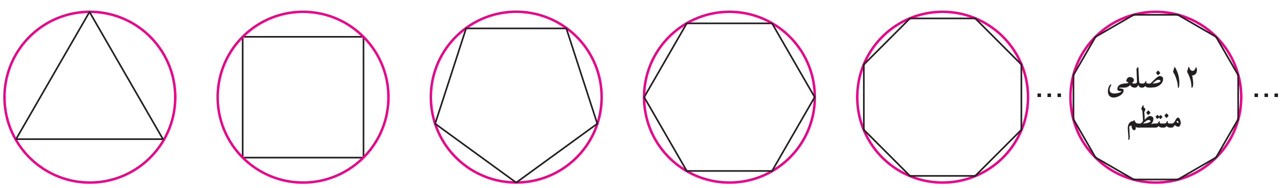


حدس می‌زنید مساحت کدام‌یک به مساحت دایره نزدیک‌تر است؟ هرچه تعداد اضلاع چند ضلعی‌های منتظم محاطی بیشتر شوند، چه‌اتفاقی می‌افتد؟

در جدول زیر مساحت تعدادی از n ضلعی‌های منتظم محاطی به شعاع r (با دقت یک رقم اعشار) داده شده است.

برای نزدیک‌تر شدن مساحت چند ضلعی‌های منتظم محاطی به مساحت دایره چه می‌توان کرد؟ آیا به هر میزان که بخواهیم می‌توانیم مساحت چند ضلعی‌های منتظم را به مساحت دایره نزدیک کنیم؟

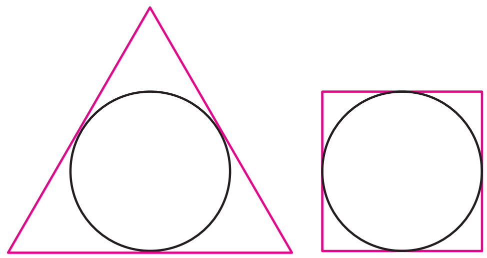
زیاد شدن تعداد اضلاع →	۱۲	...	۷	۶	۵	۴	۳	چند ضلعی منتظم محاطی
نزدیک‌تر شدن مساحت چند ضلعی‌ها به مساحت .... →	۳r^2	...	۲/۸r^2	۲/۶r^2	۲/۳۸r^2	۲r^2	۱/۳r^2	مساحت تقریبی



مساحت چند ضلعی‌های منتظم محاط در دایره را به هر میزان که بخواهیم می‌توانیم به مساحت دایره نزدیک‌تر کنیم، به شرط آنکه تعداد اضلاع چند ضلعی را به مقدار کافی بزرگ اختیار کنیم. (به بیان دیگر با افزایش تعداد اضلاع، مساحت چند ضلعی‌ها به مساحت دایره نزدیک می‌شود.)

کار در کلاس

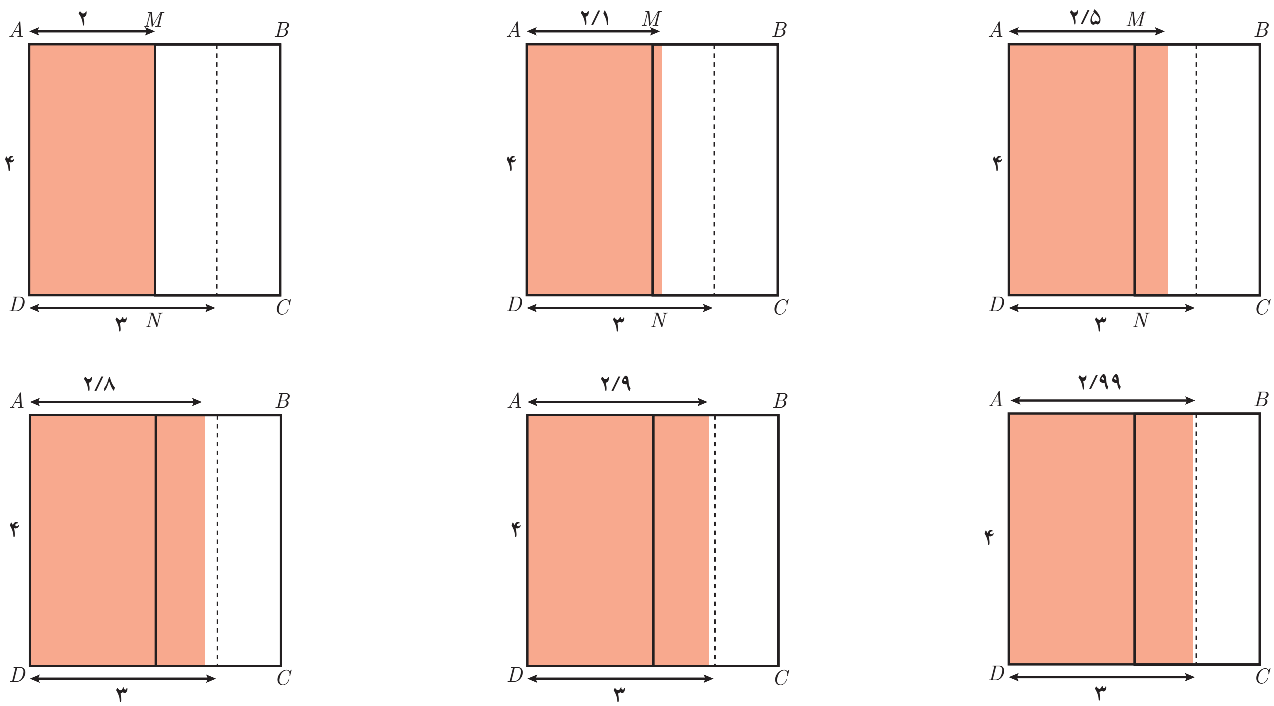
فرض کنید در فعالیت قبل برای دایره به شعاع r از چند ضلعی‌های منتظم محیطی (چند ضلعی که همهٔ اضلاع آن بر یک دایره مماس باشند) استفاده کنیم. نتیجه مشابه آنچه را در فعالیت قبل به‌دست آمد، دربارهٔ این چند ضلعی‌ها بیان کنید (محاسبه مساحت‌ها لازم نیست).



فعالیت

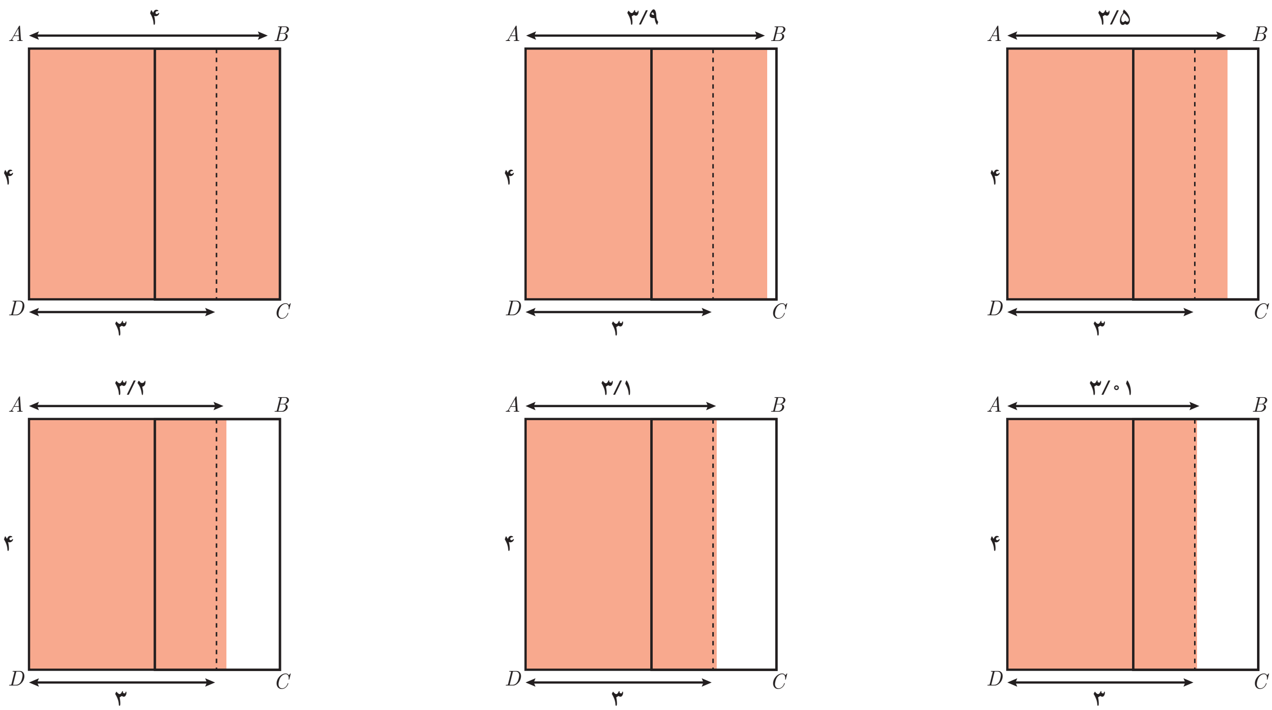
مربع $ABCD$ به ضلع ۴ واحد را در نظر می‌گیریم. پاره‌خط MN وسط AB را به وسط DC وصل می‌کند. مساحت مستطیل $AMND$ چقدر است؟ به موازات MN پاره‌خط‌هایی رسم می‌کنیم که مانند شکل، نقاط انتهایی آنها روی AB و CD است. مساحت مستطیل‌های جدید پدید آمده، در جدول داده شده است. جاهای خالی را پر کنید (طول مستطیل‌ها برابر ۴ واحد است).

عرض مستطیل‌ها با مقادیر کمتر از ۳، به ۳ نزدیک می‌شود.	۲/۹۹	۲/۹	۲/۸	۲/۷	۲/۵	۲/۱	۲	عرض مستطیل‌ها
مساحت به عدد ...... نزدیک می‌شود.			۱۱/۲			۸/۴	۸	مساحت مستطیل رنگی



مشابه همین کار را با شروع از پاره‌خط BC انجام می‌دهیم. پاره‌خط‌هایی که به موازات BC رسم می‌شوند، همانند شکل زیر، مستطیل‌های جدیدی را می‌سازند. جدول را کامل کنید.

عرض مستطیل‌ها با مقادیر بیشتر از ۳، به ۳ نزدیک می‌شود.	۳/۰۱	۳/۱	۳/۲	۳/۵	۳/۹	۴	عرض مستطیل‌ها
مساحت به عدد …… نزدیک می‌شود.			۱۲/۸	۱۴	۱۵/۶	۱۶	مساحت مستطیل رنگی



اگر طول مستطیل‌ها را ۴ و عرض آنها را x در نظر بگیریم، مساحت مستطیل‌ها را می‌توان به‌صورت تابع $f(x)=4x$ نمایش داد. با این تفاوت که در حالت اول x، با مقادیر کمتر از عدد ۳، به سمت عدد ۳ نزدیک می‌شود و در حالت دوم x، با مقادیر بیشتر از عدد ۳ به سمت عدد ۳ نزدیک می‌شود. این دو وضعیت را به ترتیب با نمادهای $x\to 3^-$ و $x\to 3^+$ نمایش می‌دهیم. خلاصهٔ دو جدول قبل در جدول زیر ارائه شده است:

x از سمت چپ به ۳ نزدیک می‌شود — x از سمت راست به ۳ نزدیک می‌شود

x	۲	۲/۱	۲/۵	۲/۸	۲/۹	۲/۹۹	→۳←	۳/۰۱	۳/۱	۳/۲	۳/۵	۳/۹	۴
$f(x)$	۸	۸/۴					→۱۲←						۱۶

$f(x)$ به ۱۲ نزدیک می‌شود — $f(x)$ به ۱۲ نزدیک می‌شود

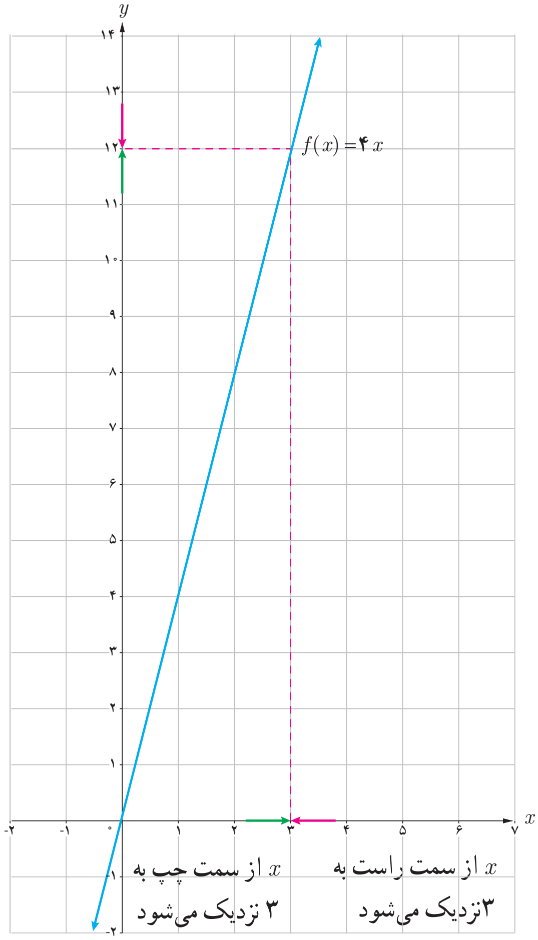
وقتی $x \to ۳^+$ گوییم x از راست به ۳ نزدیک می‌شود و وقتی $x \to ۳^-$ می‌گوییم x از چپ به ۳ نزدیک می‌شود. در حقیقت رفتار تابع در نزدیکی نقطهٔ ۳ بررسی شده است.

دیدیم که وقتی $x \to ۳^-$ مساحت مستطیل‌ها یا همان مقادیر $f(x)$ به مقدار دلخواه به ۱۲ نزدیک می‌شود. در این حالت می‌گوییم حد تابع $f(x)$ وقتی x از چپ به ۳ نزدیک می‌شود، برابر ۱۲ است و می‌نویسیم : $\lim\limits_{x \to ۳^-} f(x) = ۱۲$

به طریق مشابه وقتی $x \to ۳^+$ باز هم مساحت مستطیل‌ها به مقدار دلخواه به ۱۲ نزدیک می‌شود. در این حالت هم می‌گوییم حد تابع $f(x)$ وقتی x از سمت راست به ۳ نزدیک می‌شود، برابر ۱۲ است و می‌نویسیم : $\lim\limits_{x \to ۳^+} f(x) = ۱۲$

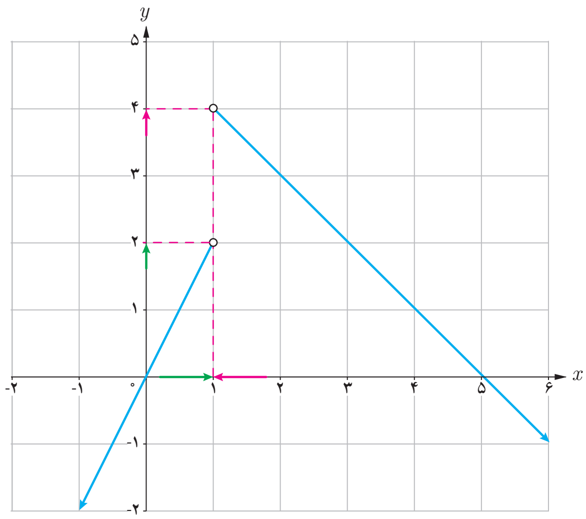
اگر حد راست و حد چپ یک تابع در یک نقطه، موجود و برابر باشند، تابع در آن نقطه حد دارد. در این فعالیت حد راست و حد چپ تابع وقتی x به ۳ نزدیک می‌شود، موجود و برابر ۱۲ است.
به‌طور خلاصه می‌نویسیم :

$$\lim_{x \to ۳} f(x) = ۱۲$$



مثال : نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x) = \begin{cases} ۲x & x < ۱ \\ -x + ۵ & x > ۱ \end{cases}$ رسم شده است.

جدول صفحهٔ بعد را کامل کنید و با استفاده از آن و به کمک نمودار $\lim\limits_{x \to ۱^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x \to ۱^-} f(x)$ را محاسبه کنید.



x از سمت چپ به ۱ نزدیک می‌شود

x از سمت راست به ۱ نزدیک می‌شود

x	۰	۰/۲	۰/۵	....	۰/۹	۰/۹۹	→۱←		....	۱/۱	۱/۲	۱/۵	۱/۸	۲
$f(x)$	۰	۰/۴	....	۱/۶	۱/۸	....	→۲	۴←	۳/۹۹	۳/۹	....	۳/۵	۳/۲	....

$f(x)$ به ۲ نزدیک می‌شود

$f(x)$ به ۴ نزدیک می‌شود

به عبارت دیگر حد تابع وقتی x از سمت چپ به ۱ نزدیک می‌شود، برابر ۲ است؛ یعنی : $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)=2$ و حد تابع وقتی x از سمت راست به ۱ نزدیک می‌شود، برابر ۴ است یعنی : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=4$. در این مثال حد راست و حد چپ هر دو وجود دارند؛ ولی باهم برابر نیستند. تابع در نقطهٔ $x=1$ حد ندارد، ولی حدهای یک‌طرفه (حد راست و حد چپ) وجود دارند.

فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مانند $(a\,,x_\circ)$ تعریف شده باشد. حد چپ f در $x_\circ$ برابر عدد l است؛ هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به l نزدیک کرد، به شرط آنکه x از سمت چپ به قدر کافی به $x_\circ$ نزدیک شود، در این صورت می‌نویسیم : $\lim\limits_{x\to x_\circ^-} f(x)=l$

به طریق مشابه فرض کنیم f در بازه‌ای مانند $(x_\circ\,,b)$ تعریف شده باشد. حد راست f در $x_\circ$ برابر عدد l است؛ هرگاه مقادیر تابع f را به هر اندازه دلخواه بتوان به l نزدیک کرد، به شرط آنکه x از سمت راست به قدر کافی به $x_\circ$ نزدیک شود. در این صورت می‌نویسیم : $\lim\limits_{x\to x_\circ^+} f(x)=l$

فرض کنیم تابع f در بازه‌ای مانند $(a$ و $b)$ شامل نقطهٔ $x_\circ$ (به جز احتمالاً در خود $x_\circ$) تعریف شده باشد. حد تابع f در $x_\circ$ برابر عدد l است؛ هرگاه مقدار تابع f را به هر اندازهٔ دلخواه بتوان به l نزدیک کرد؛ به شرط آنکه x (از دو طرف راست و چپ) به قدر کافی به $x_\circ$ نزدیک شود. در این صورت می‌نویسیم :

$$\lim_{x\to x_\circ} f(x)=l$$

$\lim\limits_{x\to x_\circ} f(x)=l$ اگر و تنها اگر $\lim\limits_{x\to x_\circ^+} f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to x_\circ^-} f(x)=l$.

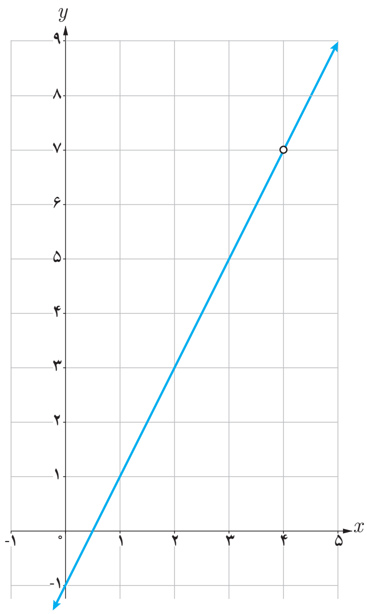
بسیاری از پدیده‌های طبیعی قابل ارائه در قالب یک تابع‌اند. در بسیاری از مواقع لازم است رفتار یک تابع را در نزدیکی یک نقطه بررسی کنیم. در فعالیت زیر رفتار سه تابع را در نزدیکی یک نقطه بررسی خواهیم کرد تا با مفهوم حد بهتر آشنا شویم.

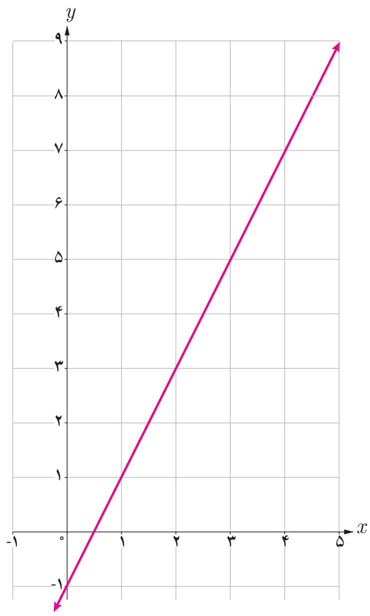
فعالیت

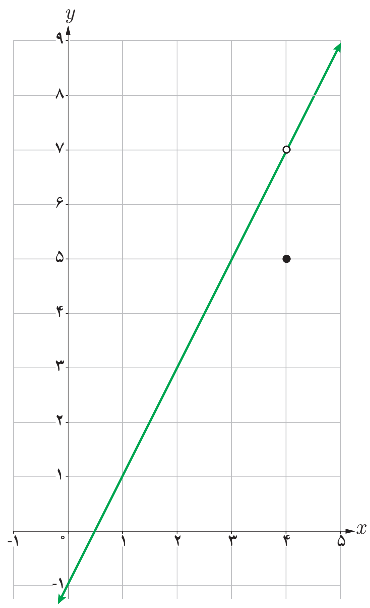
نمودار توابع زیر رسم شده‌اند :

$h(x)=۲x-۱ \quad (x\neq ۴)$ $\qquad$ $g(x)=\begin{cases} ۲x-۱ & x\neq ۴ \\ ۵ & x=۴ \end{cases}$ $\qquad$ $f(x)=۲x-۱$

هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟ آیا این سه تابع با یکدیگر برابرند؟ دامنه و برد این سه تابع را معلوم کنید.







می‌خواهیم رفتار این سه تابع را در نزدیکی نقطهٔ ۴ بررسی کنیم. ابتدا جدول را کامل کنید.

x از سمت راست به ۴ نزدیک می‌شود $\qquad$ x از سمت چپ به ۴ نزدیک می‌شود

x	۳	۳/۵	۳/۸	۳/۹	۳/۹۹	$\rightarrow ۴ \leftarrow$	۴/۰۱	۴/۱	۴/۲	۴/۵	۵
$f(x)$	۵	۶	۶/۶			$\rightarrow ۷ \leftarrow$			۷/۴	۸	۹
$g(x)$						$\rightarrow \quad \leftarrow$					
$h(x)$						$\rightarrow \quad \leftarrow$					

مقادیر f ، g و h را به هر اندازه که بخواهیم می‌توانیم به عدد ... نزدیک کنیم؛ به شرط آنکه مقادیر x به قدر کافی به عدد ... نزدیک شود.

حد هر سه تابع وقتی که $x\to ۴$ (بخوانید x به سمت ۴ میل می‌کند) برابر ... است. به عبارت دیگر :

$\lim\limits_{x\to ۴} h(x)=$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to ۴} g(x)=$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to ۴} f(x)=$

در فعالیت قبل مشاهده کردید که سه تابع f، g و h در نزدیکی نقطهٔ $x=۴$ رفتار یکسانی دارند. به عبارت دیگر حد آنها وقتی x به ۴ نزدیک می‌شود، برابر ۷ است. با این حال دربارهٔ مقادیر این سه تابع در نقطه ۴ داریم :

الف) $h(۴)$ وجود ندارد (h در ۴ تعریف نشده است).

ب) $g(۴)$ موجود است؛ ولی $\lim\limits_{x\to ۴} g(x) \neq g(۴)$.

پ) $f(۴)=۷$ و $\lim\limits_{x\to ۴} f(x)=۷$.

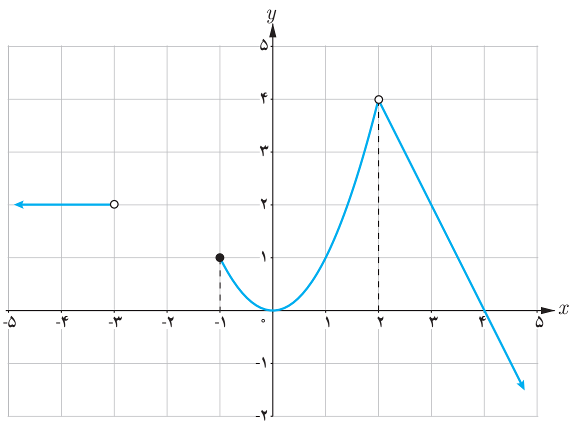
به‌طور کلی اگر دربارهٔ تابعی مانند f داشته باشیم $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ ، آنگاه دربارهٔ $f(a)$ یکی از حالت‌های زیر را داریم :

الف) $f(a)$ موجود نیست.

ب) $f(a)$ موجود است؛ ولی $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$.

پ) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

مثال ۱ : در شکل زیر نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} -۲x+۸ & x>۲ \\ x^۲ & -۱\leq x<۲ \\ ۲ & x<-۳ \end{cases}$ رسم شده‌است.



الف) $f(۲)$ تعریف نشده است؛ ولی $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=۴$

ب) $\lim\limits_{x\to -۱^+} f(x)=۱$ ولی $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)$ وجود ندارد.

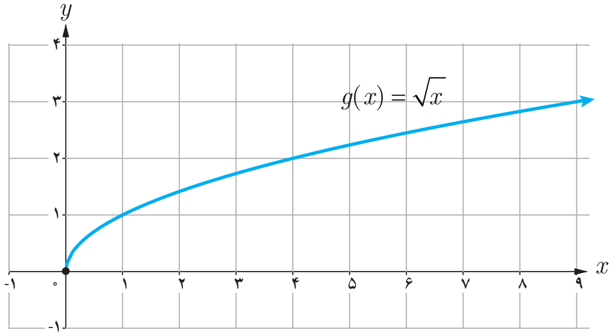
پ) $f(-۱)=۱$.

ت) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)=۰$ و $f(۰)=۰$.

ث) $\lim\limits_{x\to ۴} f(x)=۰$ و $f(۴)=۰$.

ج) $f(-۳)$ و $\lim\limits_{x\to -۳^+} f(x)$ وجود ندارند؛ ولی $\lim\limits_{x\to -۳^-} f(x)=۲$.

مثال ۲ : برای تابع $g(x)=\sqrt{x}$ داریم :



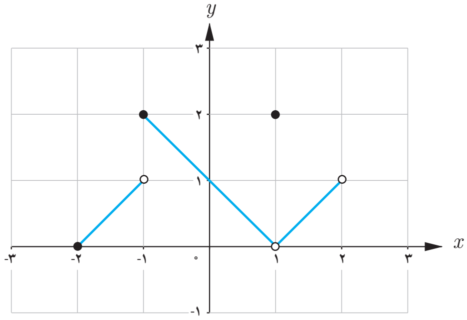
الف) $\lim\limits_{x\to ۰^+} \sqrt{x}=۰$.

ب) $\lim\limits_{x\to ۰^-} \sqrt{x}$ وجود ندارد؛ زیرا تابع برای $x<۰$ تعریف نشده است.

پ) $\lim\limits_{x\to ۰} \sqrt{x}$ وجود ندارد.

تمرین

۱ برای تابع f که نمودار آن داده شده، کدام‌یک درست و کدام‌یک نادرست است؟



الف) $\lim\limits_{x\to ۱} f(x) = ۲$ ب) $f(۱)=۲$

پ) $f(۲)=۱$ ت) $\lim\limits_{x\to -۲^{+}} f(x) = ۰$

ث) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x) = ۲$ ج) $\lim\limits_{x\to ۰} f(x) = ۱$

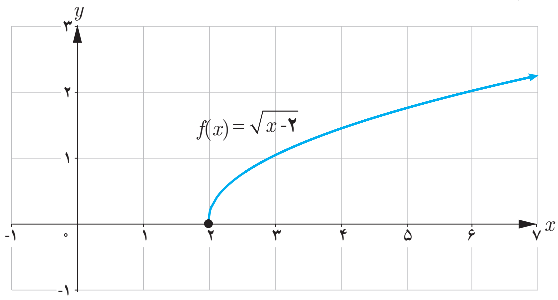
چ) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ وجود ندارد. ح) $\lim\limits_{x\to -۱} f(x)$ وجود ندارد.

۲ مثالی از یک تابع، همراه با نمودار آن ارائه کنید که حد تابع در نقطهٔ ۲ مساوی ۱− باشد.

۳ تابعی مانند f ارائه کنید که در نقطهٔ ۳ حد نداشته باشد. $f(۳)=۱$.

۴ تابعی مانند f ارائه کنید که در نقطهٔ ۲ تعریف نشده باشد. $\lim\limits_{x\to ۲} f(x) = ۴$.

۵ دربارهٔ تابع با ضابطه $f(x)=\sqrt{x-۲}$ موارد زیر را در صورت وجود محاسبه کنید :



الف) $\lim\limits_{x\to ۲^{+}} f(x)$ ب) $\lim\limits_{x\to ۲^{-}} f(x)$

پ) $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ ت) $f(۲)$

۶ تابع با ضابطه $f(x)=\begin{cases} x & x>۰ \\ -x & x<۰ \end{cases}$ را در نظر می‌گیریم.

آیا f در نقطه صفر حد دارد؟ آیا $f(۰)$ موجود است؟

۷ توابع زیر را در نظر بگیرید و به سؤالات پاسخ دهید :

$f(x)=۲x+۱$ ، $g(x)=۲x+۱ \quad (x\neq ۲)$ ، $h(x)=\begin{cases} ۲x+۱ & x\neq ۲ \\ ۳ & x=۲ \end{cases}$

الف) مقادیر $f(۲)$ ، $h(۲)$ و $g(۲)$ را در صورت وجود به‌دست آورید.

ب) حدهای زیر را محاسبه کنید :

$\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to ۲} g(x)$ ، $\lim\limits_{x\to ۲} h(x)$

۸ آیا حد تابع زیر در $x=۲$ موجود است؟

$$f(x)=\begin{cases} -x+۲ & x>۲ \\ -۲ & x=۲ \\ x-۳ & x<۲ \end{cases}$$

۹ نمودار تابع با ضابطهٔ $f(x)=\begin{cases} x^{۲}+۲ & x>۰ \\ -۲x-۲ & x\leq ۰ \end{cases}$ را رسم کنید و حد تابع در صفر را ــ در صورت وجود ــ بیابید.

۱۰ اگر $f(x)=\dfrac{|x|}{x}$ ، نمودار f را رسم کنید. آیا $\lim\limits_{x\to ۰} f(x)$ موجود است؟

درس دوم

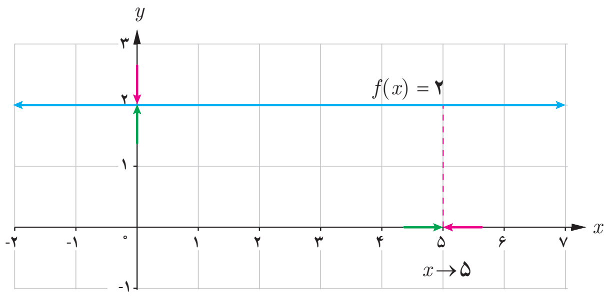
محاسبه حد توابع

یکی از عواملی که به مطالعهٔ دقیق‌تر یک تابع می‌تواند کمک کند، محاسبهٔ حد آن تابع است. برای محاسبهٔ حد یک تابع قواعد و دستورهایی وجود دارد. در این درس برخی از این قواعد به کمک شهود و با ذکر مثال توضیح داده می‌شوند.

۱ــ حد تابع ثابت

حد تابع ثابت در هر نقطه برابر مقدار تابع ثابت است.

به‌طور مثال : $\lim\limits_{x\to ۵} f(x) = ۲$

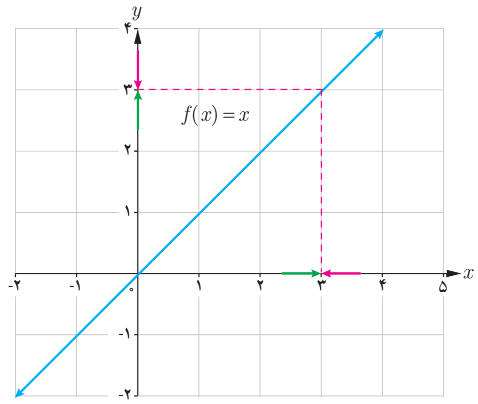


به‌طور کلی اگر c و a دو عدد حقیقی باشند : $\lim\limits_{x\to a} c = c$

۲ــ حد تابع همانی

اگر $f(x)=x$، آنگاه $\lim\limits_{x\to a} x = a$ $(a\in \mathbb{R})$

به‌طور مثال : $\lim\limits_{x\to ۳} x = ۳$



کار در کلاس

حدهای زیر را حساب کنید :

$\lim\limits_{x\to ۰} x = \cdots\cdots$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to ۷} ۵ = \cdots\cdots$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to ۷} x = \cdots\cdots$

$\lim\limits_{x\to -۷} x = \cdots\cdots$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to ۴} (-۲) = \cdots\cdots$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to ۵} ۰ = \cdots\cdots$

تاکنون برای محاسبهٔ حدّ یک تابع بیشتر از جدول‌ها و نمودارها بهره بردیم. در اینجا به کمک چند قانون، حد توابع را محاسبه می‌کنیم.

۳ــ حد مجموع

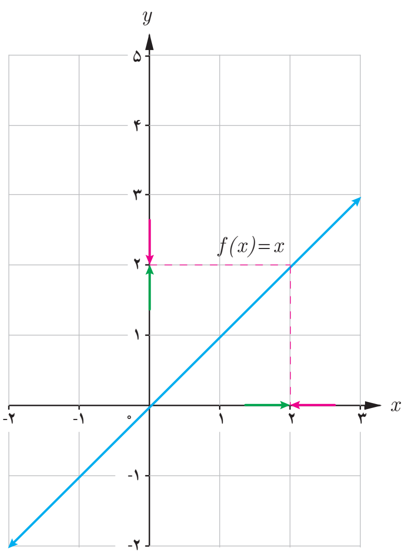
اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=m$ آن‌گاه :

$$\lim_{x\to a}(f(x)+g(x))=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)=l+m$$

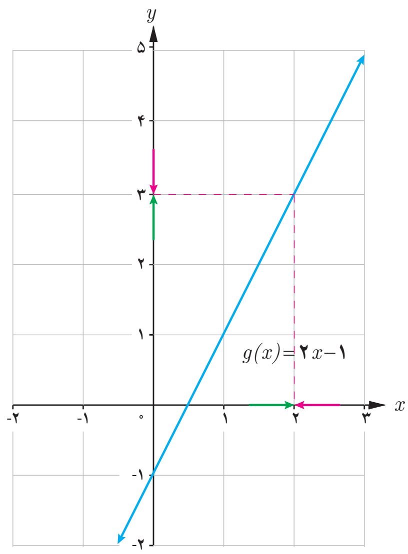
به عبارت دیگر اگر دو تابع در یک نقطه حد داشته باشند، حد مجموع دو تابع در آن نقطه برابر مجموع حدهای آنها در همان نقطه است.

کار در کلاس

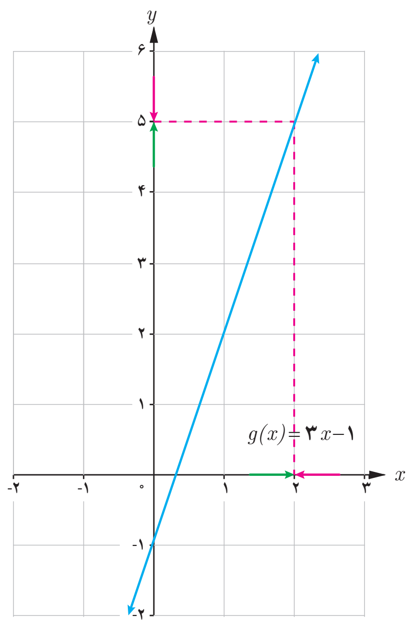
اگر $f(x)=x$ و $g(x)=۲x-۱$ آن‌گاه $\lim\limits_{x\to ۲}(f(x)+g(x))$ را به کمک قانون بالا محاسبه کنید. جاهای خالی را پر کنید و به کمک نمودارها قانون حد مجموع را نیز توضیح دهید.



$\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=\cdots\cdots\cdots$



$\lim\limits_{x\to ۲} g(x)=\cdots\cdots\cdots$



$\lim\limits_{x\to ۲}(f(x)+g(x))=\cdots\cdots+\cdots\cdots$

۴ــ حد تفاضل

اگر $\lim\limits_{x\to a} f(x)=l$ و $\lim\limits_{x\to a} g(x)=m$ آنگاه :

$$\lim_{x\to a}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to a} f(x)-\lim_{x\to a} g(x)=l-m$$

به عبارت دیگر اگر دو تابع در یک نقطه حد داشته باشند، حد تفاضل دو تابع در آن نقطه برابر تفاضل حدهای آنها در همان نقطه است.

به‌طور مثال در «کار در کلاس» قبل داریم :

$$\lim_{x\to ۲}(f(x)-g(x))=\lim_{x\to ۲} f(x)-\lim_{x\to ۲} g(x)=۲-۳=-۱$$

۵ــ حد حاصل ضرب

اگر $\lim_{x\to a} f(x)=l$ و $\lim_{x\to a} g(x)=m$ آنگاه :

$$\lim_{x\to a}(f(x).g(x))=\lim_{x\to a} f(x).\lim_{x\to a} g(x)=lm$$

به عبارت دیگر اگر دو تابع در یک نقطه حد داشته باشند، حد حاصل ضرب دو تابع در آن نقطه برابر .... آنها در همان نقطه است.

اگر c یک عدد ثابت و $\lim_{x\to a} f(x)=l$ آنگاه

$$\lim_{x\to a}(cf(x))=c\lim_{x\to a} f(x)=cl \qquad (a\in\mathbb{R})$$

کار در کلاس

الف) اگر $\lim_{x\to a} f(x)=l$ ، به کمک قانون حد حاصل ضرب هریک از حدهای زیر را بیابید.

$$\lim_{x\to a}(f(x))^۲=\lim_{x\to a}(f(x).f(x))=\text{.........}$$

$$\lim_{x\to a}(f(x))^۳=\text{.........}$$

ب) برای محاسبهٔ حد $\lim_{x\to ۲۰}(\frac{۲}{۵}x-۳)$ چگونه از قوانین ۲، ۴ و ۵ استفاده می‌کنید؟ توضیح دهید.

در حالت کلی اگر $\lim_{x\to a} f(x)=l$ و $n\in\mathbb{N}$ آنگاه :

$$\lim_{x\to a}(f(x))^n=\left(\lim_{x\to a} f(x)\right)^n=l^n$$

۶ــ حد تقسیم

اگر $\lim_{x\to a} f(x)=l$ و $\lim_{x\to a} g(x)=m$ که $m\neq ۰$ آنگاه :

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{l}{m} \qquad (m\neq ۰)$$

به عبارت دیگر اگر دو تابع در یک نقطه حد داشته باشند، حد تقسیم دو تابع در آن نقطه برابر تقسیم حدهای آنها در همان نقطه است؛ به شرط آنکه حد تابع مخرج در آن نقطه صفر نشود.

فعالیت

۱ برای تابع f با ضابطهٔ $f(x)=۳x^۲+۲x-۷$ ،

الف) با تکمیل جاهای خالی $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)$ را به‌دست آورید.

$$\lim_{x\to ۱} f(x)=\lim_{x\to ۱}(۳x^۲+۲x-۷)$$
$$=\lim_{x\to ۱}(۳x^۲)+\lim_{x\to ۱}(۲x)-\lim_{x\to ۱}۷$$
$$=۳\lim_{x\to ۱}x^۲+\dots\dots+\dots\dots$$

ب) $f(۱)$ را محاسبه کنید و درستی تساوی $\lim\limits_{x\to ۱} f(x)=f(۱)$ را بررسی کنید.

پ) دربارهٔ تابع با ضابطهٔ $g(x)=\frac{۱}{۸}x^۴-x^۳+۵x-\frac{۱}{۲}$ ، درستی تساوی $\lim\limits_{x\to ۲} g(x)=g(۲)$ را بررسی کنید.

به طور کلی حد یک تابع چندجمله‌ای در یک نقطه با مقدار تابع در آن نقطه برابر است.

۲ الف) مطلوب است : $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{۲x-۱}{x^۲-۴x+۱}$. جاهای خالی را کامل کنید.

$$\lim_{x\to ۳}\frac{۲x-۱}{x^۲-۴x+۱}=\frac{\lim\limits_{x\to ۳}(۲x-۱)}{\lim\limits_{x\to ۳}(x^۲-۴x+۱)}=\frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

ب) حدهای مقابل را حساب کنید.

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۲-۱}{\frac{۳}{۵}x^۲-۲x+۱}=\dots\dots\dots$$

$$\lim_{x\to ۱}\frac{x^۴+۲x^۳+۱}{۵x^۲+\frac{۲}{۳}}=\dots\dots\dots$$

به‌طور کلی اگر $f(x)=\frac{P(x)}{Q(x)}$ یک تابع گویا باشد که $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای هستند، برای محاسبهٔ حد $f(x)$ در نقطه‌ای مانند a کافی است که حد $P(x)$ را بر حد $Q(x)$ در آن نقطه تقسیم کنیم؛ به شرط آنکه $\lim\limits_{x\to a} Q(x)\neq ۰$

اگر در محاسبهٔ $\lim\limits_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}$ که $P(x)$ و $Q(x)$ دو چندجمله‌ای‌اند، داشته باشیم : $P(a)=Q(a)=۰$ دیگر با قانون اخیر نمی‌توان حد را محاسبه کرد. در این حالت به روش زیر عمل می‌کنیم :

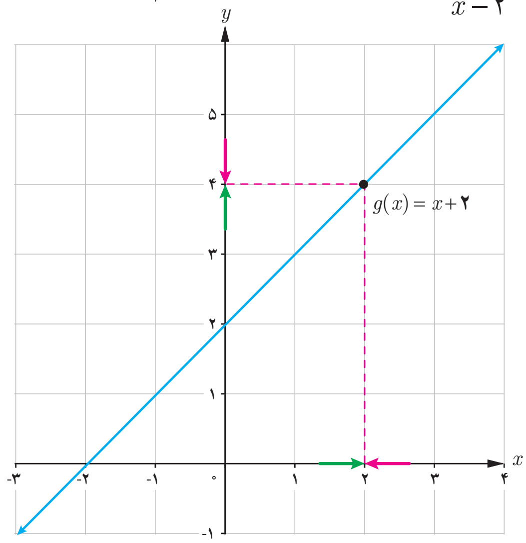
اگر $P(a)=Q(a)=۰$ در این‌صورت $P(x)$ و $Q(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیرند.
ابتدا عبارت $\frac{P(x)}{Q(x)}$ را با تقسیم $P(x)$ و $Q(x)$ بر $x-a$ ساده می‌کنیم و سپس امکان استفاده از قانون تقسیم حدها را بررسی می‌کنیم.

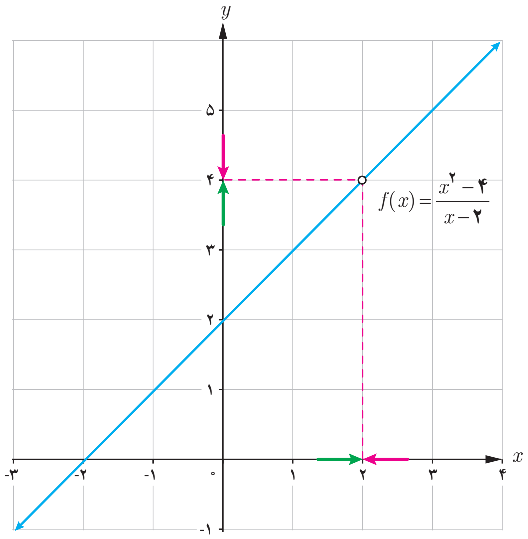
مثال : $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{x^۲-۴}{x-۲}$ را محاسبه کنید.

داریم : $\lim\limits_{x\to ۲}(x-۲)=\lim\limits_{x\to ۲}(x^۲-۴)=۰$ ،

$$\lim_{x\to ۲}\frac{x^۲-۴}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}\frac{(x+۲)(x-۲)}{x-۲}=\lim_{x\to ۲}(x+۲)=۴$$

توجه داریم که وقتی x به ۲ نزدیک می‌شود، $x\neq ۲$ پس $x-۲\neq ۰$ و صورت و مخرج کسر را می‌توانیم بر $x-۲$ تقسیم کنیم. در نمودارهای زیر توابع $f(x)=\dfrac{x^۲-۴}{x-۲}$ و $g(x)=x+۲$ رسم و حد آنها در $x=۲$ نمایش داده شده است.





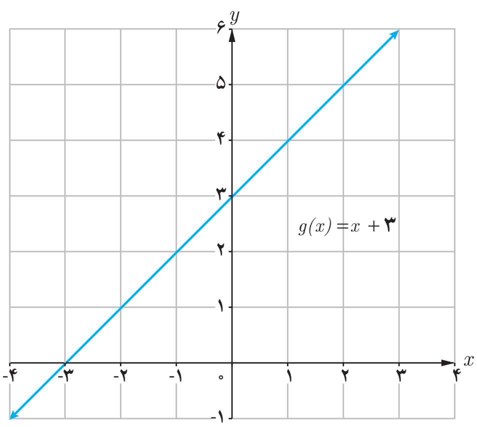
دو تابع g و f برابر نیستند (چرا؟)؛ ولی حد آنها در $x=۲$ برابر است.

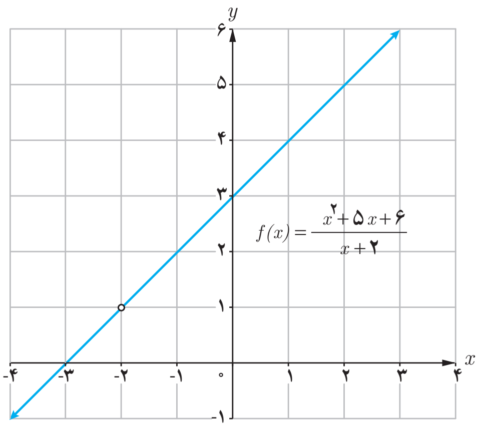
کار در کلاس

مانند مثال قبل حدها را محاسبه کنید؛ سپس به کمک نمودارها نیز محاسبهٔ حد را توضیح دهید.

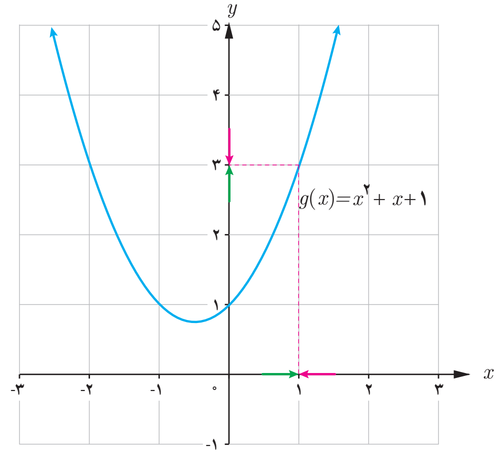
الف) $\lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{x^۲+۵x+۶}{x+۲}$

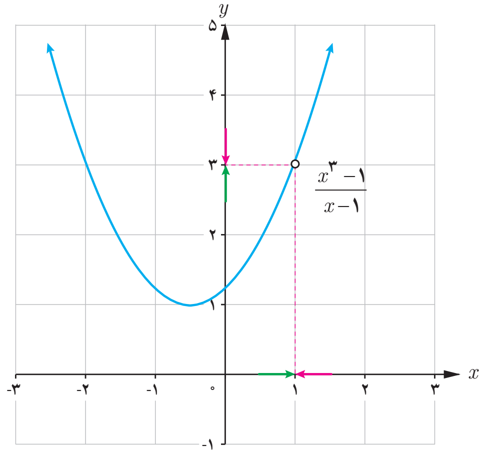
$=\lim \dfrac{(\;\cdots\cdots\;)(\;\cdots\cdots\;)}{(\;\cdots\cdots\;)}$





ب) $\lim\limits_{x\to ۱}\dfrac{x^۳-۱}{x-۱}$





۷ــ حد ریشه

اگر $\lim\limits_{x\to c}(ax+b)=l>۰$ آنگاه :

$$\lim_{x\to c}\sqrt{ax+b}=\sqrt{\lim_{x\to c} ax+b}=\sqrt{l}$$

تذکر : تمام قوانینی که در این درس دربارهٔ حد مطرح شد، برای حد راست و حد چپ تابع نیز برقرار است.

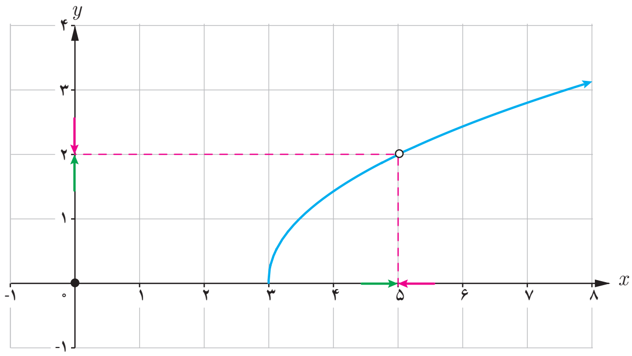
مثال : مطلوب است : $\lim\limits_{x\to ۵}\sqrt{۲x-۶}$

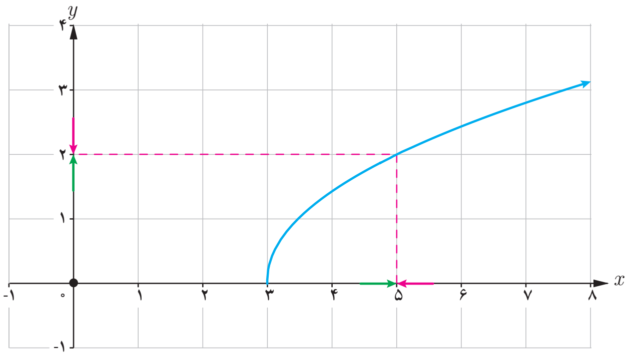
حل : به کمک دستور فوق داریم :

$$\lim_{x\to ۵}(۲x-۶)=۴>۰ \Rightarrow \lim_{x\to ۵}\sqrt{۲x-۶}=\sqrt{\lim_{x\to ۵}(۲x-۶)}=\sqrt{۴}=۲$$

کار در کلاس

۱ نمودارهای توابع با ضابطه‌های $f(x)=\sqrt{۲x-۶}$ $(x\neq ۵)$ و $g(x)=\sqrt{۲x-۶}$ رسم شده‌اند.





الف) هر نمودار به کدام تابع تعلق دارد؟

ب) آیا $\lim\limits_{x\to ۵} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۵} g(x)$ موجودند؟

پ) کدام‌یک از حدهای زیر موجودند؟ آنها را محاسبه کنید.

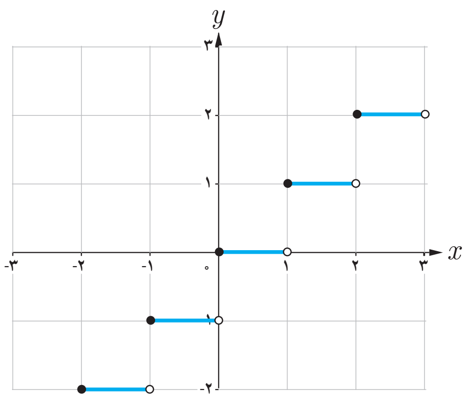
$\lim\limits_{x\to ۳} \sqrt{۲x-۶} = \cdots\cdots$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to ۳^-} \sqrt{۲x-۶} = \cdots\cdots$ $\qquad$ $\lim\limits_{x\to ۳^+} \sqrt{۲x-۶} = \cdots\cdots$

۲ دربارهٔ تابع $h(x)=\dfrac{|x|}{x}$ درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

الف) $h(x)=۱$ $\qquad$ ب) $D_h=\mathbb{R}-\{۰\}$ $\qquad$ پ) $\lim\limits_{x\to ۰^+} h(x)=۱$

ت) $h(۰)=۰$ $\qquad$ ث) $\lim\limits_{x\to ۰} h(x)$ وجود ندارد.

۳ با استفاده از نمودار تابع $f(x)=[x]$ حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.



الف) $\lim\limits_{x\to ۲^+} [x]$ $\qquad$ ب) $\lim\limits_{x\to ۲^-} [x]$

پ) $\lim\limits_{x\to ۲} [x]$ $\qquad$ ت) $\lim\limits_{x\to ۱} [x]$

ث) $\lim\limits_{x\to ۱/۵} [x]$ $\qquad$ ج) $\lim\limits_{x\to -\sqrt{۲}} [x]$

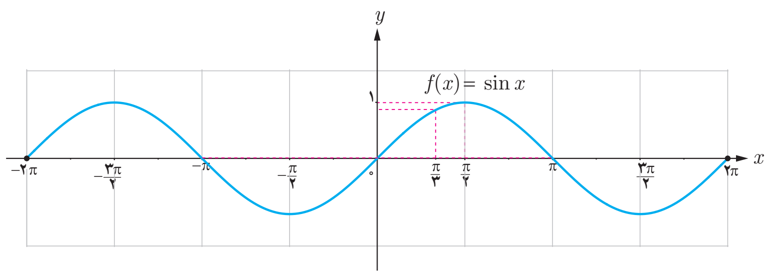
۴ حدهای زیر را در صورت وجود به‌دست آورید.

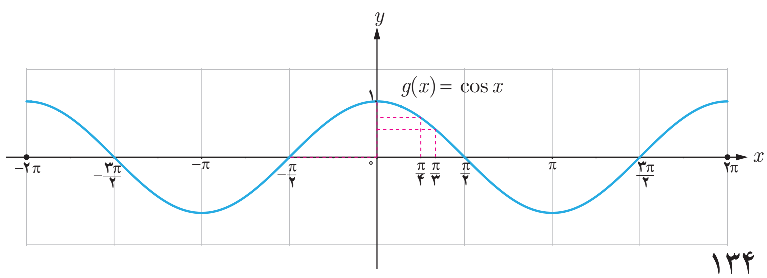
الف) $\lim\limits_{x\to ۲} \dfrac{[x]}{x}$ $\qquad$ ب) $\lim\limits_{x\to ۱^+} \dfrac{[x]-۳}{x}$

حدهای مثلثاتی

فعالیت

با استفاده از نمودار $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ حدهای زیر را بیابید.





الف) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۲}} \sin x$ $\qquad$ ب) $\lim\limits_{x\to -\pi} \sin x$

پ) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۳}^-} \sin x$ $\qquad$ ت) $\lim\limits_{x\to \pi^+} \sin x$

ث) $\lim\limits_{x\to ۰} \cos x$ $\qquad$ ج) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}^-} \cos x$

چ) $\lim\limits_{x\to \frac{-\pi}{۲}} \cos x$ $\qquad$ ح) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۳}^+} \cos x$

به‌طور کلی داریم : $\lim\limits_{x\to\alpha}\sin x=\sin\alpha$, $\lim\limits_{x\to\alpha}\cos x=\cos\alpha$

مثال : به کمک دستورهایی که در این درس آموخته‌اید، حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{2+\sin x}$

ب) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}$

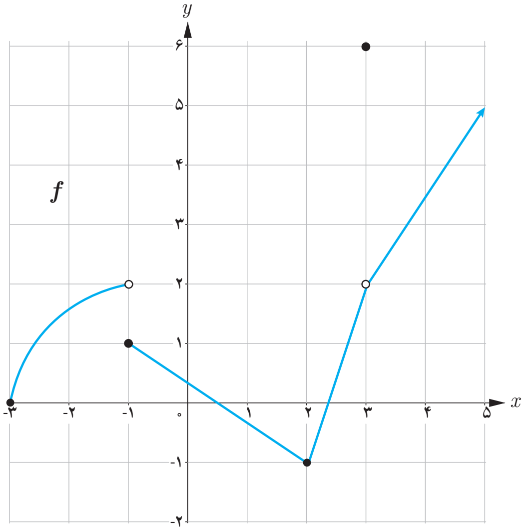
حل :

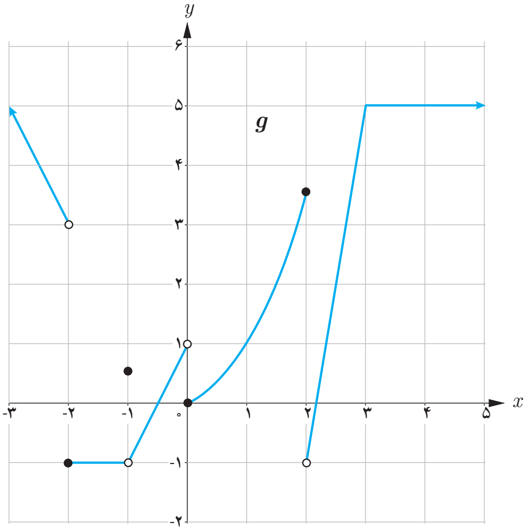
الف) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{2+\sin x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\cos x}{\lim\limits_{x\to 0}(2+\sin x)}=\dfrac{1}{2}$

ب) $\lim\limits_{x\to\pi}\dfrac{\sin x\cos x}{1+\cos^2 x}=\dfrac{\lim\limits_{x\to\pi}(\sin x\cos x)}{\lim\limits_{x\to\pi}(1+\cos^2 x)}=\dfrac{0(-1)}{2}=0$

تمرین

۱ با استفاده از قوانین حد و نمودارهای f و g حدهای زیر را (در صورت وجود) به دست آورید.





الف) $\lim\limits_{x\to 3}f(x)$

ب) $\lim\limits_{x\to -1}f(x)$

پ) $\lim\limits_{x\to 3}g(x)$

ت) $\lim\limits_{x\to 3}\big(f(x)+g(x)\big)$

ث) $\lim\limits_{x\to -1}\big(f(x)+g(x)\big)$

ج) $\lim\limits_{x\to 2}\big(2f(x)+5g(x)\big)$

چ) $\lim\limits_{x\to 0}\big(f(x)\big)^4$

ح) $\lim\limits_{x\to 0}\big(g(x)\big)^2$

خ) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{f(x)}{g(x)}$

د) $\lim\limits_{x\to 5}\big(f(x).g(x)\big)$

۲ دو تابع متفاوت مثال بزنید که در یک نقطه دارای حدهای برابر باشند.

۳ حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۷}(-۳)$ ب) $\lim\limits_{x\to ۰}(-۲x-۷)$ پ) $\lim\limits_{x\to -۱}(۳x^۲-۴x+۵)$

ت) $\lim\limits_{x\to ۳}\dfrac{x^۲-۳x}{x^۲-۹}$ ث) $\lim\limits_{x\to ۰}\dfrac{x}{۲x^۲-x}$ ج) $\lim\limits_{x\to -۲}\dfrac{x^۳+۸}{x+۲}$

چ) $\lim\limits_{x\to -۲}[x]$ ح) $\lim\limits_{x\to ۰^+}\sqrt{x}$ خ) $\lim\limits_{x\to ۲}\sqrt{x+۷}$

د) $\lim\limits_{x\to ۰^-}\sqrt{x}$ ذ) $\lim\limits_{x\to ۲}\sqrt{x+۵}$ ر) $\lim\limits_{x\to ۱}\sqrt{x-۲}$

ز) $\lim\limits_{x\to ۳^+}\dfrac{x-۲}{[x]+۱}$ ژ) $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{۳}}\cos x$ س) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{۴}}(\sin x+\cos x)$

ش) $\lim\limits_{x\to -۲^+}\dfrac{x}{[x]}$ ص) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{x^۲+x-۶}{x^۲-۶x+۸}$ ض) $\lim\limits_{x\to ۰}(x+[x])$

۴ اگر $\lim\limits_{x\to ۲}f(x)=۳$ و $\lim\limits_{x\to ۲}g(x)=۰$ و $\lim\limits_{x\to ۲}h(x)=-۱$ حدهای زیر را در صورت وجود بیابید.

الف) $\lim\limits_{x\to ۲}(f(x)+h(x))$ ب) $\lim\limits_{x\to ۲}(h(x))^۵$

پ) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ ت) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{g(x)}{f(x)}$

ث) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{۳f(x)}{g(x)-۵h(x)}$ ج) $\lim\limits_{x\to ۲}\dfrac{۱}{h(x)}$

۵ نمودار دو تابع $f(x)=\dfrac{|x-۳|}{x-۳}$ و $g(x)=۱$ را رسم کنید. آیا $\lim\limits_{x\to ۳}f(x)$ موجود است؟ (چرا؟) $\lim\limits_{x\to ۳}g(x)$ چطور؟ در چه نقاطی حد دو تابع با هم برابرند؟

۶ در هر یک از حالت‌های زیر دربارهٔ حد تابع $f+g$ چه می‌توان گفت؟

الف) اگر توابع f و g هیچ‌کدام در نقطه‌ای مانند a حد نداشته باشند.

ب) اگر تابع f در a حد داشته باشد ولی تابع g در a حد نداشته باشد.

۷ اگر m یک عدد صحیح باشد، حدهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

الف) $\lim\limits_{x\to m^+}[x]$ ب) $\lim\limits_{x\to m^-}[x]$ پ) $\lim\limits_{x\to m}[x]$

به‌طور کلی تابع $f(x)=[x]$ در چه نقاطی حد دارد؟

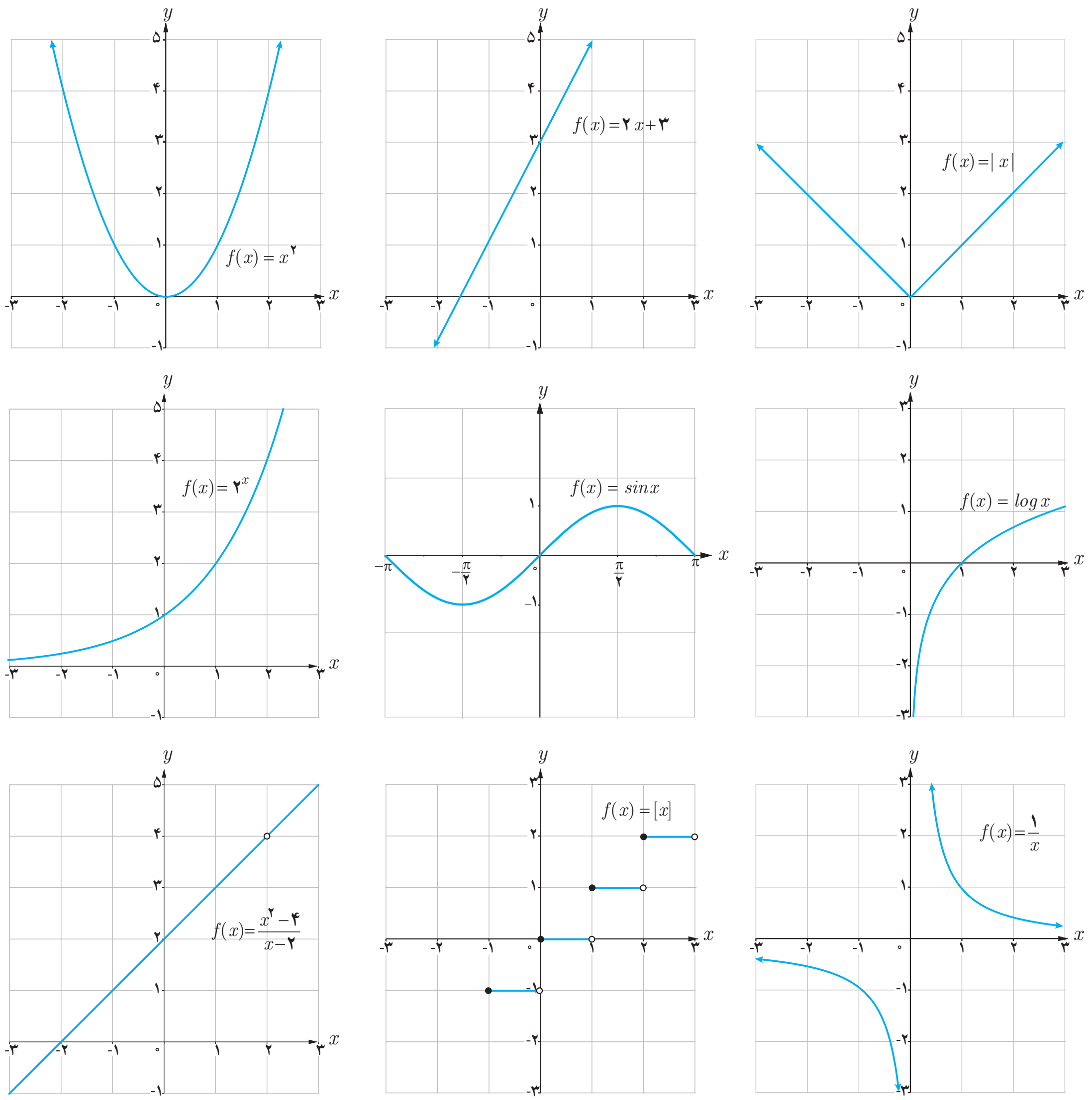
درس سوم

پیوستگی

یکی از مفاهیم مهم در مبحث حد توابع، مفهوم پیوستگی است که در این درس با آن آشنا می‌شوید.

فعالیت

نمودارهای شش تابع در شکل‌های زیر رسم شده‌اند.

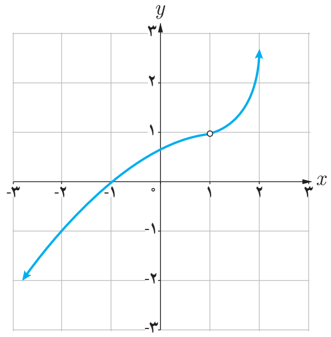


الف) کدام‌یک از نمودارهای فوق را می‌توان بدون آنکه قلم را از روی کاغذ برداشت، رسم کرد؟

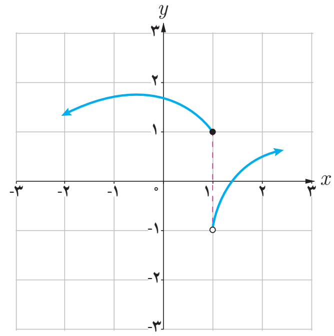
ب) مثال دیگری مشابه توابع بالا ارائه کنید.

ردیف‌های اول و دوم نمونه‌ای از توابع پیوسته هستند.

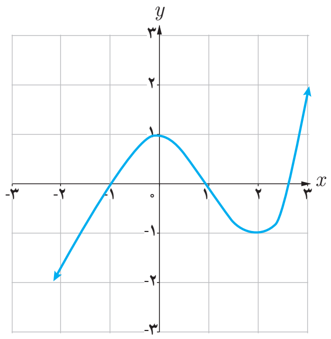
مثال : تابع های داده شده با نمودارهای الف و ب پیوسته نیستند، ولی توابع با نمودارهای پ و ت پیوسته‌اند.



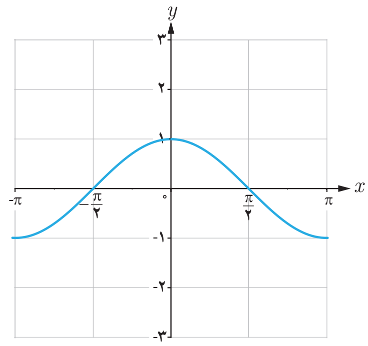
(الف)



(ب)



(پ)

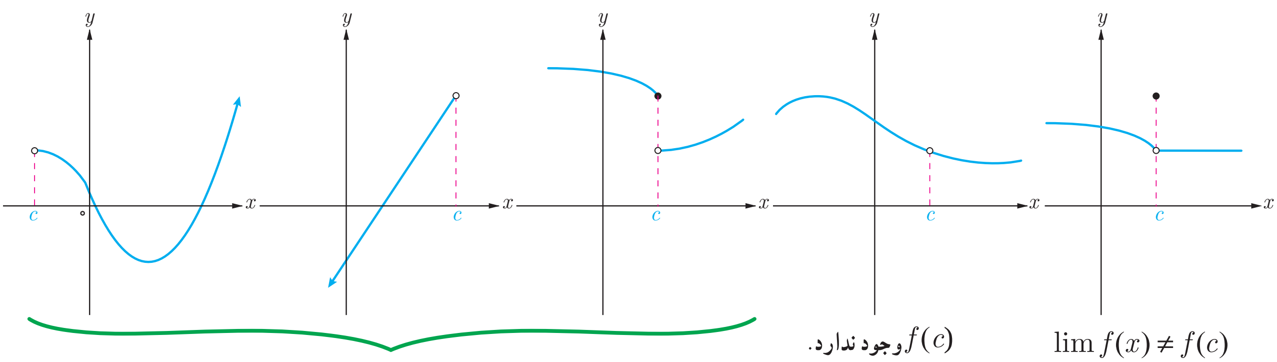


(ت)

اکنون به بررسی دقیق‌تر مفهوم پیوستگی می‌پردازیم. به این منظور پیوستگی تابع در یک نقطه را تعریف می‌کنیم.

تابع f در نقطه $x=c$ را پیوسته نامیم؛ هرگاه $(c\in \mathbb{R})$ $\quad \lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

به عبارت دیگر برای آنکه تابع f در c پیوسته باشد، باید $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ و $f(c)$ هر دو موجود و با هم برابر باشند. در غیر این‌صورت تابع را در c ناپیوسته می‌نامیم. در نمودارهای زیر ناپیوسته بودن یک تابع در نقطهٔ c در شرایط مختلف نمایش داده شده است. شما هم مثال‌های دیگری ارائه کنید.



$\lim\limits_{x\to c} f(x)\neq f(c)$

$f(c)$ وجود ندارد.

$\lim\limits_{x\to c} f(x)$ وجود ندارد.

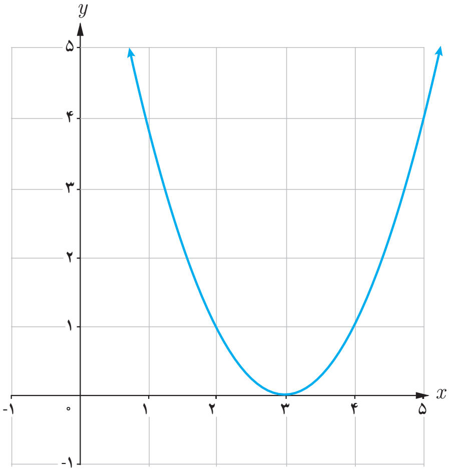
کار در کلاس

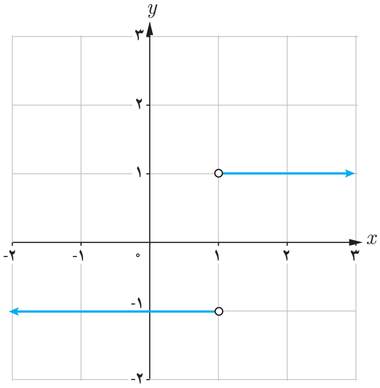
کدام‌یک از توابع زیر با ضابطه‌های داده شده در $x=۱$ ناپیوسته‌اند؟

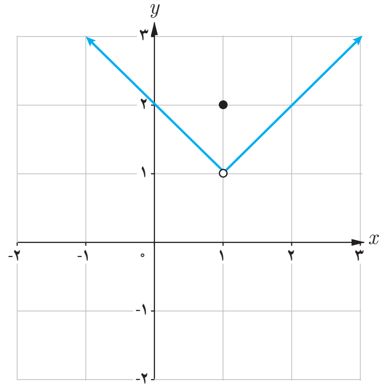
الف) $f(x)=(x-۳)^۲$

ب) $g(x)=\dfrac{|x-۱|}{x-۱}$

پ) $h(x)=\begin{cases} x & x>۱ \\ ۲ & x=۱ \\ -x+۲ & x<۱ \end{cases}$







فعالیت

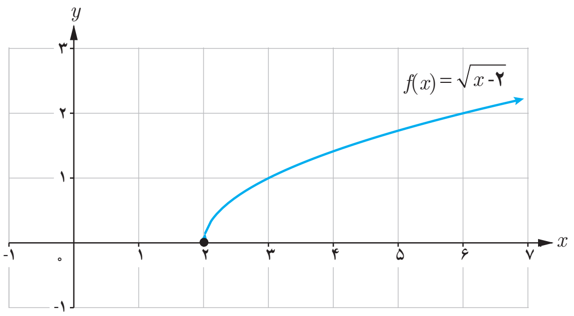
تابع $f(x)=\sqrt{x-۲}$ با نمودار زیر را در نظر بگیرید.

الف) کدام‌یک از حدهای $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۲^-} f(x)$ موجودند؟

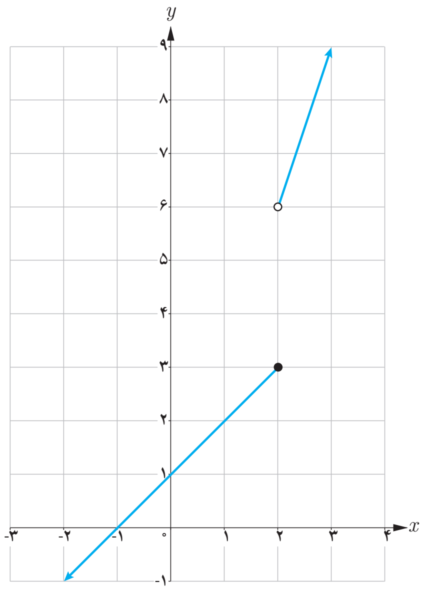
ب) آیا $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)$ موجود است؟

پ) آیا تابع f در $x=۲$ پیوسته است؟

در این فعالیت $\lim\limits_{x\to ۲^+} f(x)=f(۲)$ گوییم f از طرف راست در نقطهٔ ۲ پیوسته است.



تابع f را در $x=c$ از طرف راست پیوسته می‌نامیم؛ هرگاه $\lim\limits_{x\to c^+} f(x)=f(c)$. در این‌صورت می‌گوییم f در $x=c$ پیوستگی راست دارد.



کار در کلاس

تابع با ضابطه $g(x)=\begin{cases}۳x & x>۲\\ x+۱ & x\leq ۲\end{cases}$ و نمودار آن را در نظر بگیرید.

الف) کدام‌یک از حدهای $\lim\limits_{x\to ۲^+} g(x)$ و $\lim\limits_{x\to ۲^-} g(x)$ موجودند؟

ب) آیا $\lim\limits_{x\to ۲} g(x)$ موجود است؟

پ) آیا تابع f در $x=۲$ پیوسته است؟

برای تابع $g(x)$ ، $\lim\limits_{x\to ۲^-} g(x)=g(۲)$ ، گوییم g از طرف چپ در نقطه ۲ پیوسته است.

تابع f را در $x=c$ از طرف چپ پیوسته می‌نامیم، هرگاه $\lim\limits_{x\to c^-} f(x)=f(c)$.
در این صورت گوییم f در $x=c$ پیوستگی چپ دارد.

با توجه به تعریف معلوم است که f در $x=c$ پیوسته است، هرگاه f در c هم پیوستگی راست و هم پیوستگی چپ داشته باشد.

مثال : الف) تابع $f(x)=[x]$ در $x=۲$ پیوستگی راست دارد. تابع $f(x)=[x]$ در $x=۲$ پیوسته نیست.

ب) تابع $f(x)=\begin{cases}x^۲ & x\leq ۰\\ ۲x+۳ & x>۰\end{cases}$ در نقطهٔ ۰ پیوستگی چپ دارد. تابع f در $x=۰$ پیوسته نیست.

پ) تابع $g(x)=\begin{cases}-x+۳ & x<۱\\ ۲x & x\geq ۱\end{cases}$ در $x=۱$ پیوسته است.

پیوستگی روی یک بازه

تابع f روی بازهٔ (a,b) پیوسته است؛ هرگاه، در هر نقطه این بازه پیوسته باشد.
تابع f روی بازهٔ $[a,b]$ پیوسته است؛ هرگاه f در بازه (a,b) پیوسته باشد و در نقطه a پیوسته راست و در نقطه b پیوسته چپ باشد.

کار در کلاس

پیوستگی روی بازه‌های $[a,b)$ و $(a,b]$ را به طور مشابه تعریف کنید.

تابع f روی بازه $[a,b)$ پیوسته است هرگاه ....

در این حالت اگر $b=+\infty$ ، یعنی تابع f در a پیوستگی راست دارد و در تمام نقاط بزرگ‌تر از a پیوسته است.

تابع f روی بازه $(a,b]$ پیوسته است هرگاه ....

در این حالت اگر $a=-\infty$ ، یعنی تابع f در b پیوستگی چپ دارد و در تمام نقاط کوچک‌تر از b پیوسته است.

اگر $D_f=\mathbb{R}$ و f در هر نقطه از دامنه‌اش پیوسته باشد، می‌گوییم f روی بازهٔ $(-\infty,+\infty)$ پیوسته است.

کار در کلاس

سه تابع متفاوت مثال بزنید که :

الف) روی بازه $(-\infty,\infty)$ پیوسته باشد. ب) روی بازه $[-۲,+\infty)$ پیوسته باشد. پ) روی بازه $(-\infty,۰]$ پیوسته باشد.

مثال : الف) اگر f یک تابع چندجمله‌ای باشد، آنگاه f روی بازه $(-\infty,\infty)$ پیوسته است؛ زیرا $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$ $\quad(c\in\mathbb{R})$

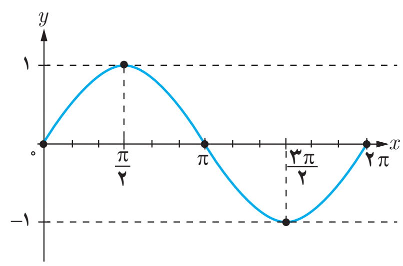
ب) توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ روی بازه‌های $(-\infty,\infty)$ پیوسته‌اند.

پ) تابع $f(x)=\log_۳ x$ روی بازه $(۰,\infty)$ پیوسته است.

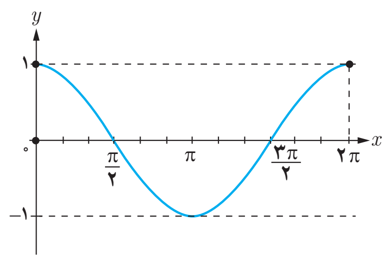
ت) اگر تابعی روی بازه‌ای پیوسته باشد، روی هر زیر بازه دلخواه از آن نیز پیوسته است.

ث) توابع $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\cos x$ روی بازه‌های $[۰,۲\pi]$ پیوسته‌اند.

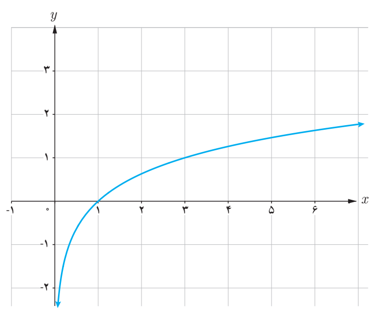
ج) تابع $f(x)=\log_۳ x$ روی بازه $[۱,۲]$ پیوسته است.



$f(x)=\sin x$

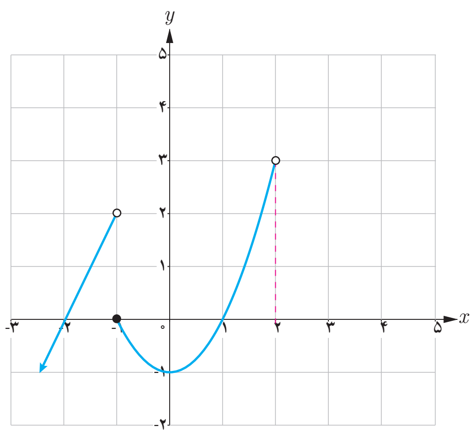


$f(x)=\cos x$



$f(x)=\log_۳ x$

کار در کلاس



۱ تابع f با ضابطهٔ مقابل را در نظر می‌گیریم :

$$f(x)=\begin{cases} ۲x+۴ & x<-۱ \\ x^۲-۱ & -۱\le x<۲ \\ -x+۵ & ۲<x<۵ \end{cases}$$

الف) نمودار f را کامل کنید.

ب) دامنه و برد f را به‌دست آورید.

پ) پیوستگی تابع را روی بازه‌های $[-۱,۱]$ و $(۲,۵)$ و $[-۲,۰]$ بررسی کنید.

۲ دربارهٔ تابع f کدام‌یک از گزاره‌های زیر درست و کدام‌یک نادرست است؟

الف) f روی بازهٔ $(-\infty,-۱]$ پیوسته است.

ب) f روی بازهٔ $(-\infty,-۱)$ پیوسته است.

پ) f روی بازهٔ $[۲,۵]$ پیوسته است.

ت) $\lim\limits_{x\to ۵} f(x)=۰$

ث) $\lim\limits_{x\to ۵^-} f(x)=۰$

ج) f روی بازهٔ $(-۲,۰)$ پیوسته است.

۳ با توجه به تابع f :

الف) دو بازهٔ بسته مثال بزنید که تابع در یکی از آنها پیوسته و در دیگری ناپیوسته باشد.

ب) a و bای را مثال بزنید که تابع روی $(a,b]$ پیوسته باشد؛ اما روی $[a,b]$ پیوسته نباشد.

تمرین

۱ با توجه به توابع f و g و h با ضابطه‌های داده شده، به سؤالات پاسخ دهید.

$$f(x)=۲x+۱ \quad , \quad g(x)=۲x+۱ \quad x\neq ۲ \quad , \quad h(x)=\begin{cases} ۲+x & x\neq ۲ \\ ۳ & x=۲ \end{cases}$$

الف) مقادیر زیر را در صورت وجود به دست آورید : $f(۲)=$, $g(۲)=$, $h(۲)=$

ب) حدود زیر را در صورت وجود به دست آورید : $\lim\limits_{x\to ۲} f(x)=$ $\lim\limits_{x\to ۲} g(x)=$ $\lim\limits_{x\to ۲} h(x)=$

پ) کدام تابع در $x=۲$ پیوسته است؟

۲ نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x-۳ & x<۲ \\ -۲ & x=۲ \\ -x+۲ & x>۲ \end{cases}$ را رسم کنید. f در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟

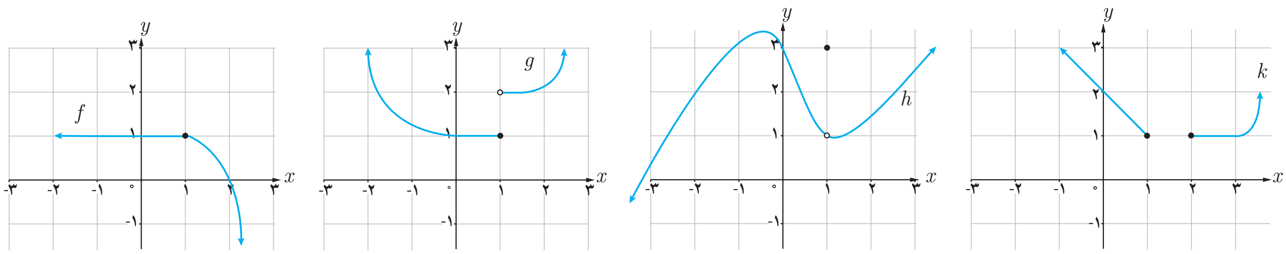
۳ توابع $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^۲-۹}{x-۳} & x\neq ۳ \\ ۶ & x=۳ \end{cases}$ و $g(x)=\dfrac{x^۲-۹}{x-۳}$ را در نظر می‌گیریم. پیوستگی این تابع‌ها را در $x=۳$ بررسی کنید.

۴ با توجه به نمودار تابع $f(x)=[x]$، تابع در چه نقاطی پیوسته و در چه نقاطی ناپیوسته است؟

۵ پیوستگی تابع $f(x)=\begin{cases} -۲x+۲ & x\leq ۰ \\ x^۲+۲ & x>۰ \end{cases}$ را در نقطهٔ $x=۰$ بررسی کنید. پیوستگی تابع در نقاط دیگر چگونه است؟

۶ تابعی مثال بزنید که حد آن در نقطهٔ $x=۱$ مساوی -۱ باشد؛ ولی تابع در ۱ پیوسته نباشد. نمودار این تابع را رسم کنید.

۷ کدام‌یک از توابع زیر در $x=۱$ پیوسته است؟



۸ در مواقعی تجویز دارو برای کودکان بر اساس جرم کودک انجام می‌گیرد. روش‌های مختلفی برای برآورد کردن جرم یک کودک (برحسب کیلوگرم) در شرایط اضطراری (که جرم نمی‌تواند اندازه‌گیری شود) وجود دارد. یکی از این روش‌ها استفاده از تابع $f(t)=\begin{cases} ۶t+۴ & ۰\leq t<۱ \\ ۲t+۱۰ & ۱\leq t\leq ۱۰ \end{cases}$ است که در آن t سن کودک برحسب سال است. به‌طور مثال جرم یک کودک ۶ ماهه به کمک این تابع چنین محاسبه می‌شود :

$$f(\tfrac{۱}{۲})=۶\times(\tfrac{۱}{۲})+۴=۷ \qquad ۶ \text{ ماه} \to \frac{۶}{۱۲}=\frac{۱}{۲} \text{ سال}$$

الف) $f(۲)$ و $f(۵)$ را بیابید. ب) آیا f در بازهٔ $[۰,۱۰]$ پیوسته است؟

فصل ۷ آمار و احتمال

رامسر، استان مازندران

امروزه نقش روزافزون آمار و احتمال در حل مسائل زندگی بر کسی پوشیده نیست. یکی از کاربردهای مهم آمار و احتمال، پیش‌بینی وضع هواست. با پیشرفت روش‌های علمی، احتمال پیش‌بینی درست آب‌وهوا به‌طور چشمگیری افزایش یافته است.

درس اوّل — **احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل**

درس دوم — **آمار توصیفی**

درس اول

احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل

احتمال شرطی و پیشامدهای مستقل

در سال‌های قبل با مفاهیم زیر از احتمال آشنا شدید.

یادآوری

۱ــ پدیدهٔ تصادفی : پدیده یا آزمایشی است که نتیجهٔ آن را نتوان قبل از انجام به‌طور قطعی پیش‌بینی کرد.

۲ــ فضای نمونه‌ای : مجموعهٔ تمام نتایج ممکن یک پدیدهٔ تصادفی را فضای نمونه‌ای آن پدیده می‌نامیم و معمولاً آن را با S نمایش می‌دهیم.

۳ــ پیشامد تصادفی : هر زیر مجموعه از S را یک پیشامد تصادفی در فضای نمونه‌ای S می‌نامیم.

۴ــ پیشامدها و اعمال روی آنها

فرض کنیم A و B پیشامدهایی از فضای نمونه‌ای S باشند.

الف) اجتماع دو پیشامد : پیشامد $A\cup B$ وقتی رخ می‌دهد که حداقل یکی از پیشامدهای A یا B رخ دهد.

ب) اشتراک دو پیشامد : پیشامد $A\cap B$ وقتی رخ می‌دهد که هر دو پیشامد A و B رخ دهند.

پ) تفاضل دو پیشامد : پیشامد A-B وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ دهد، ولی پیشامد B رخ ندهد.

ت) متمم یک پیشامد : پیشامد A' (یا A^c) وقتی رخ می‌دهد که پیشامد A رخ ندهد.

۵ــ پیشامدهای ناسازگار : دو پیشامد A و B را ناسازگار می‌گوییم، هرگاه A و B با هم رخ ندهند؛ یعنی $A\cap B=\varnothing$

۶ــ رابطهٔ محاسبهٔ احتمال وقوع یک پیشامد :

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همهٔ حالت‌های ممکن}}$$

۷ــ رابطهٔ محاسبهٔ احتمال اجتماع یا اشتراک دو پیشامد A و B :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

احتمال شرطی

فرض کنیم در یک قرعه‌کشی اعداد ۱ تا ۲۰ به بیست نفر اختصاص داده شده‌اند و قرار است یک شماره به تصادف انتخاب و به عنوان برنده اعلام شود. اگر شمارهٔ ۸ به‌دست شما افتاده باشد، با چه احتمالی شما برنده خواهید شد؟

اگر بدانید که یک شمارهٔ یک رقمی انتخاب خواهد شد، با چه احتمالی برنده خواهید شد؟

گاهی اوقات وقوع یک پیشامد بر احتمال وقوع پیشامدی دیگر تأثیر می‌گذارد. مثلاً احتمال برنده شدن شما با دانستن اینکه شمارهٔ انتخابی، یک رقمی است، متفاوت خواهد بود از حالتی که این موضوع را ندانیم. در واقع احتمال اول را احتمال برنده شدن شما و احتمال دوم را احتمال برنده شدن شما به شرطی که شمارهٔ انتخاب شده یک رقمی باشد، می‌خوانیم.

منظور از "احتمال A به شرط B" که آن را با $P(A|B)$ نمایش می‌دهیم، احتمال وقوع پیشامد A است، به شرط آنکه بدانیم پیشامد B رخ داده است.

می‌دانیم که :

$$\text{احتمال رخ دادن یک پیشامد} = \frac{\text{تعداد حالت‌های مطلوب}}{\text{تعداد همهٔ حالت‌های ممکن}}$$

حال با توجه به اینکه در $P(A|B)$ پیش فرض رخ دادن پیشامد B در نظر گرفته شده است، در صورت و مخرج کسر بالا خواهیم داشت[۱] :

۱ــ حالت‌های مطلوب، همهٔ حالت‌هایی است که A رخ دهد، در حالی که B رخ داده است؛ یعنی همهٔ حالت‌هایی که هم A و هم B رخ دهد، یا به عبارتی این تعداد برابر است با $n(A\cap B)$.

۲ــ همهٔ حالت‌های ممکن در اینجا برابر همهٔ حالت‌هایی است که در آنها B رخ داده باشد. به عبارتی این تعداد برابر با $n(B)$ است.

بنابراین داریم :

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}$$

که با تقسیم صورت و مخرج این عبارت به $n(S)$ این رابطه به‌صورت زیر بیان می‌شود :

$$(۱)\quad P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}$$

توجه : شرط محاسبهٔ احتمال پیشامد A به شرط وقوع پیشامد B آن است که $P(B)\neq ۰$. بنابراین اگر $P(B)=۰$ ، آنگاه $P(A|B)$ قابل تعریف نیست.

کار در کلاس

در یک مسابقهٔ اتومبیل رانی احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود و به خط پایان نیز برسد، برابر ۰/۷ است و احتمال اینکه یک اتومبیل دچار نقص فنی نشود، برابر ۰/۸ است. اگر بدانیم یک اتومبیل دچار نقص فنی نشده است، با چه احتمالی به خط پایان رسیده است؟

حل :

A: پیشامد دچار نقص فنی نشدن اتومبیل

B: پیشامد رسیدن به خط پایان

$$\Rightarrow \begin{cases} P(A)=\cdots\cdots \\ P(A\cap B)=\cdots\cdots \end{cases}$$

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\cdots\cdots$$

۱ــ آنچه در اینجا گفته شد صرفاً نوعی توضیح منطقی و شهودی برای رابطهٔ $P(A|B)$ است و به عنوان اثبات دقیق ریاضی مدنظر نیست.

مثال : اعداد ۱ تا ۹ را روی نُه کارت می‌نویسیم و سه کارت را به تصادف انتخاب می‌کنیم. مطلوب است احتمال اینکه هر سه عدد زوج باشند به شرط اینکه مجموع آنها زوج باشد.

حل : برای اینکه مجموع سه عدد زوج باشند یا هر سه باید زوج باشند و یا اینکه دو عدد فرد و یکی زوج باشند. اما اعداد زوج چهار تا و اعداد فرد پنج تا هستند.

A: پیشامد اینکه هر سه عدد زوج باشند.

B: پیشامد اینکه مجموع اعداد سه کارت زوج باشند.

لذا تعداد حالت‌هایی که هر سه عدد زوج باشند برابر است با $\binom{۴}{۳}=۴$ و تعداد حالت‌هایی که دو عدد فرد و یکی زوج باشند، برابر است با $\binom{۵}{۲}\times\binom{۴}{۱}=۴۰$. بنابراین ۴۴ حالت هست که مجموع سه عدد زوج باشند و در ۴ حالت آن هر سه عدد زوج‌اند. پس :

$$P(A|B)=\frac{n(A\cap B)}{n(B)}=\frac{۴}{۴۴}=\frac{۱}{۱۱}$$

مثال : فرض کنید احتمال اینکه یک تیم فوتبال اصلی‌ترین رقیبش را ببرد، $\frac{۱}{۶}$ باشد. احتمال قهرمانی این تیم در حال حاضر $\frac{۱}{۴}$ و در صورتی که اصلی‌ترین رقیبش را ببرد، این احتمال به $\frac{۱}{۳}$ افزایش خواهد یافت. با چه احتمالی حداقل یکی از دو اتفاقِ «قهرمان شدن» یا «بردن اصلی‌ترین رقیب» برای این تیم اتفاق خواهد افتاد؟

A: پیشامد قهرمان شدن

B: پیشامد برد اصلی‌ترین رقیب

$P(A|B)=\frac{۱}{۳}$ و $P(B)=\frac{۱}{۶}$ و $P(A)=\frac{۱}{۴}$ و

حل : هدف محاسبهٔ $P(A\cup B)$ است و برای آن داریم :

$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$$

حال با توجه به رابطهٔ (۱) داریم :

$$P(A\cap B)=P(A|B)\times P(B)=\frac{۱}{۱۸}$$

و با جای‌گذاری مقادیر داریم :

$$P(A\cup B)=\frac{۱۳}{۳۶}$$

پیشامدهای مستقل

در مثال‌های قبل دیدیم که برخی پیشامدها بر احتمال وقوع پیشامدهای دیگر تأثیر می‌گذارند، ولی برخی پیشامدها بر احتمال وقوع یکدیگر تأثیری ندارند.

پیشامد A از پیشامد B مستقل است، هرگاه وقوع B بر احتمال وقوع A تأثیر نگذارد.

به عبارتی در این صورت وقوع B، احتمال وقوع A را کم یا زیاد نمی‌کند. در واقع احتمال وقوع **A با شرط رخ دادن B** و **بدون این شرط** یکسان است. یعنی پیشامد A از B مستقل است، هرگاه $P(A|B)=P(A)$ $(P(B)\neq 0)$. اما از آنجا که داریم $P(A|B)=\dfrac{P(A\cap B)}{P(B)}$ ، پس :

مستقل بودن A از B معادل است با اینکه $P(A\cap B)=P(A).P(B)$ *

از این رابطه به وضوح نتیجه می‌شود که اگر A نسبت به B مستقل باشد، B نیز نسبت به A مستقل است. لذا می‌توان گفت :

دو پیشامد A و B از هم مستقل‌اند هرگاه وقوع هر یک بر احتمال وقوع دیگری تأثیر نداشته باشد.

بنابراین دو پیشامد A و B مستقل نیستند اگر و تنها اگر

$$P(A\cap B)\neq P(A)P(B)$$

حال این سؤال مطرح می‌شود که آیا استقلال یا عدم استقلال دو پیشامد را همیشه می‌توان به‌طور شهودی تشخیص داد یا اینکه چه وقت باید از رابطهٔ * برای تشخیص استقلال دو پیشامد استفاده کرد.

(۱) با توجه به رابطهٔ محاسبهٔ احتمال، یعنی : $P(A)=\dfrac{n(A)}{n(S)}$

اگر پیشامدی مانند B با وقوع پیشامد A هیچ ارتباطی نداشته باشد، می‌توان به سادگی نشان داد که وقوع پیشامد B، احتمال وقوع پیشامد A را تغییر نمی‌دهد؛ بنابراین دو پیشامد مذکور از هم مستقل‌اند.

مثال : یک سکه و یک تاس را پرتاب می‌کنیم. این احتمال را که سکه پشت و تاس عددی زوج بیاید، محاسبه کنید.

حل : فرض کنیم

A: پیشامد رو شدن عددی زوج در پرتاب تاس

B: پیشامد پشت آمدن سکه

طبق آنچه گفته شد به سادگی دیده می‌شود که وقوع پیشامد B بر $P(A)$ تأثیر نمی‌گذارد. بنابراین پیشامدهای A و B از هم مستقل‌اند و داریم :

$$P(A\cap B)=P(A)\,.\,P(B)=\frac{۳}{۶}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$$

مثال : خانواده‌ای دارای دو فرزند است. مطلوب است احتمال اینکه هر دو فرزند آنها پسر باشند.

حل : جنسیت فرزندان پیشامدهایی از هم مستقل‌اند، بنابراین می‌توان به‌صورت زیر عمل کرد.

A : پیشامد پسر بودن فرزند اول

B : پیشامد پسر بودن فرزند دوم

احتمال پسر بودن هر دو $= P(A\cap B)=P(A).P(B)=\frac{۱}{۲}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۴}$

مثال : فرض کنید در یک سال احتمال قهرمانی تیم ملی فوتبال ایران در آسیا برابر ۰/۵ و احتمال قهرمانی تیم ملی والیبال ایران در آسیا برابر ۰/۸ باشد. با چه احتمالی حداقل یکی از این تیم‌ها قهرمان خواهد شد؟

حل :

A: پیشامد قهرمانی تیم ملی فوتبال ایران $\rightarrow P(A)=۰/۵$

B: پیشامد قهرمانی تیم ملی والیبال ایران $\rightarrow P(B)=۰/۸$

به‌وضوح دیده می‌شود که A و B از هم مستقل‌اند، پس $P(A\cap B)=P(A)\,.\,P(B)=۰/۴$

اما با توجه به نحوهٔ انتخاب A و B، پیشامد قهرمانی حداقل یکی از آنها به صورت $A\cup B$ است و داریم :

$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=۰/۵+۰/۸-۰/۴=۰/۹$

در مثال‌های قبل استقلالِ دو پیشامد به سادگی تشخیص داده شد و از آن در حل مسئله استفاده شد. اما آیا همیشه تشخیص مستقل یا وابسته بودن دو پیشامد به همین آسانی است؟

(۲) اگر در ظاهر A و B پیشامدهایی باشند که وقوعشان با هم در ارتباط است، نمی‌توان به‌طور قطع گفت که A و B مستقل نیستند.

برای توضیح بیشتر به دو مثال بعد توجه کنید.

مثال : دو تاس را به ترتیب پرتاب می‌کنیم. مطلوب است محاسبهٔ احتمال اینکه :

الف) مجموع عددهای رو شده برابر ۵ شود.

ب) مجموع عددهای رو شده برابر ۷ شود.

پ) مجموع عددهای رو شده برابر ۱۰ شود.

حل : با توجه به اصل ضرب می‌دانیم که در پرتاب دو تاس ۳۶ حالت وجود دارد. $(n(S)=۳۶)$

الف) تمام حالت‌هایی که مجموع عددهای رو شده ۵ شود به صورت زیر است :

{(۳,۲) و (۲,۳) و (۴,۱) و (۱,۴)}

بنابراین احتمال اینکه مجموع عددهای رو شده برابر ۵ شود، برابر است با : $\frac{۱}{۹}=\frac{۴}{۳۶}$.

ب) تمام حالت‌هایی که مجموع عددهای رو شده برابر ۷ شود، به‌صورت زیر است :

{(۴,۳) و (۳,۴) و (۵,۲) و (۲,۵) و (۶,۱) و (۱,۶)}

بنابراین احتمال اینکه مجموع عددهای رو شده برابر ۷ شود، برابر است با : $\frac{۱}{۶}=\frac{۶}{۳۶}$.

پ) تمام حالت‌هایی که مجموع عددهای رو شده برابر ۱۰ می‌شود، به صورت زیر است :

{(۵,۵) و (۶,۴) و (۴,۶)}

بنابراین احتمال اینکه مجموع دو تاس برابر ۱۰ شود برابر است با : $\frac{۱}{۱۲}=\frac{۳}{۳۶}$.

اگر پیشامد B را رو شدن عدد ۲ در پرتاب تاس اول در نظر بگیریم، بررسی می‌کنیم که این پیشامد نسبت به هر یک از پیشامدهای مطرح شده در قسمت‌های (الف) و (ب) و (پ) از مثال قبل مستقل است یا نه.

مثال : دو تاس را به ترتیب پرتاب می‌کنیم.

الف) آیا $\underbrace{\text{پیشامد اینکه مجموع دو تاس ۵ شود}}_{\text{پیشامد } A}$ و $\underbrace{\text{پیشامد اینکه در پرتاب اولین تاس عدد ۲ ظاهر شود}}_{\text{پیشامد } B}$، مستقل از یکدیگرند؟

ب) آیا $\underbrace{\text{پیشامد اینکه مجموع دو تاس ۷ شود}}_{\text{پیشامد } A}$ و $\underbrace{\text{پیشامد اینکه در پرتاب اولین تاس عدد ۲ ظاهر شود}}_{\text{پیشامد } B}$، مستقل از یکدیگرند؟

پ) آیا $\underbrace{\text{پیشامد اینکه مجموع دو تاس ۱۰ شود}}_{\text{پیشامد } A}$ و $\underbrace{\text{پیشامد اینکه در پرتاب اولین تاس عدد ۲ ظاهر شود}}_{\text{پیشامد } B}$، مستقل از یکدیگرند؟

حل : در این مثال از آنجا که پیش‌فرض رو شدن عدد ۲ در پرتاب تاس اول مفروض است، تمام حالات ممکن به‌صورت زیر خواهد بود و ۶ عضو دارد.

$B=$ {(۲,۱) و (۲,۲) و (۲,۳) و(۲,۴) و (۲,۵) و (۲,۶)}

حال در هر حالت می‌خواهیم صحت رابطهٔ $P(A|B)=P(A)$ را بررسی کنیم. برای هر سه قسمت، $P(A)$ را در اولین مثال این درس محاسبه کردیم. کافی است $P(A|B)$ را در هر سه قسمت به‌دست آوریم.

الف) در این صورت تنها حالتی که مجموع ۵ است، حالت (۲,۳) است. پس احتمال اینکه مجموع ۵ ظاهر شود، برابر $\frac{۱}{۶}$ است. بنابراین وقوع پیشامد B احتمال وقوع پیشامد A را از $\frac{۱}{۹}$ به $\frac{۱}{۶}$ **افزایش می‌دهد**. لذا در این حالت A و B مستقل نیستند.

ب) در این صورت تنها حالتی که مجموع ۷ است، حالت (۲,۵) است. پس احتمال اینکه مجموع ۷ ظاهر شود، برابر $\frac{۱}{۶}$ است. بنابراین

وقوع پیشامد B احتمال وقوع پیشامد A را **تغییر نداده است**. بنابراین در این حالت A و B مستقل از یکدیگرند.

پ) در صورتی که عدد رو شده در تاس اول **۲** باشد، در هیچ حالتی مجموع دو تاس ۱۰ نمی‌شود. بنابراین در این حالت احتمال اینکه مجموع دو تاس برابر ۱۰ شود، صفر است. لذا در این حالت وقوع پیشامد B احتمال وقوع پیشامد A را از $\frac{1}{12}$ به صفر **کاهش داده است**.

پس در این حالت A و B مستقل نیستند.

خواندنی

عوامل ژنتیک در شکل‌گیری صفات انسان نقش دارند و از والدین به فرزندان منتقل می‌شوند. آیا تاکنون دقت کرده‌اید که نرمهٔ گوش انسان می‌تواند دو حالت داشته باشد، یکی پیوسته و یکی آزاد؟ با توجه به این موضوع سؤالاتی از این قبیل می‌توانند مطرح باشند :

اگر مردی نرمهٔ گوش آزاد و همسرش نرمهٔ گوش پیوسته داشته باشد، آیا می‌توان پیش‌بینی کرد که فرزند آنها چه نوع نرمهٔ گوشی خواهد داشت؟

در ادامه به کمک علم احتمال به مسئلهٔ بالا می‌پردازیم.

نرمه گوش پیوسته

نرمه گوش آزاد

مثال : در علم ژنتیک برای ایجاد برخی صفات در فرزندان دو عامل را مؤثر می‌دانند که یکی از پدر و یکی از مادر به ارث می‌رسد. فرض کنیم این دو عامل را که در تعیین شکل نرمهٔ گوش فرزند مؤثرند با A و a نمایش دهیم که در آن :

A : عامل به وجود آمدن نرمهٔ گوش آزاد

a : عامل به وجود آمدن نرمهٔ گوش پیوسته

بنابراین هر فرد به یکی از حالت‌های AA یا aa یا Aa می‌تواند باشد که با احتمال $\frac{1}{2}$ هر یک از آنها را به فرزند خود می‌تواند انتقال دهد و تأثیر آن بر نرمهٔ گوش فرزند به صورت زیر است :

ــ اگر عامل‌های فرزند به صورت AA باشد، این فرد دارای نرمهٔ گوش آزاد است.

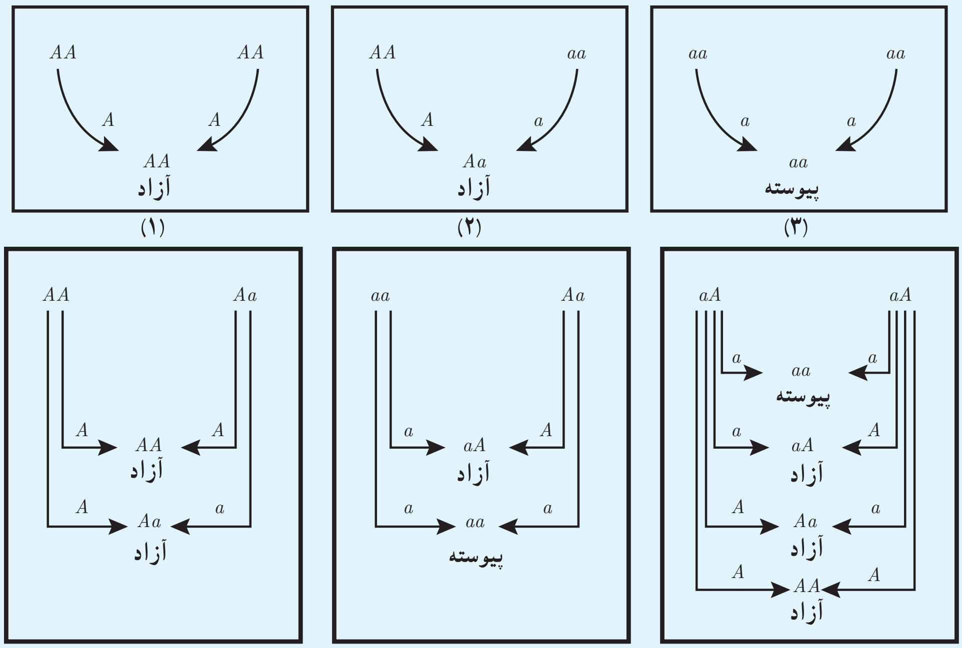
ــ اگر عامل‌های فرزند به صورت aa باشد، این فرد دارای نرمهٔ گوش پیوسته است.

ــ اگر عامل‌های فرزند به صورت Aa باشد، این فرد دارای نرمهٔ گوش آزاد است، به همین دلیل عامل A را غالب و عامل a را مغلوب می‌نامند. به‌طور خلاصه داریم :

عامل‌های شخص	AA	Aa یا aA	aa
نوع نرمهٔ گوش شخص	آزاد	آزاد	پیوسته

ــ به حالت‌های AA و aa خالص و به حالت Aa ناخالص می‌گوییم.

در شکل‌های صفحهٔ بعد حالت‌های مختلف انتقال عوامل از پدر و مادر به فرزند نمایش داده شده‌اند.



(۱) (۲) (۳)
(۴) (۵) (۶)

فرض کنیم احتمال هر یک از دو عاملِ هر فرد به فرزندش $\frac{1}{2}$ باشد. اگر از میان افراد یک جامعهٔ آماری که نرمهٔ گوش آزاد دارند، ۵۰ درصدشان خالص و ۵۰ درصدشان ناخالص باشند، هر یک از احتمال‌های زیر را محاسبه کنید.

اگر علی نرمهٔ گوش آزاد و همسرش نرمهٔ گوش پیوسته داشته باشد، و آنها یک فرزند با نرمهٔ گوش پیوسته داشته باشند، با چه احتمالی نرمهٔ گوش فرزند دوم آنها پیوسته خواهد بود؟

حل : از آنجا که پدر، نرمهٔ گوش آزاد دارد، عامل‌های او به صورت AA یا Aa است. اما اگر عامل‌های پدر به صورت AA باشد، نرمهٔ گوش فرزندان آنها به صورت آزاد خواهد بود. بنابراین عامل‌های پدر به صورت Aa است. از طرفی از آنجا که مادر نرمهٔ گوش پیوسته دارد، لذا عامل‌های او به صورت aa خواهد بود. بنابراین با توجه به شکل ۵ به احتمال $\frac{1}{2}$، فرزند دوم آنها نرمهٔ گوش پیوسته خواهد داشت.

تمرین

۱ در پرتاب یک تاس فرض کنید پیشامد A ظاهر شدن عدد زوج، پیشامد B ظاهر شدن عددی مضرب ۳ و پیشامد C ظاهر شدن عددی بزرگ‌تر از ۲ باشد. مستقل یا غیرمستقل بودن هر دو پیشامد را بررسی کنید.

۲ یک سکه را سه بار پرتاب می‌کنیم. احتمال رو آمدن سکه در پرتاب سوم را به‌دست آورید، به شرط اینکه در دو پرتاب اول و دوم، پشت ظاهر شده باشد.

۳ فرض کنید A و B دو پیشامد ناتهی و مستقل از یکدیگرند.

الف) نشان دهید A' و B مستقل‌اند.

ب) با توجه به (الف) نشان دهید A' و B' نیز مستقل‌اند.

۴ احمد به احتمال ۰/۷ در تیم کوهنوردی مدرسه‌شان و به احتمال ۰/۸ در تیم ملی فوتبال نوجوانان انتخاب می‌شود. احتمال‌های زیر را محاسبه کنید.

الف) در هر دو تیم مورد نظر انتخاب شود.

ب) در هیچ‌کدام از دو تیم انتخاب نشود.

پ) فقط در تیم ملی فوتبال انتخاب شود.

ت) فقط در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.

ث) حداقل در یکی از تیم‌ها انتخاب شود.

۵ احتمال اینکه رؤیا در درس ریاضی قبول شود، دو برابر احتمال آن است که دوستش در این درس قبول شود. اگر احتمال اینکه حداقل یکی از آنها در درس ریاضی قبول شوند، برابر ۰/۶۲۵ باشد، رؤیا با چه احتمالی در این درس قبول خواهد شد؟

۶ دو تاس با هم پرتاب شده‌اند. احتمال آنکه هر دو عدد رو شده زوج باشند، به شرط اینکه بدانیم مجموع اعداد رو شده برابر ۸ است را به دست آورید.

۷ ترکیبی از ۴ مادهٔ شیمیایی داریم که دو تا از آنها مواد A و B هستند. احتمال واکنش نشان دادن مادهٔ A، $\frac{۱}{۵}$ و احتمال واکنش نشان دادن مادهٔ B، $\frac{۱}{۷}$ است. اگر مادهٔ A واکنش نشان دهد، احتمال واکنش نشان دادن مادهٔ B، $\frac{۱}{۴}$ خواهد شد. با چه احتمالی حداقل یکی از مواد A یا B واکنش نشان خواهد داد؟

درس دوم

آمار توصیفی

مقدمه

آمار توصیفی به خلاصه‌سازی داده‌ها در قالب نمودار، جدول و یا شاخص‌هایی در قالب **معیارهای گرایش به مرکز** و **معیارهای پراکندگی** که در ادامه با آنها آشنا خواهید شد، می‌پردازد. آمارتوصیفی اطلاعاتی از چگونگی داده‌های جمع‌آوری شده فراهم می‌آورد که بسیار مفید است.

معیارهای گرایش به مرکز

معمولاً سعی می شود، دانسته‌های نهفته در داده‌ها را به‌صورت یک یا چند عدد شاخص درآورد، تا بتوان هم اندیشهٔ کلی دربارهٔ ویژگی مورد مطالعه به‌دست آورد و هم نتیجه مطالعات را به‌سادگی گزارش کرد. میانگین و میانه به عنوان معیارهای گرایش به مرکز در این کتاب معرفی می‌شوند.

میانگین

میانگین ساده‌ترین و در عین حال پرکاربردترین معیار گرایش به مرکز است که در پایهٔ هشتم با آن آشنا شده‌اید.

میانگین متوسط یا مرکز ثقل داده‌هاست که آن را با $\bar{X}$ نشان می‌دهیم و برابر است با :

$$\bar{X} = \frac{x_۱ + x_۲ + \cdots + x_N}{N}$$

که در آن x_i داده‌ها و N برابر با تعداد کل داده‌ها است.

فعالیت

محمد، جرم ۵ نفر از دوستان خود را پرسید و آنها را در جدول زیر یادداشت کرد. سپس میانگین جرم دوستان خود را حساب کرد :

دوست	رضا	نیما	سام	احمد	علی
جرم (کیلوگرم)	۵۵	۶۱	۵۷	۵۵	۶۲

نحوهٔ محاسبه میانگین

۱ محمد ابتدا مجموع جرم دوستان خود را محاسبه کرد :

۲ سپس عدد حاصل را بر عدد ۵ (تعداد دوستان) تقسیم کرد :

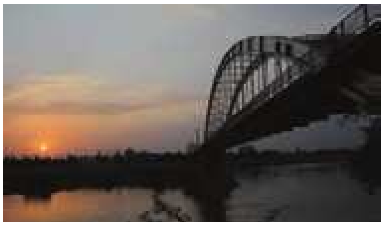
میانگین جرم دوستان محمد برابر است با ....

ویژگی‌های میانگین

اگر هر یک از داده‌های آماری با مقدار ثابتی جمع شود، میانگین آنها نیز با همان مقدار ثابت جمع خواهد شد. چرا؟

اگر هر یک از داده‌های آماری در مقدار ثابتی ضرب شود، میانگین آنها نیز در همان مقدار ثابت ضرب خواهد شد. چرا؟

کار در کلاس



۱ در فعالیت قبل، میانگین جرم دوستان محمد چند گرم است؟

۲ هوای اهواز در هر ساعت از یک روز بهاری گزارش شد. اگر میانگین دمای هوا ۲۸ درجهٔ سانتی گراد باشد، میانگین دمای هوا چند درجهٔ فارنهایت است؟ (راهنمایی $F=\frac{۹}{۵}C+۳۲$)

میانه

پس از مرتب کردن داده‌ها، مقداری را که تعداد داده‌های بعد از آن با تعداد داده‌های قبل از آن برابر است میانه می‌نامیم و آن را با $Q_۲$ نمایش می‌دهیم.

مثال : در فعالیت قبل، میانهٔ داده‌ها کدام است؟

محمد برای پاسخ به این سؤال :

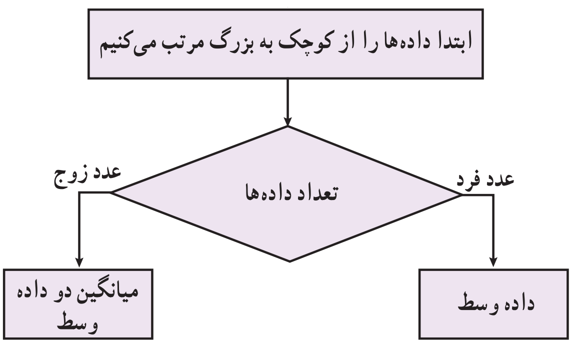
الف) داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کرد :

۵۵　۵۵　۵۷　۶۱　۶۲

ب) جرم رضا و احمد از سام کمتر است. در حالی‌که جرم علی و نیما از سام بیشتر است.

در مثال فوق، عدد ۵۷ را میانهٔ داده‌ها می‌نامند، زیرا پس از مرتب کردن داده‌ها از کوچک به بزرگ، در وسط داده‌ها قرار می‌گیرد.

روش محاسبهٔ میانه :



مثال :اعداد زیر نمره‌های درس ریاضی سمیرا در طول یک سال است.
ــ میانگین و میانهٔ نمره‌های او را حساب کنید.

۱۹ ۱۷ ۱۸ ۱۸ ۲۰ ۵

الف) محاسبهٔ میانگین

$$\overline{X}=\frac{۱۹+۱۷+۱۸+۱۸+۲۰+۵}{۶}\simeq ۱۶/۱۷$$

ب) محاسبهٔ میانه

۵ ,۱۷ ,۱۸,۱۸ ,۱۹ ,۲۰

$$Q_{۲}=\frac{۱۸+۱۸}{۲}=۱۸$$

پ) به نظر شما کدام معیار توانایی دانش‌آموز در این درس را بهتر ارزیابی می‌کند؟ چرا؟

میانگین داده‌ها تحت تأثیر داده‌های خیلی بزرگ یا خیلی کوچک که در آمار به آنها داده‌های دورافتاده می‌گوییم، قرار می‌گیرد. درصورتی که میانهٔ داده‌ها تحت تأثیر داده‌های دور افتاده قرار نمی‌گیرد. بنابراین درصورت وجود دادهٔ دورافتاده، از میانه استفاده می‌کنیم در غیراین صورت از میانگین استفاده خواهیم کرد.

کار در کلاس

داده‌های زیر مربوط به تعداد ضربان قلب ۱۲ دانش‌آموز پایهٔ یازدهم، قبل از یک مسابقهٔ دو است.

۱۰۰ ۹۱ ۸۲ ۷۵ ۱۰۵ ۹۸ ۹۸ ۱۰۱ ۸۹ ۹۲ ۹۷ ۸۶

ــ میانهٔ داده‌ها را مشخص کنید.
ــ میانگین داده‌ها را مشخص کنید.

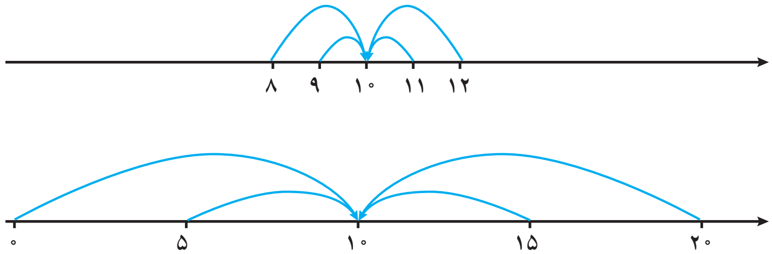
معیارهای پراکندگی

میانه و میانگین اطلاعاتی پیرامون مرکز داده‌ها در اختیار ما قرار می‌دهند. گاه در توصیف داده‌ها لازم است از چگونگی پراکندگی آنها نیز اطلاعی داشته باشیم. در این درس با دامنهٔ تغییرات، واریانس، انحراف معیار، چارک اول و چارک سوم به‌عنوان معیارهای پراکندگی آشنا خواهیم شد.

فعالیت

نمرهٔ درس ریاضی دانش‌آموزان دو کلاس A و B، به تفکیک گزارش شده است :

A	۸	۹	۱۰	۱۱	۱۲
B	۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰



الف) میانهٔ نمرهٔ این دو کلاس را محاسبه کنید.

ب) میانگین نمرهٔ این دو کلاس را محاسبه کنید.

پ) به نظر شما یک معلم ریاضی ترجیح می‌دهد در کدام کلاس تدریس کند؟ چرا؟

همان‌طور که در فعالیت می‌بینید، تنها توجه به معیارهای گرایش به مرکز نمی‌تواند اطلاعات کاملی از داده‌ها در اختیار ما قرار دهد و لازم است به چگونگی پراکندگی داده‌ها نیز توجه شود.

دامنهٔ تغییرات

دامنهٔ تغییرات ساده‌ترین شاخص پراکندگی است که اختلاف بین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده‌ها را نشان می‌دهد و آن را با نماد R نمایش می‌دهیم.

مثال : در فعالیت بالا برای محاسبهٔ دامنهٔ تغییرات نمره ریاضی کلاس A و کلاس B به‌صورت زیر عمل کنید :

	کلاس B	کلاس A
کوچک‌ترین داده	۰	۸
بزرگ‌ترین داده	۲۰	۱۲
دامنه تغییرات	۲۰ − ۰=۲۰	۱۲ − ۸ =۴

در فعالیت بالا دامنهٔ تغییرات نمرهٔ ریاضی کلاس A، ۴ نمره و دامنهٔ تغییرات نمرهٔ ریاضی کلاس B، ۲۰ نمره است. ملاحظه می‌شود که در کلاس A پراکندگی داده‌ها کمتر از کلاس B است.

کار در کلاس

معلم از ۷ نفر از دانش‌آموزان خواست تا تعداد کتاب‌های غیردرسی را که در طول تابستان گذشته مطالعه کرده‌اند، گزارش کنند.

الف) دامنه تغییرات آنها را محاسبه کنید.

۱۵ ۸ ۹ ۱۲ ۱۴ ۴ ۱

ب) دو دانش‌آموز دیگر به جمع آنها اضافه شدند و آنها نیز تعدادکتاب‌های غیردرسی را که در طول تابستان گذشته مطالعه کرده بودند، به ترتیب ۵ و ۱۱ اعلام کردند. مجدداً دامنهٔ تغییرات این ۹ داده را محاسبه کنید.

پ) از مقایسهٔ پاسخ الف و ب چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

همان طور که می‌بینید، دامنهٔ تغییرات تنها به بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین داده‌ها وابسته است و با تغییر تعداد و مقدار داده‌های میانی، مقدار آن تغییر نخواهد کرد. پس این معیار نمی‌تواند بیانگر خوبی برای پراکندگی داده‌ها باشد.

واریانس

می‌خواهیم شاخص بهتری برای بیان پراکندگی داده‌ها پیدا کنیم. از آنجا که میانگین، معیاری برای مرکز داده‌ها است، شاخصی که بیانگر اختلاف داده‌ها از میانگین باشد و معایب وارد بر دامنه تغییرات را برطرف سازد، می‌تواند شاخص بهتری برای بیان پراکندگی داده‌ها باشد.

فعالیت

الف) در ادامهٔ فعالیت قبل اختلاف از میانگین را برای نمره‌های ریاضی کلاس A و B به کمک جدول‌های زیر محاسبه کنید.

کلاس B	
y_i	$(y_i - \overline{Y})$
۰	
۵	
۱۰	
۱۵	
۲۰	

کلاس A	
x_i	$(x_i - \overline{X})$
۸	
۹	
۱۰	
۱۱	
۱۲	

ب) مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین را برای هر کلاس محاسبه کنید.

در هر دو کلاس، مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین داده ها صفر شد. با مراجعه به تعریف میانگین، بدیهی است این نتیجه اتفاقی نبوده است.

همواره برای هرمجموعه‌ای از داده‌ها، مجموع اختلاف داده‌ها از میانگین صفر خواهد شد.

بنابراین برای ساختن شاخصی که پراکندگی حول میانگین را نشان دهد، باید از قدرمطلق اختلاف داده‌ها از میانگین یا از مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین استفاده کرد. استفاده از مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین متداول‌تر است.

الف) مجذور اختلاف از میانگین برای نمره‌های ریاضی کلاس A و B را به کمک جداول زیر محاسبه کنید.

کلاس B		
y_i	$(y_i - \overline{Y})$	$(y_i - \overline{Y})^۲$
۰		
۵		
۱۰		
۱۵		
۲۰		

کلاس A		
x_i	$(x_i - \overline{X})$	$(x_i - \overline{X})^۲$
۸		
۹		
۱۰		
۱۱		
۱۲		

ب) مجموع مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین را برای هر کلاس محاسبه کنید.

مجموع مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین برای کلاس A	$(۸-۱۰)^۲ + \ldots + (۱۲-۱۰)^۲ =$
مجموع مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین برای کلاس B	$(۰-۱۰)^۲ + \ldots + (۲۰-۱۰)^۲ =$

پ) میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین را برای هر کلاس محاسبه و مقایسه کنید.

میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین برای کلاس A	$\frac{(۸-۱۰)^۲+\cdots+(۱۲-۱۰)^۲}{۵} =$
میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین برای کلاس B	$\frac{(۰-۱۰)^۲+\cdots+(۲۰-۱۰)^۲}{۵} =$

میانگین مجذور اختلاف داده‌ها از میانگین آنها را واریانس می نامند و از نماد $\sigma^۲$ برای نمایش آن استفاده می‌شود:

$$\sigma^۲ = \frac{(x_۱ - \overline{X})^۲ + \cdots + (x_N - \overline{X})^۲}{N}$$

تذکر: واحد واریانس برابر با توان دوم واحد دادهٔ مورد نظر است.

همان‌طور که در فعالیت قبل دیده می‌شود، واریانس بزرگ (کلاس B) نشان دهندهٔ دور بودن داده‌ها از میانگین آنها و واریانس کوچک (کلاس A) نشان دهندهٔ نزدیکی داده‌ها به میانگین آنهاست. چنانچه همهٔ داده‌ها با هم برابر باشند، واریانس آنها صفر خواهد بود. بنابراین واریانس معیار خوبی برای سنجش پراکندگی و تغییرپذیری داده‌ها نسبت به میانگین است.

کار در کلاس

واریانس تعداد کتاب‌های غیردرسی مطالعه شده در «کار درکلاس» قبل، توسط ۷ و ۹ دانش‌آموز را محاسبه کنید.

واریانس	دامنهٔ تغییرات	تعداد کتاب‌های مطالعه شده توسط هر دانش‌آموز
	۱۴	۱ ۴ ۱۴ ۱۲ ۸ ۸ ۱۵
	۱۴	۱۱ ۵ ۱ ۴ ۱۴ ۱۲ ۸ ۸ ۱۵

همان‌طور که در این «کار درکلاس»، دیده می‌شود، واریانس برخلاف دامنهٔ تغییرات، با تغییر تعداد و مقادیر داده‌ها تغییر می‌کند.

ویژگی‌های واریانس

اگر هر یک از داده‌های آماری با مقدار ثابتی جمع شود، واریانس آنها تغییر نخواهد کرد. چرا؟

اگر هر یک از داده‌های آماری در مقدار ثابتی ضرب شود، واریانس آنها در مجذور همان مقدار ثابت ضرب خواهد شد. چرا؟

کار در کلاس

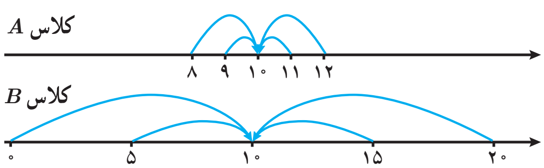
۱ در اولین فعالیت، واریانس جرم دوستان محمد چند گرم به توان دو است؟

۲ هوای اهواز در هر ساعت از یک روز بهاری گزارش شد. اگر واریانس دمای هوا ۶ درجهٔ سانتی‌گراد به توان دو باشد، واریانس دمای هوا چند درجهٔ فارنهایت به توان دو است؟ (راهنمایی $F=\frac{۹}{۵}C+۳۲$)

انحراف معیار

معیارهای گرایش به مرکز و پراکندگی فعالیت قبل در جدول زیر آمده است.

جذر واریانس	واریانس	دامنهٔ تغییرات	میانه	میانگین	
۱/۶	۲	۴	۱۰	۱۰	کلاس A
۷/۹	۵۰	۲۰	۱۰	۱۰	کلاس B



همان‌طور که در جدول و نمودار بالا دیده می‌شود، واریانس پراکندگی حول میانگین را بیشتر از حد انتظار نشان می‌دهد؛ زیرا در محاسبهٔ واریانس از میانگین **مجذور** اختلاف از میانگین داده‌ها استفاده می‌شود. درحالی‌که جذر واریانس شاخص بهتری برای پراکندگی حول میانگین داده‌ها است.

جذر واریانس را انحراف معیار می‌نامند و آن‌را با نماد σ نمایش می‌دهند :

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \overline{X})^2 + \cdots + (x_N - \overline{X})^2}{N}}$$

برای گزارش پراکندگی، کدام شاخص را ترجیح می‌دهید؟ چرا؟

مجدداً این سؤال را مطرح می‌کنیم که در این فعالیت، به نظر شما یک معلم ریاضی ترجیح می‌دهد در کدام کلاس تدریس کند؟ چرا؟

ضریب تغییرات

ضریب تغییرات که با cv نمایش داده می‌شود، نسبت انحراف معیار به میانگین ($cv = \frac{\sigma}{\overline{X}}$) است و معمولاً به صورت درصد بیان می‌شود.

کار در کلاس

فرض کنیم جرم دو نوزاد به ترتیب x_1=۱/۵ کیلوگرم و x_2=۲/۵ کیلوگرم و جرم دو فرد چهل ساله به ترتیب y_1=۸۰ کیلوگرم و y_2=۸۱ کیلوگرم است.

الف) تفاوت جرم دو نوزاد چقدر است؟

ب) تفاوت جرم دو فرد چهل ساله چقدر است؟

پ) انحراف معیارهای هر دو دسته را به‌دست آورید.

ت) فکر می‌کنید تفاوت جرم‌ها در کدام دسته زیادتر به نظر می‌رسد؟

ث) ضریب تغییرات هر دو دسته را به‌دست آورید.

همان‌گونه که دیدید با اینکه میزان تغییرات دو داده در هر دو دسته یکسان است اما ضریب تغییرات در x_iها با ضریب تغییرات در y_iها بسیار متفاوت است زیرا این شاخص، تغییرات را به نسبت میانگین می‌سنجد.

لازم به ذکر است که از ضریب تغییرات فقط برای داده‌های مثبت استفاده می‌شود.

کار در کلاس

موجودی حساب پس‌انداز علی و محمد و امید در ابتدای یک سال به ترتیب A و B و C ریال است. (مقادیر A و B و C دوبه‌دو متمایزند) اگر این سه نفر ماهانه صدهزار تومان به حساب خود واریز کرده و هیچ مبلغی برداشت نکنند، ضریب تغییرات موجودی‌های آنها در پایان سال نسبت به ابتدای سال چه تغییری خواهد کرد؟ افزایش می‌یابد یا کاهش؟ چرا؟

چارک‌ها

چارک‌ها (چارک اول، چارک دوم و چارک سوم) مقادیری هستند که داده‌های مرتب شده را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. بدیهی است چارک دوم همان میانه است. چارک اول را با Q_1 و چارک سوم را با Q_3 نمایش می‌دهند.

۹۵ ۹۳ **۸۷** ۸۰ ۷۵ **۷۰** ۶۰ ۵۱ **۴۸** ۲۴ ۲۲

چارک سوم — میانه — چارک اول

می‌بینید که ۲۵ درصد داده‌ها از ۴۸ (چارک اول)، ۵۰ درصد داده‌ها از ۷۰ (میانه) و ۷۵ درصد داده‌ها از ۸۷ (چارک سوم) کمتر است.

محاسبهٔ چارک‌ها :

ابتدا میانه داده‌ها را به‌دست آورید

↓

برای داده‌های مرتب شده قبل از میانه، یک میانه به‌دست آورید و آن را چارک اول بنامید.

↓

برای داده‌های مرتب شده بعد از میانه، یک میانه به‌دست آورید و آن را چارک سوم بنامید.

مثال : تعداد تصادف‌های اتومبیل‌ها در ۱۵ روز اول تابستان در شهری به‌صورت زیر گزارش شده است.

۱۹ ۳۱ ۲۵ ۱۸ ۳۲ ۴۱ ۴۳ ۳۴ ۱۶ ۲۷ ۱۴ ۲۳ ۱۵ ۱۰ ۱۲

چارک‌ها را مشخص کنید :

۴۳ ۴۱ ۳۴ $\boxed{۳۲}$ ۳۱ ۲۷ ۲۵ $\boxed{۲۳}$ ۱۹ ۱۸ ۱۶ $\boxed{۱۵}$ ۱۴ ۱۲ ۱۰

چارک سوم — میانه — چارک اول

توجه به این نکته نیز ضروری است که با توجه به تعداد داده‌ها، ممکن است چارک‌ها دقیقاً خود داده‌ها نباشند و در فاصلهٔ بین دو دادهٔ متوالی قرار گیرند.

کار در کلاس

معلم یک کلاس می‌خواهد متوسط مدت زمان استفاده دانش‌آموزان از اینترنت را برآورد کند. وی از ۳۵ دانش‌آموز کلاس خود پرسید، در یک شبانه‌روز چند دقیقه از اینترنت استفاده می‌کنند؟ در زیر پاسخ آنها گزارش شده است.

۴۵	۹۰	۶۰	۲۰۰	۱۵	۱۸۰	۴۵	۸۰	۳۰	۱۲۰
۷۵	۹۰	۹۰	۶۰	۲۰	۱۲۰	۱۱۵	۶۰	۳۰	۲۰
۴۵	۴۵	۶۰	۶۰	۶۰	۱۰۰	۹۰	۷۵	۲۰۰	۲۵
					۱۵	۳۰	۱۸۰	۱۰۰	۱۲۰

چارک اول، میانه و چارک سوم مدت زمان استفاده از اینترنت دانش‌آموزان این کلاس را مشخص کنید.

تمرین

۱ درستی یا نادرستی جمله‌های زیر را مشخص کنید.

ـ اگر مقدار ثابت و مثبت c از داده‌ها کم شود، انحراف معیار به اندازهٔ $\sqrt{c}$ کاهش می‌یابد.

ـ اگر مقدار ثابت و مثبت c به داده‌ها اضافه شود، ضریب تغییر بزرگ‌تر می‌شود.

ـ اگر مقدار ثابت و مثبت c در داده‌ها ضرب شود، انحراف معیار c برابر می‌شود.

ـ اگر مقدار ثابت و مثبت c در داده‌ها ضرب شود، ضریب تغییر ثابت می‌ماند.

۲ ضریب تغییرات سن دانش‌آموزان کلاس شما ۱۰ سال دیگر چه تغییری می‌کند؟

۳ علیرضا و آرمان دو کارمند شرکت A هستند که وظایف یکسانی دارند اما حقوق دریافتی آنها به ترتیب ۱۲۰۰۰۰۰ تومان و ۱۶۰۰۰۰۰ تومان است. محمد و بهروز نیز دو کارمند شرکت B هستند که با وظایف یکسان حقوق‌هایی به ترتیب ۲۵۰۰۰۰۰ تومان و ۳۰۰۰۰۰۰ تومان دریافت می‌کنند. به نظر شما در کدام شرکت بی‌عدالتی بیشتری در پرداخت حقوق به این افراد مشاهده می‌شود؟ توضیح دهید.

۴ جدول زیر، پول توجیبی (ده هزار ریال) هفتگی پنج دوست نزدیک مینا و مریم را نشان می‌دهد. الف) میانگین و میانهٔ پول توجیبی را برای دوستان مریم و مینا محاسبه کنید. ب) انحراف معیار پول توجیبی را برای دوستان مریم و مینا محاسبه کنید. پ) برنامه‌ریزی برای یک سفر یک روزه با دوستان برای مینا ساده‌تر است یا مریم؟

۲۷	۲۶	۲۵	۲۴	۲۳	مینا
۳۵	۳۰	۲۵	۲۰	۱۵	مریم

خواندنی

علاوه بر چارک، از دهک و صدک نیز استفاده می‌شود. دهک‌ها (دهک اول، دهک دوم ،... و دهک نهم) مقادیر نه داده هستند که داده‌های مرتب شده را به ده قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. دهک پنجم همان میانه است.

به نقل از روزنامه همشهری ۹۲/۱۱/۹، شناسایی سه دهک پایین درآمدی باید در دستور کار دولت قرار گیرد. با توجه به این جمله چه افرادی باید شناسایی شوند؟

اگر دولت بخواهد یارانهٔ افرادی را که درآمد آنها بیشتر از دهک هشتم است، حذف کند و به یارانهٔ افرادی که درآمد آنها از دهک سوم کمتر است، ۵۰درصد اضافه کند، آیا برای دولت مقرون به‌صرفه است؟

صدک‌ها (صدک اول، صدک دوم ،...و صدک نود و نهم) مقادیر نود و نه داده‌اند که داده‌های مرتب شده را به صد قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. صدک دهم همان دهک اول و صدک بیست‌وپنجم همان چارک اول است.

کودکانی که زیر صدک سوم قد رشد می‌کنند، فارغ از اندازهٔ قد باید ارزیابی شوند.

ـ منظور از صدک سوم قد چیست؟

ـ بر اساس جملهٔ فوق چه کودکانی باید مورد ارزیابی قرار گیرند؟

۵ میانگین، میانه و انحراف معیار نرخ تورم (مراجعه به خواندنی) سال‌های ۹۴ـ۸۴ را بر اساس جدول زیر محاسبه کنید.

سال	۱۳۸۴	۱۳۸۵	۱۳۸۶	۱۳۸۷	۱۳۸۸	۱۳۸۹	۱۳۹۰	۱۳۹۱	۱۳۹۲	۱۳۹۳	۱۳۹۴
نرخ تورم	۱۰/۴	۱۱/۹	۱۸/۴	۲۵/۴	۱۰/۸	۱۲/۴	۲۱/۵	۳۰/۵	۳۴/۷	۱۵/۶	۱۱/۹

۶ در جدول زیر، ارتفاع از سطح دریا برای بعضی از شهرهای استان مرکزی و کهگیلویه و بویراحمد دیده می‌شود.

(راهنمایی : $1m = 3/281\ ft$، ft : فوت ، m : متر)

	مرکزی				کهگیلویه و بویراحمد		
شهر	اراک	محلات	خمین	شازند	یاسوج	دهدشت	دنا
ارتفاع از سطح دریا	۱۷۰۸ (m)	۱۷۷۵ (m)	۱۸۳۰ (m)	۱۹۲۰ (m)	۶۱۳۵/۴۷ (ft)	۳۲۴۸/۱۹ (ft)	۷۲۱۸/۲۰ (ft)

الف) میانگین ارتفاع از سطح دریا در شهرهای استان مرکزی چقدر است؟

ب) انحراف معیار ارتفاع از سطح دریا در شهرهای استان مرکزی چقدر است؟

پ) ارتفاع از سطح دریا برای شهرهای کدام استان بیشتر است؟

خواندنی

شاخص تورم (شاخص بهای کالاها و خدمات مصرفی) معیار سنجش تغییرات قیمت کالاها و خدماتی است که توسط خانوارها در یک جامعه به مصرف می‌رسد. این شاخص به عنوان وسیله‌ای برای اندازه‌گیری سطح عمومی قیمت کالاها و خدمات مورد مصرف خانوارها، یکی از بهترین معیارهای سنجش تغییر قدرت خرید پول داخل کشور به‌شمار می‌رود. برای محاسبهٔ شاخص تورم، سال ۱۳۹۰ به عنوان سال پایه، ۲۹۴ قلم کالا و ۹۱ قلم خدمت با توجه به اهمیت آنها به طریق علمی انتخاب شده است. برای محاسبهٔ شاخص تورم از رابطهٔ زیر استفاده می‌شود :

$$I_t = \frac{P_t^i Q_t^i + \cdots + P_t^{385} Q_t^{385}}{P_\circ^i Q_\circ^i + \cdots + P_\circ^{385} Q_\circ^{385}} \times 100$$

که در آن

I_t : شاخص تورم در زمان t

P_t^i : قیمت کالا یا خدمت iام در زمان t

$P_\circ^i$: قیمت کالا یا خدمت iام در زمان پایه

Q_t^i : مقدار مصرف کالا یا خدمت iام در زمان t

$Q_\circ^i$: مقدار مصرف کالا یا خدمت iام در زمان پایه

برای محاسبهٔ نرخ تورم (Inf_t) از رابطهٔ زیر استفاده می‌شود :

$$Inf_t = \frac{I_t - I_{t-1}}{I_{t-1}} \times 100$$

I_t شاخص تورم در سال موردنظر و I_{t-1} شاخص تورم در سال قبل از آن است.

سال	شاخص تورم	نرخ تورم
۱۳۸۴	۳۹/۸۰	۱۰/۴
۱۳۸۵	۴۴/۵۳	۱۱/۹
۱۳۸۶	۵۲/۷۴	۱۸/۴
۱۳۸۷	۶۶/۱۲	۲۵/۴
۱۳۸۸	۷۳/۲۳	۱۰/۸
۱۳۸۹	۸۲/۳۱	۱۲/۴
۱۳۹۰	۱۰۰/۰۰	۲۱/۵
۱۳۹۱	۱۳۰/۵۴	۳۰/۵
۱۳۹۲	۱۷۵/۸۸	۳۴/۷
۱۳۹۳	۲۰۳/۲۴	۱۵/۶
۱۳۹۴	۲۲۷/۴۶	۱۱/۹

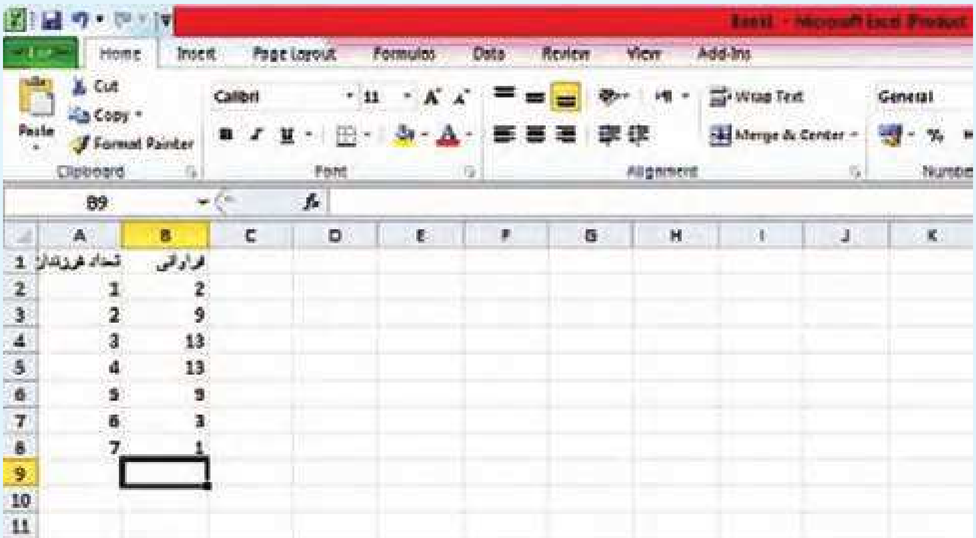
خواندنی

در بسیاری از پژوهش‌ها برای بیان بهتر نتایج و انتقال ساده‌تر مفاهیم، از جدول‌ها و نمودارها استفاده می‌کنند. نرم‌افزارهای گوناگونی برای ترسیم نمودارها به‌کار گرفته می‌شوند. پرکاربردترین، ساده‌ترین و فراگیرترین نرم‌افزار موجود، برنامهٔ اکسل از مجموعهٔ مایکروسافت‌آفیس است.

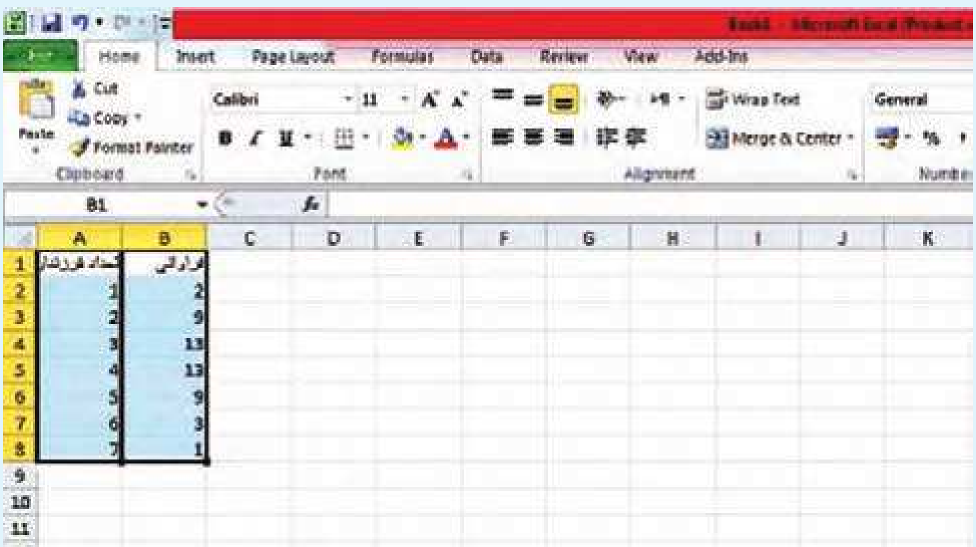
نخستین مرحله از رسم نمودار، وارد کردن داده‌ها در یک **کاربرگ** (**worksheet**) از برنامهٔ اکسل است. نام متغیرها را بالای ستون مربوط به آن بنویسید. معمولاً متغیر در ستون اول و فراوانی یا مقدار هر گروه یا متغیر را در ستون بعد روبه‌روی آن وارد می‌کنند. برنامهٔ اکسل متغیر را به‌صورت خودکار، روی محور افقی و فراوانی یا مقادیر را روی محور عمودی نشان می‌دهد. انواع نمودارهای پیش‌فرض که در پایه‌های پیشین با آنها آشنا شده‌اید، در برنامهٔ اکسل وجود دارد.

نمودار میله‌ای :

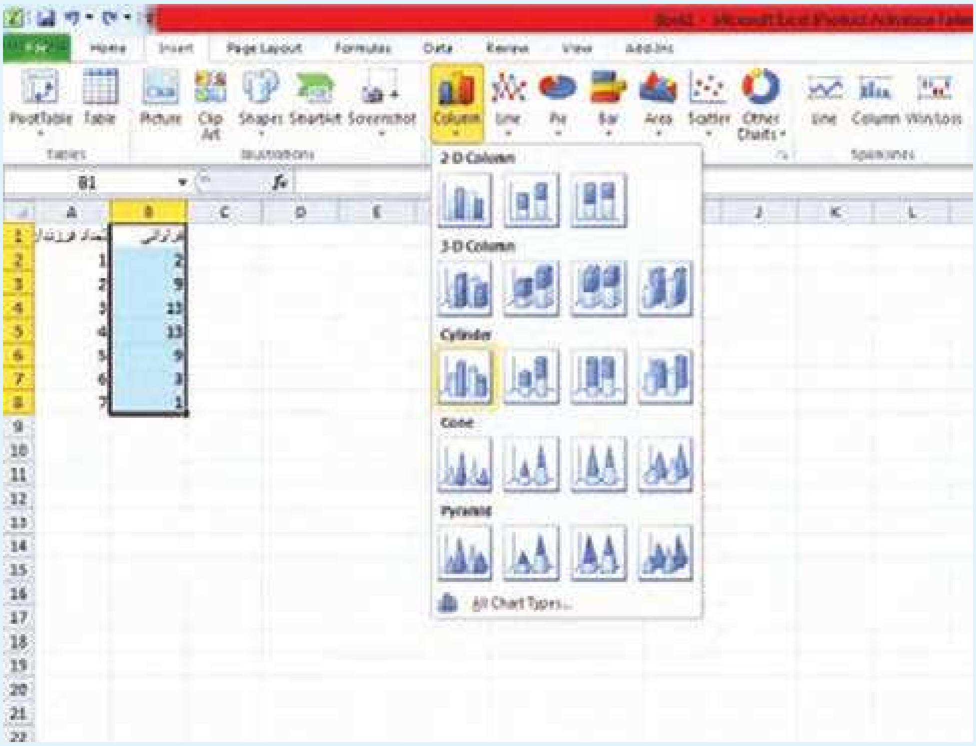
برای نمایش فراوانی یا درصد متغیرهای اسمی، گسسته یا گروه‌بندی شده از نمودار میله‌ای استفاده می‌شود. برای مثال تعداد فرزندان خانواده، دادهٔ گسسته است. برای رسم نمودار در اکسل داده‌ها را وارد کنید :



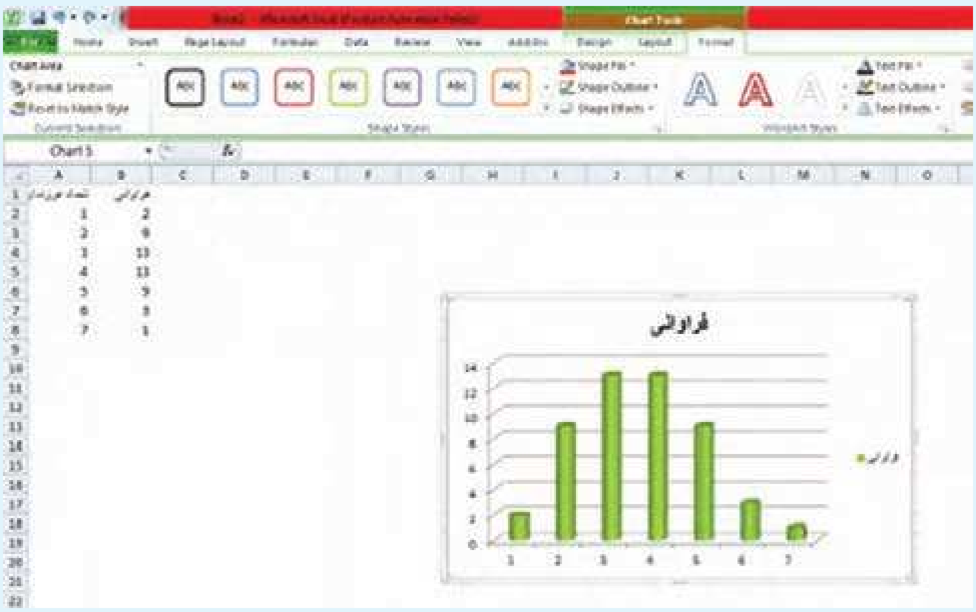
سپس دو ستون را انتخاب کنید.



سپس از منوی صفحهٔ قبل سربرگ Insert را انتخاب کنید. انواع نمودار را در آنجا می‌بینید. برای رسم نمودار میله‌ای، از الگوی Column یا Bar استفاده کنید.

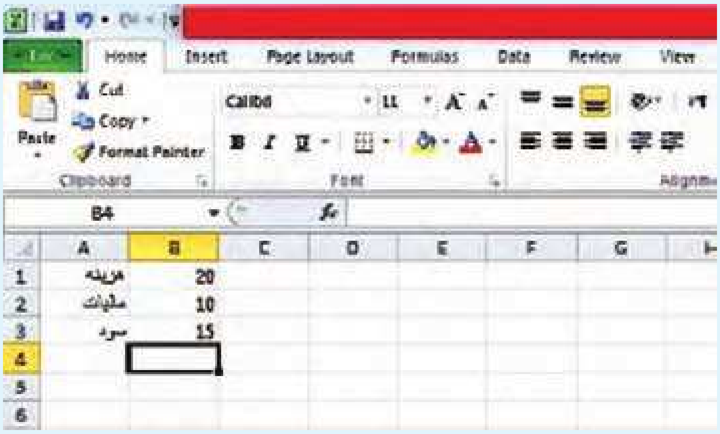


بنا به کارایی نمودار مورد نظر و سلیقهٔ خودتان می‌توانید هر یک از این پنج نمونه نمودار را به‌عنوان نمودار میله‌ای انتخاب کنید. با انتخاب نمودار موردنظر، نمودار میله‌ای شامل مقادیر مورد نظر شما رسم می‌شود و به صورت یک شیءِ جداگانه روی کاربرگ شما نشان داده می‌شود. با کلیک و راست‌کلیک بر روی بخش‌های گوناگون نمودارتان، می‌توانید گزینه‌های آن از قبیل رنگ، نام نمودار، برچسب‌ها، سه‌بعدی بودن، پس‌زمینهٔ نمودار و ... را به اشکال مختلف تغییر دهید. با گرفتن و کشیدن نمودار می‌توانید محل آن را در کاربرگتان جابه‌جا کنید.



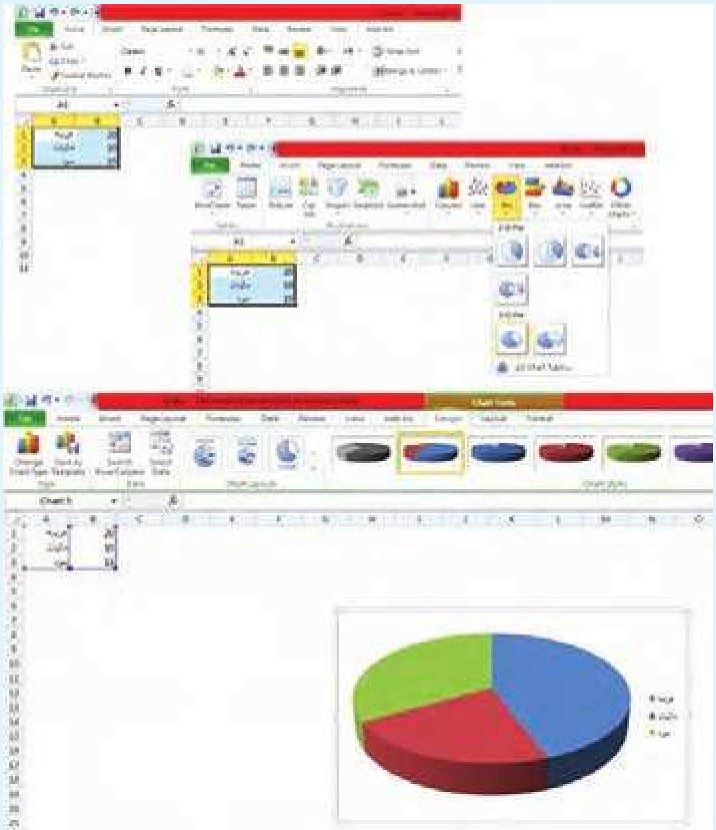
نمودار دایره‌ای :

نمودار دایره‌ای، بهتر است برای متغیر اسمی استفاده شود. هنگامی که یک موضوع را به بخش‌هایی تفکیک کنیم، نمودار دایره‌ای بسیار مناسب است؛ مثلاً درآمد یک شرکت به بخش‌های مختلف تعلق می‌گیرد. می‌توان آن را با نمودار دایره‌ای نمایش داد.



برای رسم نمودار در اکسل ابتدا داده‌ها را وارد کنید :

با رفتن به قسمت Insert و انتخاب Pie نمودار دایره‌ای مورد نظرتان را انتخاب کنید. با فشار دادن روی آن، نمودار دایره‌ای رسم می‌شود.



دیدید که برای رسم سایر نمودارها هم می‌توان به همین ترتیب عمل کرد، فقط کافی است از منوی بالا سربرگ Insert را انتخاب کنید و نمودار مورد نظر خود را، پس از ورود داده‌ها انتخاب نمایید.

منابع فارسی :

۱ــ ایرانمنش، علی؛ جمالی، محسن؛ ربیعی، حمیدرضا؛ ریحانی، ابراهیم؛ شاهورانی، احمد و عالمیان، وحید (۱۳۹۲). ریاضیات ۲ سال دوم آموزش متوسطه. سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.

۲ــ اصلاح‌پذیر، بهمن؛ بروجردیان، ناصر؛ ریحانی، ابراهیم؛ طاهری تنجانی، محمد تقی و عالمیان، وحید (۱۳۹۵). حسابان سال سوم متوسطه. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.

۳ــ بخشعلی زاده، شهرناز؛ بروجردیان، ناصر؛ دهقانی ابیانه، زین‌العابدین؛ دیده‌ور، فرزاد؛ طاهری تنجانی، محمدتقی (۱۳۹۲). ریاضیات (۱). سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.

۴ــ امیری، حمیدرضا، بیژن زاده، محمدحسن؛ بهرامی سامانی، احسان؛ حیدری، رضا؛ داورزنی، محمود؛ ریحانی، ابراهیم؛ سیدصالحی، محمدرضا؛ قربانی آرانی، مجتبی. (۱۳۹۵)، ریاضی (۱)، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.

۵ ــ امیری، حمیدرضا؛ ایرانمنش، علی؛ داودی، خسرو؛ دلشاد، کبری؛ ریحانی، ابراهیم؛ سیدصالحی، محمدرضا؛ شرقی، هوشنگ؛ صدر، میرشهرام. (۱۳۹۴)، ریاضی نهم، سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.

۶ــ بیژن‌زاده، محمدحسن؛ پاشا، عین‌الله؛ یوحنایی، که‌کو. (۱۳۹۰). ریاضی عمومی. دوره پیش دانشگاهی، رشته تجربی. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.

۷ــ رستمی، محمدهاشم؛ عطوفی، عبدالحمید؛ گودرزی، محمد؛ امیری، حمیدرضا (۱۳۹۵). ریاضیات ۳، سال سوم علوم تجربی. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.

۸ــ گویا، زهرا؛ گویا، مریم؛ ظهوری زنگنه، بیژن؛ حاجی بابایی، جواد؛ جهانی‌پور، روح‌الله؛ (۱۳۸۸). ریاضی پایه، دوره پیش دانشگاهی، رشته علوم انسانی. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.

۹ــ قربانی، ابوالقاسم. (۱۳۷۱) حساب و جبر. سال دوم آموزش متوسطه رشته ریاضی و فیزیک. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.

۱۰ــ بهبودیان، جواد. (۱۳۸۴) آمار و احتمال مقدماتی. مشهد : انتشارات آستان قدس رضوی

۱۱ــ رحیمی، زهرا، سیدصالحی، محمدرضا، شرقی، هوشنگ و نصیری، محمود. (۱۳۹۵). هندسه (۱). سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی وزارت آموزش و پرورش.

۱۲ــ جانسون، ریچارد.ا و باتاچاریا، گوری.ک. (۱۹۹۶). آمار : اصول و روش‌ها. ترجمه : فتاح میکائیلی. (۱۳۸۰) اصفهان : انتشارات ارکان.

۱۳ــ ووناکات، تامس. اچ و ووناکات، رانلد. جی. (۱۹۳۵). آمار مقدماتی. ترجمه : محمدرضا مشکانی (۱۳۸۴) تهران : مرکز نشر.

۱۴ــ آشفته، افشین. (۱۳۹۵). ترفندها و سواد آماری در مطالعات اقتصادی و اجتماعی. تهران : مرکز آمار ایران، اصفهان : خانهٔ آمار اصفهان.

منابع انگلیسی :

15_Beecher, A., Penna., & Bittinger, L. (2012). Precalculus, A Right Triangle Approach. Addison_Wesley.

16_Lial, M., Greenwell, R., & Ritchey., N. (2017). Calculus with Applications. Pearson Education.

17_Bittinger, M. L., Ellenboge., D. J., & Surgent S. A., (2012). Calculus and its applications. 10th ed. Adison_Wesley.

18_Briggs, W., Cochran, L., Gillett, B., & Schulz, E.,(2015). Calculus. Early transcendentals. Second edition. Pearson.

19_Aufmann, R. N., Barker V.C. & Nation, R.D. (2011). College Algebra and Trigonometry. Seventh edition, Brooks/Cole.

20_Cohen D., Lee T. & Sklar D. (2010). Precalculus: A Problems_Oriented Approach. Sixth Edition, Brooks/Cole.

21_Faires J. D. & DeFranza J. (2012). Precalculus. Fifth edition, Brooks/Cole.

22_Sullivan, M. (2015). Precalculus: Concepts Through Functions A Unit Circle Approach To Trigonometry. Third edition, Pearson Education.

23_Sullivan, M. (2008). Algebra and Trigonometry. Eighth edition, Pearson Prentice Hall.

24_Young, C. (2013). Algebra and Trigonometry. Third edition, John Wiley & Sons.

25_Young, C. (2014). Precalculus. Second edition, John Wiley & Sons.

26_Berchie Holliday (2008).California Algebra 2.Concepts, Skills, and Problem Solving. Glencoe/McGraw_Hill.

27_Gary K. Rockswold (2010). COLLEGE ALGEBRA with Modeling & Visualization. 4th edition. Pearson Education.

28_Ron Larson, David C. Falvo. (2011). Precalculus with Limits. Second Edition. Charlie VanWagner

29_https: //www.wikipedia.org

سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی جهت ایفای نقش خطیر خود در اجرای سند تحول بنیادین در آموزش و پرورش و برنامه درسی ملی جمهوری اسلامی ایران، مشارکت معلمان را به‌عنوان یک سیاست اجرایی مهم دنبال می‌کند. برای تحقق این امر در اقدامی نوآورانه سامانه تعاملی بر خط اعتبارسنجی کتاب‌های درسی راه‌اندازی شد تا با دریافت نظرات معلمان دربارهٔ کتاب‌های درسی نونگاشت، کتاب‌های درسی را در اولین سال چاپ، با کمترین اشکال به دانش‌آموزان و معلمان ارجمند تقدیم نماید. در انجام مطلوب این فرایند، همکاران گروه تحلیل محتوای آموزشی و پرورشی استان‌ها، گروه‌های آموزشی و دبیرخانهٔ راهبری دروس و مدیریت محترم پروژه آقای محسن باهو نقش سازنده‌ای را بر عهده داشتند. ضمن ارج نهادن به تلاش تمامی این همکاران، اسامی دبیران و هنرآموزانی که تلاش مضاعفی را در این زمینه داشته و با ارائهٔ نظرات خود سازمان را در بهبود محتوای این کتاب یاری کرده‌اند به شرح زیر اعلام می‌شود.

اسامی دبیران و هنرآموزان شرکت کننده در اعتبارسنجی کتاب ریاضی ۲ ـ کد ۱۱۱۲۱۱

ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت	ردیف	نام و نام خانوادگی	استان محل خدمت
۱	زهرا ملکی	قزوین	۲۲	زهره محمدی	چهارمحال وبختیاری
۲	شهره چوپانی	چهارمحال وبختیاری	۲۳	مجید قادری	هرمزگان
۳	پروین طالب حسامی آذر	کردستان	۲۴	مریم عالی	کرمان
۴	شهین قلی زاده	سیستان وبلوچستان	۲۵	پروانه وزیری	هرمزگان
۵	قاسم علی پور	آذربایجان شرقی	۲۶	سمیرا کشاورز	البرز
۶	معصومه صبوحی	قزوین	۲۷	سید محسن حسینی	کردستان
۷	الهه یمینی	کرمانشاه	۲۸	دینا گل خندان	گیلان
۸	آزاده حاجی هاشمی	خوزستان	۲۹	محمد امیدی	ایلام
۹	جمال نوین	یزد	۳۰	غلامرضا باصری	فارس
۱۰	نرگس ملایی نژاد	سیستان وبلوچستان	۳۱	محمد جوراک	کرمانشاه
۱۱	حمید قره گزلو	شهرستانهای تهران	۳۲	علی رضا زمانی	آذربایجان شرقی
۱۲	وجیهه فاتحی	خراسان جنوبی	۳۳	حسین امیر آبادی زاده	خراسان جنوبی
۱۳	سمیه قربانی راد	خراسان شمالی	۳۴	احمد زرودی	مازندران
۱۴	زهره دادسنج	همدان	۳۵	مهری غضنفریان	زنجان
۱۵	علی اصغر بسطامی	ایلام	۳۶	محمدهادی اقتصادی فر	فارس
۱۶	محبوبه رمضانی	شهرستانهای تهران	۳۷	حسن زارع	گلستان
۱۷	عاطفه حسین پور	مازندران	۳۸	مریم نیلفروش همدانی	اصفهان
۱۸	جعفر خزائیان	همدان	۳۹	مریم ضرغام پور	سمنان
۱۹	مهین ابراهیمیان	خراسان شمالی	۴۰	مریم سادات بهنام	شهرتهران
۲۰	الناز رابری	آذربایجان غربی	۴۱	فرخ حسن زاده	کهگیلویه وبویراحمد
۲۱	فرانک فرشادی فر	لرستان	۴۲	سعید مدیر خراسانی	شهر تهران