

فهرست

۹



جبر و معادله

۴۳



تابع

۷۷

آزمون نیمسال اول

۷۹



توابع نمایی و لگاریتمی

۱۰۳



مثلثات

۱۲۵



حد و پیوستگی

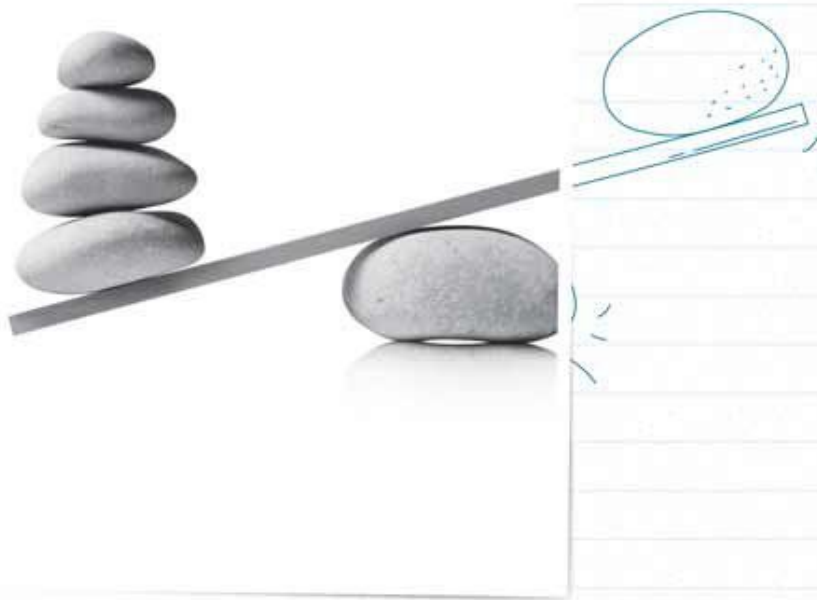
۱۶۱

آزمون پایان سال



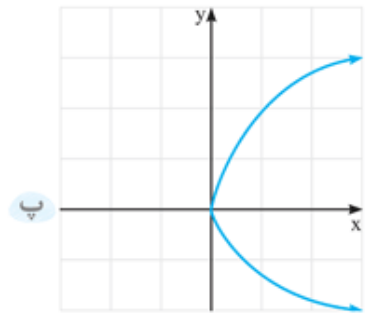
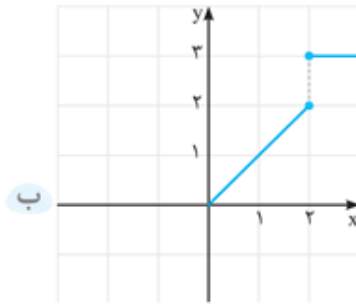
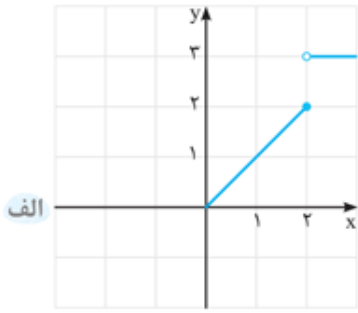
فصل یکم

جبر و معادله



- ۱ مجموع n جمله اول دنباله حسابی
 - ۲ مجموع n جمله اول دنباله هندسی
 - ۳ تجزیه برخی از عبارات با استفاده از فرمول مجموع دنباله هندسی
- مجموع جملات دنباله‌های حسابی و هندسی
- ۱ یادآوری حل معادله درجه دو
 - ۲ روابط بین ریشه‌های معادله درجه دو
 - ۳ ساخت معادله درجه دو به کمک ریشه‌های آن
 - ۴ تجزیه معادلات درجه دو
 - ۵ صفرهای توابع
 - ۶ حل معادلات با استفاده از تغییر متغیر مناسب
 - ۷ حل معادلاتی که یکی از ریشه‌های آن مشخص باشد.
 - ۸ محاسبه محل تلاقی نمودارهای دو تابع
- معادلات درجه دوم
- ۱ حل معادلات گویا
 - ۲ حل معادلات کنگ
- معادلات گویا و کنگ
- ۱ تعریف قدرمطلق و ویژگی‌های آن
 - ۲ رسم توابع شامل قدرمطلق
 - ۳ رسم توابع $f(x)$ و $f(|x|)$ از روی نمودار $f(x)$
- قدرمطلق و ویژگی‌های آن
- ۱ فاصله دو نقطه
 - ۲ مختصات وسط دو نقطه و محل برخورد میانه‌های مثلث
 - ۳ خط‌های موازی و عمود بر هم
 - ۴ فاصله یک نقطه از یک خط
 - ۵ محاسبه محل تلاقی دو خط
- آشنایی با هندسه تحلیلی
- جبر و معادله**

کدام یک از نمودارهای زیر متعلق به یک تابع است؟



کدام یک از روابط زیر یک تابع است؟

الف $f = \{(-1, x) | x \in \mathbb{N}\}$

ب $f = \{(x, -1) | x \in \mathbb{N}\}$

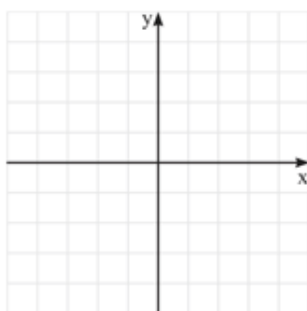
 اگر رابطه $\{(5, 3), (5, m^2 - 2m), (4, 0), (7, 0), (4, m^2 + 4m + 3)\}$ یک تابع باشد، مقدار m را بیابید.

جدول زیر را کامل کنید.

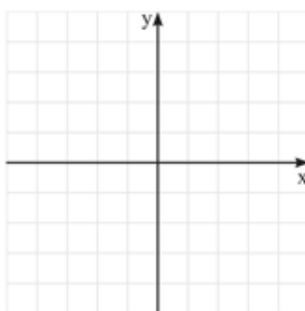
تابع	$f(x) = x + 1$	$f(x) = x + 1$	$f(x) = x + 1$	$f(x) = x + 1$	$f(x) = x + 1$
دامنه	\mathbb{R}	$\{-2, -1, 1\}$	$[0, +\infty)$	$(-2, 2)$	$[-2, 2]$
برد

 نمودار تابع $f(x) = x^2 + 1$ را در حالات زیر رسم کنید.

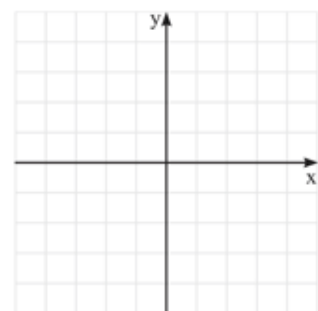
الف $D_f = [-1, 2]$



ب $D_f = (-\infty, 0]$



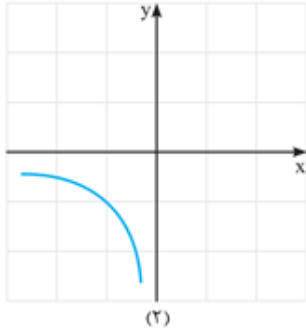
پ $D_f = \{-1, 0, 1\}$



۱۷ هریک از نمودارهای زیر مربوط به کدام تابع است؟

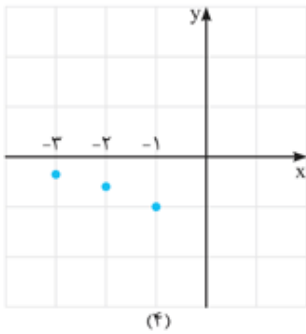
الف $f: \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



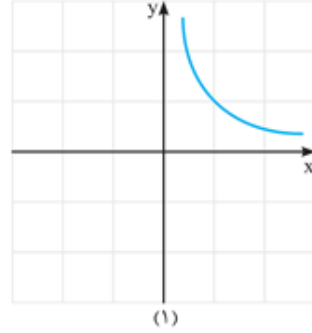
ب $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



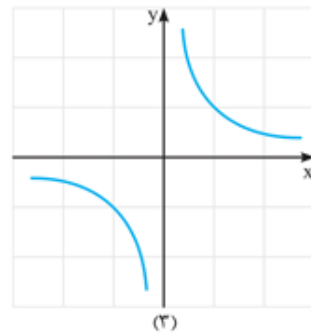
پ $f: \{-1, -2, -3\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{1}{x}$$



ت $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

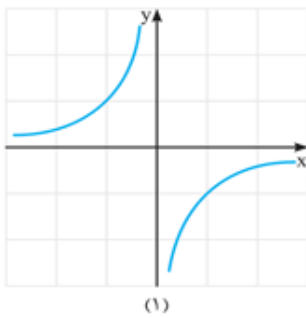
$$f(x) = \frac{1}{x}$$



۱۸ هریک از نمودارهای زیر متعلق به کدام تابع است؟

الف $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{-1}{x}$$



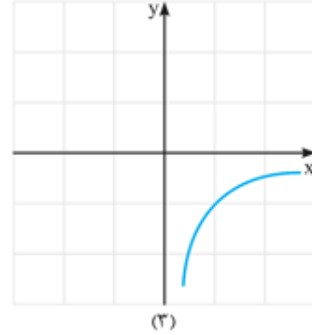
ب $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{-1}{x}$$



پ $f: \mathbb{R} - \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \frac{-1}{x}$$



۱۹ دامنه توابع زیر را تعیین کنید.

الف $f(x) = \frac{3x^2 + 1}{4 - x^2}$

ب $f(x) = \frac{x^2 - 2x^2 + 3}{x^2 - 9x}$

آزمون نیمسال اول



درس: حسابان (۱) رشته: ریاضی فیزیک مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه تاریخ امتحان: دی ماه

ردیف	سؤالات	نمره
۱	کدام یک از عبارات زیر درست و کدام یک نادرست می باشد. الف) اگر دامنه دو تابع با هم برابر و برد آن‌ها هم با هم برابر باشند، آن دو تابع با هم برابرند. ب) اگر $ x+1 < 2$ باشد، آن گاه $-3 < x < 1$ می باشد.	۰/۵
۲	جاهای خالی را با عدد مناسب پر کنید. الف) فاصله دو خط $2x - y = 1$ و $4x - 2y = 6$ برابر می باشد. ب) اگر در یک دنباله حسابی $S_n = 4n^2 + 3n$ باشد، مقدار a_9 برابر می باشد.	۰/۵
۳	در ۲۰ جمله اول یک دنباله حسابی مجموع جملات ردیف فرد ۱۳۵ و مجموع جملات ردیف زوج ۱۵۰ می باشد. جمله اول و قدرنسبت این دنباله را بیابید.	۱
۴	برای محافظت از شدت تابش مضر مواد رادیو اکتیو لایه‌های محافظتی ساخته شده است که شدت تابش پس از عبور از آن‌ها نصف می شود. حداقل چند لایه باید استفاده شود تا شدت تابش مواد مضر ۹۹ درصد کاهش یابد.	۱
۵	اگر α و β ریشه‌های معادله درجه دوم $3x^2 - 6x - 1 = 0$ باشند، بدون حل معادله حاصل عبارت $\frac{\alpha^2}{\beta} + \frac{\beta^2}{\alpha}$ را بیابید.	۱
۶	اگر بدانیم $x = 1$ یک ریشه معادله $x^3 - 2x^2 - x + 2 = 0$ است، ریشه‌های دیگر معادله را بیابید.	۱
۷	در سهمی $f(x) = x^2 + ax + b$ مقادیر a و b را چنان بیابید که نقطه $S(3, -2)$ رأس سهمی باشد.	۰/۷۵
۸	صفرهای تابع $f(x) = (4 - x^2)^2 + 2(4 - x^2) - 15$ را بیابید.	۱
۹	دو ماشین A و B کاری را با هم در ۵ ساعت انجام می دهند. اگر هر کدام از ماشین‌ها به تنهایی کار کنند ماشین A، ۴ ساعت زودتر از ماشین B کار را تمام می کند. تعیین کنید هر کدام از ماشین‌ها کار را به تنهایی در چه زمانی تمام می کنند.	۱
۱۰	معادله $\sqrt{x+1} = 1 + \sqrt{x-1}$ را حل کنید و جواب‌های قابل قبول را بیابید.	۰/۷۵
۱۱	معادله $ x = x^2 - 2x $ را به روش هندسی و جبری حل کنید.	۱
۱۲	نقاط $A(-1, 1)$ ، $B(2, 2)$ و $C(3, 0)$ رئوس یک مثلث هستند. معادله و طول ارتفاع AH را بیابید.	۱/۵
۱۳	کدام یک از معادلات زیر یک تابع را مشخص می کند. (دلیل بیاورید) الف) $x - y^2 = 4$ ب) $y - x = 1$	۱
۱۴	نمودار تابع زیر را رسم کنید و دامنه و برد آن را تعیین کنید. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x} & x > 0 \\ -\sqrt{-x+1} & x \leq 0 \end{cases}$	۱
۱۵	دامنه توابع زیر را بیابید. الف) $f(x) = \frac{x-3}{x^2-6x-16}$ ب) $f(x) = \sqrt{\frac{2x+1}{x^2-1}}$	۱/۵

ردیف	سؤالات	نمره
۱۶	نمودار تابع $y = \lfloor \frac{1}{4}x \rfloor$ را در فاصله $[-3, 3]$ رسم کنید.	۱
۱۷	الف) نشان دهید تابع $f(x) = x^2 - 4x + 5$ یک به یک نیست. ب) ثابت کنید $f(x) = x^2 - 4x + 5, x \geq 2$ وارون پذیر است و سپس وارون آن را بیابید.	۰/۵ ۱/۵
۱۸	اگر $f = \{(-4, 13), (-2, 7), (2, 5), (3, 1)\}$ و $g = \{(-4, -7), (-2, -5), (0, -3), (3, 0)\}$ باشند: الف) تابع $2f - g$ را بیابید. ب) تابع $\frac{f}{g}$ را معین کنید.	۱
۱۹	توابع $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = \frac{x}{x-7}$ مفروضند هستند. الف) بدون محاسبه ضابطه تابع، دامنه تابع $\text{gof}(x)$ را بیابید. ب) ضابطه تابع $\text{gof}(x)$ را معین کنید.	۱ ۰/۵
۲۰	«موفق باشید»	

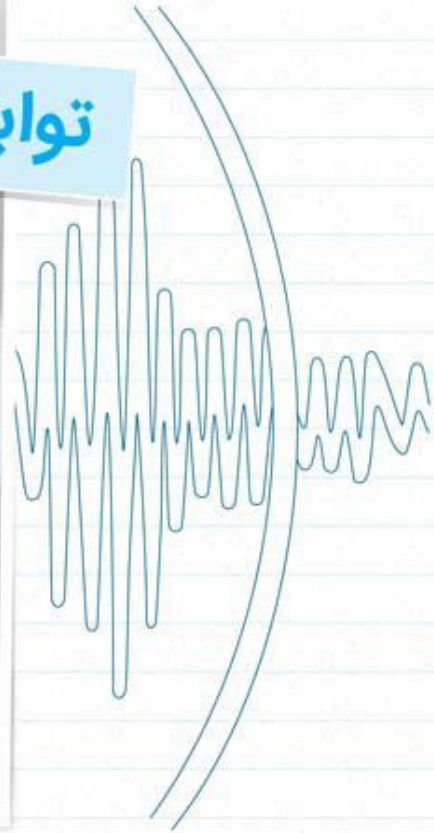
دانش آموز گرامی:

برای مشاهده پاسخ این امتحان می‌توانید کد تصویری زیر را با گوشی خود اسکن کنید و آن را دریافت نمایید.

برای این که آزمون‌های بیشتری از خود بگیرید می‌توانید مجموعه کتاب‌های امتحانوفن مهروماه را تهیه کنید. این مجموعه کتاب‌ها، حاوی تعداد زیادی آزمون‌های شبیه‌سازی شده امتحان ترم اول و امتحان پایان سال می‌باشد.



توابع نمایی و لگاریتمی



- ۱ تعریف تابع نمایی
- ۲ رسم نمودار تابع نمایی
- ۳ دامنه و برد تابع نمایی
- ۴ مسائل کاربردی تابع نمایی

تابع نمایی

- ۱ وارون پذیری تابع نمایی
- ۲ تعریف تابع لگاریتمی
- ۳ دامنه و برد تابع لگاریتمی
- ۴ نمودار تابع لگاریتمی

تابع لگاریتمی و لگاریتم

توابع نمایی و لگاریتمی

- ۱ رسم توابع سینوس و کسینوس
- ۲ دوره تناوب توابع سینوس و کسینوس
- ۲ انتقال و رسم نمودار توابع سینوس و کسینوس

ویژگی‌های لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی

درس اول: رادیان

◀ درجه

یکی از واحدهای اندازه‌گیری زاویه که تاکنون با آن آشنا شده‌ایم درجه است. یک درجه که آن را به صورت 1° نمایش می‌دهیم، برابر با $\frac{1}{360}$ محیط یک دایره است. حال می‌خواهیم واحد اندازه‌گیری دیگری را برای زاویه بیان کنیم.

◀ رادیان

یک رادیان برابر است با اندازه زاویه مرکزی در یک دایره به شعاع r که طول کمان روبه‌روی آن r می‌باشد. می‌دانیم محیط یک دایره به شعاع واحد، برابر 2π است. بنابراین یک دور کامل دایره به شعاع واحد، 2π رادیان است، یعنی: $\pi = 180^\circ \Rightarrow 2\pi = 360^\circ$ رادیان

◀ تبدیل درجه و رادیان به یکدیگر

از آنجایی که 180° با $\pi \text{ rad}$ معادل است، برای تبدیل واحدهای یک زاویه به یکدیگر از تناسب زیر استفاده می‌شود:

درجه	رادیان
D	R
180°	π

$$\frac{36^\circ}{180^\circ} = \frac{R}{\pi} \Rightarrow R = \frac{36\pi}{180} = \frac{\pi}{5} \text{ rad}$$

برای نمونه 36° را به رادیان تبدیل می‌کنیم:

◀ طول یک کمان در دایره

اگر θ اندازه کمانی برحسب رادیان و r شعاع دایره مفروض باشد، برای طول کمان S داریم: $S = r \times \theta$

مثال: در دایره‌ای به شعاع 3 cm اندازه کمانی $\frac{\pi}{6}$ سانتی‌متر است. این کمان چند درجه است؟ 

$$S = r \times \theta \Rightarrow \frac{\pi}{6} = 3 \times \theta \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6} \text{ rad} \xrightarrow{\text{تبدیل به درجه}} \frac{x}{180^\circ} = \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = 30^\circ$$

پاسخ: 

◀ زاویه‌های مهم برحسب رادیان

در شکل زیر، دایره‌ای به شعاع واحد نشان داده شده است. در این شکل اندازه زوایا برحسب درجه، رادیان و موقعیت‌های آنها نمایش داده شده است.



● **قطاع:** به قسمتی از دایره که بین دو شعاع است، قطاع گفته می‌شود.



● مساحت هر قطاع به شعاع r و زاویه θ (برحسب رادیان) از رابطه روبه‌رو به دست می‌آید: $s = \frac{1}{2} r^2 \times \theta \text{ rad}$



$D_f = \mathbb{R} - \{2, 3\}$

الف ۱

ب $f(\sqrt{2}) = -1$

ب $f(f(\sqrt{2})) = 0$

الف $a = -1, b = 2$

ب $a = -\frac{1}{2}, b = -1$

ب $a = 2, b = 0$

ت $a = 2, b = -2$

$a = 2, b = -12$

$b = -7$

الف $\begin{cases} \text{شرط وارن پذيري: } x \geq 4 \\ f^{-1}(x) = \sqrt{x+15} + 4 \end{cases}$

ب $\begin{cases} \text{شرط وارن پذيري: } x \leq 2 \\ f^{-1}(x) = -x + 1 \end{cases}$

الف $f^{-1}(x) = \sqrt{x-1}$

ب $f^{-1}(f(x)) = x, x \geq 0$

الف $f^{-1}(x) = -x^2 - 2x, x \geq -1$

ب $f(f^{-1}(x)) = x, x \geq -1$

الف $2\sqrt{3}$

ب $-\frac{3}{7}$

ب $\frac{18}{5}$

ت $\frac{54}{7}$

الف -1

ب $\{(1, 6), (2, 13), (3, 20), (4, 27)\}$

ب $\{(2, 6), (3, \frac{9}{4}), (4, 4)\}$

ت $\{-1, 0, 2, 4\}$

ث $\{(0, 2)(1, 0)(3, \frac{1}{2})(4, \frac{6}{5})\}$

الف -1

ب $\frac{1}{3}$

ب $D_{\frac{g}{h}} = [2, +\infty) - \{4\}, D_{\frac{h}{g}} = [2, +\infty) - \{3\}$

ت 6

ث $[0, +\infty) - \{2\}$

ج $[2, +\infty) - \{4\}$

الف صفر

ب $[1, +\infty)$

ب $\frac{1}{2}$

الف -1

ب صفر

36

38

39

42

44

46

48

49

51

52

54

55

57

فصل دوم: (تابع)

$m = -1$

ب يك خط

الف $\bar{v} = \frac{100x + 2000}{25 + x}$

ب $\frac{1200}{13}$

ب 25

ت $x > 0$

الف $D = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

ب $D = \mathbb{R} - \{0, \pm 3\}$

ب $D = \mathbb{R} - \{0, -1\}$

ت $D = \mathbb{R} - \{0, \pm \sqrt{5}\}$

ث $D = \mathbb{R} - \{-2, 0, 1\}$

ج $D = \mathbb{R} - \{0, 1\}$

ج $D = \mathbb{R} - \{\frac{\sqrt{2}}{2}\}$

ح $D = \mathbb{R} - \{\pm 1, 2\}$

خ $D = \mathbb{R} - \{\pm 2\}$

الف 200000 تومان ب خير ب $[0, 100)$

الف $D_g = \mathbb{R} - \{-2, 1, 3\}$

ب $D_g = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) - \{-2\}$

ب $D_g = (-\infty, 0)$

الف $(-\infty, \frac{1}{2}]$

ب $[-2, +\infty)$

ب $[\sqrt{5}, +\infty)$

ت $[-2, 0] \cup [2, +\infty)$

ث $[0, +\infty)$

ج $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$

ج $[-1, 4]$

ح $(0, \frac{2}{3}] \cup (1, +\infty)$

خ $[2, +\infty) - \{5\}$

د $(-\infty, -2) \cup [-1, 0) \cup [1, +\infty)$

د $[1, +\infty) - \{2\}$ ر $(-\infty, -\sqrt{5}) \cup (\sqrt{5}, +\infty)$

ز $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ س $\mathbb{R} - \{\pm 16\}$

الف $D_{f(\sqrt{x})} = [0, +\infty)$

$D_{\sqrt{f(x)}} = (-\infty, -2] \cup [-1, 2] \cup [4, +\infty)$

ب $D_g = [-2, -1] \cup [1, 2] \cup [4, +\infty) \cup \{-4\}$

$-2 < m < 2$

الف -3

ب -2

ب صفر

ت 6

ث صفر

ج -1

ث صفر

ب -1

ب -2

الف $1 \leq x < 2$

ب $\frac{4}{3} \leq x < \frac{5}{3}$

ب $2 \leq x < 4$

ت $2 \leq x < 4$



ت $[x + 2[x]] = 12 \Rightarrow 2[x] = 12 \Rightarrow [x] = 3 \Rightarrow 3 \leq x < 4$ (۲۵)

(۶۲)

الف fog: $1 \xrightarrow{g} -2 \xrightarrow{f} 3$
 $2 \xrightarrow{g} 0 \xrightarrow{f} -1$
 $3 \xrightarrow{g} 4 \xrightarrow{f} 15$ $D_{fog} = \{1, 2, 3, -1\}$

$1 \xrightarrow{g} -1 \xrightarrow{f} 0$
 $fog = \{(1, 3), (2, -1), (3, 15), (-1, 0)\}$

ب $D_{goh} = \{x \in D_h, h(x) \in D_g\}$

$= \{x \neq -1, \frac{3x}{x+1} \in \{1, 3, -1, 2\}\}$

$\frac{3x}{x+1} = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$\frac{3x}{x+1} = 3 \Rightarrow$ جواب ندارد

$\frac{3x}{x+1} = -1 \Rightarrow x = -\frac{1}{4}$

$\frac{3x}{x+1} = 2 \Rightarrow x = 2$

$D_{goh} = \{-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2\}$

$goh(x) = \{(-\frac{1}{4}, 1), (\frac{1}{2}, -2), (2, 0)\}$

ب $D_{hof} = \{x \in D_f, f(x) \in D_h\}$

$hof(x) = h(x^2 - 1) = \frac{3x^2 - 3}{x^2}$

ت $D_{hoh} = \{x \in D_h, h(x) \in D_h\} = \{x \neq -1, \frac{3x}{x+1} \neq -1\}$

$= \{x \neq -1, x \neq -\frac{1}{4}\} = \mathbb{R} - \{-1, -\frac{1}{4}\}$

$hoh(x) = h(\frac{3x}{x+1}) = \frac{3(\frac{3x}{x+1})}{\frac{3x}{x+1} + 1} = \frac{9x}{4x+1}$

ث $hof(x) = h(x^2 - 1) = \frac{3x^2 - 3}{x^2} \quad x \geq 0$

$y = \frac{3x^2 - 3}{x^2} \Rightarrow yx^2 = 3x^2 - 3 \Rightarrow x^2(y - 3) = -3$

$x^2 = \frac{3}{3-y} \quad x = \sqrt{\frac{3}{3-y}} \Rightarrow (hof)^{-1}(x) = \sqrt{\frac{3}{3-x}} \quad (1)$

$f(x) = x^2 - 1 \quad x \geq 0 \quad y = x^2 - 1 \Rightarrow y + 1 = x^2$

$\Rightarrow x = \sqrt{y+1} \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x+1}$

$h(x) = \frac{3x}{x+1} \Rightarrow y = \frac{3x}{x+1} \Rightarrow yx + y = 3x$

$\Rightarrow x(y - 3) = -y$

$\Rightarrow x = \frac{-y}{y-3} \Rightarrow h^{-1}(x) = \frac{x}{3-x}$

$f^{-1}oh^{-1}(x) = f^{-1}(\frac{x}{3-x}) = \sqrt{\frac{x}{3-x} + 1} = \sqrt{\frac{3}{3-x}} \quad (2)$

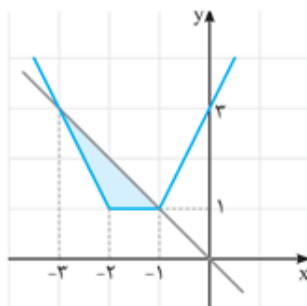
$\xrightarrow{1, 2} (hof)^{-1}(x) = f^{-1}oh^{-1}(x)$

$y = -x = |x+2| + |x+1|$

$x \leq -2 \Rightarrow -2x - 3 = -x \Rightarrow x = -3$ ق ق

$-2 \leq x \leq -1 \Rightarrow +1 = -x \Rightarrow x = -1$ ق ق

$x \geq -1 \Rightarrow 2x + 3 = -x \Rightarrow x = -1$ ق ق



$S = \frac{1}{2}(\text{ارتفاع} \times \text{قاعده})$

$= \frac{1}{2}(1 \times 2) = 1$

$S = 4 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow \frac{|-2a-1+2a+6-15|}{\sqrt{4a^2+4a+1+a^2+6a+9}} = 2$ (۹۲)

$\Rightarrow \frac{10}{\sqrt{5a^2+10a+10}} = 2 \Rightarrow 5 = \sqrt{5a^2+10a+10}$

$\Rightarrow 25 = 5a^2 + 10a + 10 \Rightarrow 5a^2 + 10a - 15 = 0$

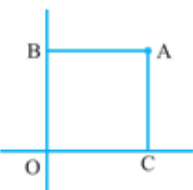
$\Rightarrow a^2 + 2a - 3 = 0 \Rightarrow a = -3, a = 1$



$\begin{cases} x - 2y = -7 \\ -2x - y = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y = -7 \\ -6x + 3y = -3 \end{cases}$

$-5x = -10, x = 2, y = 3, C(2, 3)$

محل برخورد اقطار AC وسط O $\Rightarrow \begin{cases} \frac{x_A + x_C}{2} = 4 \\ \frac{y_A + y_C}{2} = 1 \end{cases}, O(4, 1)$ (۱۰۱)



$O \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \end{vmatrix}, A \begin{vmatrix} 2 \\ 2 \end{vmatrix}, B \begin{vmatrix} 0 \\ 2 \end{vmatrix}, C \begin{vmatrix} 2 \\ 0 \end{vmatrix}$

$OC = AC = BA = OB = 2$ طول‌های مساوی

$\begin{cases} x_B + x_C = x_A + x_O \\ y_B + y_C = y_A + y_O \end{cases}$ متوازی‌الاضلاع با اضلاع مساوی

پس لوزی است و $OB \perp OC$ ، بنابراین مربع است.

فصل دوم: (تابع)

الف $D = \mathbb{R} - \{-2, 1, 3\}$ (۲۲)

ب $f(x) \neq 1 \Rightarrow D = (-\infty, 0) \cup (1, +\infty) - \{-2\}$

ب $D = (-\infty, 0)$

ج $\begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ x + y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x - 2y + 4 = 0 \\ -x - y + 1 = 0 \end{cases}$ (۲۰)

$\Rightarrow y = +\frac{5}{3}, x = -\frac{2}{3}$ تابع است

