



کتاب کار

ریاضیات ۷

ویژه‌ی دانش‌آموزان ممتاز
(کتاب صوتی)

مؤلف:

کریم مختاری



انتشارات خوشخون

خاطره

دوران تحصیلات ابتدایی و راهنمایی را در روستای زادگاهم^۱ گذراندم. بدیهی است که وجود کتاب کمک آموزشی در آن منطقه و در آن زمان (از سال ۵۵ تا ۶۳) فقط در حد حل المسائل میسر بود. کتاب‌های درسی به هیچ عنوان اغناکننده‌ی نیاز و توانایی من در امر ریاضیات نبودند و مثل یک آدم تشنه در جستجوی منابعی برای سیراب کردن این تشنگی، دورانم را سپری کردم تا این که پس از مهاجرت به اسلامشهر (از شهرستان‌های استان تهران) و با شروع دوران مقطع دبیرستان از وجود استادی به نام «سجودی» بهره جستیم. در آن منطقه از حاشیه‌ی شهر تهران و در بین حدوداً ۲۰۰ نفر دانش‌آموز پایه‌ی اول دبیرستان این استاد توانمندی به توانایی و علاقه‌ی من به ریاضیات برده و در حد خودش در صدد سیراب کردن این فرد تشنه به ریاضی برآمد. در آن زمان نمایشگاه کتاب مثل الان پررونق نبود. در پارک دانشجو نمایشگاه کوچکی از کتاب دایر شده بود که ایشان من را به همراه دو دانش‌آموز دیگر از اسلامشهر به این نمایشگاه آورده و کتاب‌هایی را برای ما معرفی کرد. در آن زمان کتابی را خریدم که ترجمه شده‌ی یک کتاب روسی بود و توانایی‌های خودم را در امر ریاضی را مدیون این کتاب می‌دانم. بودن کتابی مناسب می‌تواند در ذهن یک دانش‌آموز چنان تأثیری داشته باشد که بعد از گذشت حدوداً ۳۰ سال از آن تاریخ، لحظات خوش بودن با آن کتاب فراموش نشود.

حادثه

هر از چندگاهی اتفاقات ناگواری ناشی از نخبه‌پروری و تلاش برای نخبه جلوه دادن دانش‌آموزی از گوشه و کنار به گوش می‌رسد. آخرین این حوادث متعلق به دانش‌آموزی ۱۲ ساله می‌شود که در اردیبهشت ۹۴ در سر جلسه‌ی امتحان آزمون ورودی تیزهوشان بر اثر سکتته‌ی مغزی و فشار استرس وارد بر او جان خود را از دست داد.

دلهره

اگر دیده باشید بر روی پاکت‌های سیگار دو نوع ریه کشیده شده است، ریه‌ی فردی سالم که از دخانیات به دور است و ریه‌ی فردی مبتلا به دخانیات. شاید تولیدکنندگان دخانیات اجبار به کشیدن این دو تصویر شده‌اند تا مضرات استفاده از این دخانیات را به آگاهی عموم برسانند.

(۱) روستای خاکی از توابع شهرستان سراب

دغدغه

وجود دانش‌آموزان نخبه‌ی بالقوه‌ی زیادی در مملکت و کشور عزیزمان از یک طرف و وجود افراد توانمندی که می‌توانند به این نخبگان ارائه‌ی خدمت بدهند از طرف دیگر، ایجاب وظیفه می‌کند که زمینه را چنان فراهم کنیم که این افراد توانمند بتوانند برای نخبگان این مرز و بوم ارائه‌ی خدمت نموده و جهت بارور نمودن استعداد و توانایی‌های آنان تلاش لازم را انجام دهند.

نتیجه

انتشارات خوشخوان با بهره‌گیری از دبیران، مولفین، فارغ‌التحصیلان ممتاز که خود در سنوات گذشته از افتخار آفرینان و مدال‌آوران المپیاد بوده‌اند و یا جزء نفرات ممتاز کنکور سراسری، توانسته است کتب مناسب و مفیدی را تدوین و روانه‌ی بازار نشر کند. بازخورد و بازتاب وجود این کتب در مدارس، منازل، کتابخانه‌ها و . . . در چند سال گذشته برای ما دلگرم‌کننده و شادی‌بخش بود و از خداوند منان خواستیم تا نگارش قلم ما و دست‌اندرکاران این انتشارات را در جهت خدمت بیشتر به نخبگان این مملکت قرار دهد ولی با شنیدن حوادثی که به نمونه‌ای از آن اشاره شد دلهره سر تا پای وجودمان را می‌گیرد که نکند ما هم در جهت تقویت و تشویق اولیا برای نخبه جلوه دادن فرزندشان به هر قیمتی، گامی برداشته‌ایم! متزلزل شدن قلم‌ها به خاطر این دلهره و موارد اشاره شده در خاطره و دغدغه، این متزلزل را از بین می‌برد و دوباره جان و امید دوباره‌ای پیدا کرده و با همتی دو چندان در نگارش مباحثی برای دانش‌آموزان ممتاز، تیزهوش و المپیادی، برمی‌آیم ولی آن چیزی که نباید فراموش شود جایگاه این کتب در پر کردن اوقات فرزندان عزیز می‌باشد و کسانی که می‌توانند این موضوع را مدیریت کنند اولیاء گرامی می‌باشند. اگر از مطالعه کتبی مشابه این کتاب فرزندان به وجد آمده و احساس کند گم شده‌اش را پیدا کرده،

آن‌گاه مبارک او باد و حق به حق‌دار رسیده است، ولی اگر با پافشاری ما اولیاء در جهت حل سوالات این کتاب و کتب مشابه به جهت این که او را در جامعه به عنوان یک فرد نخبه معرفی کنیم و غیر از استرس و خمودی در او چیزی یافت نکنیم باید آگاه باشیم که در حق چنین فرزندی ظلمی روا می‌داریم که جبران‌ش غیر ممکن است.

پس:

اگر خریدار این کتاب جزء دانش آموزان تیزهوش و نخبه می باشد و از حل سوالات آن لذت برده و بر شادابی اش افزوده می شود، مبارکش باد، در غیر این صورت بهتر است آن را بوسیده و کنار بگذارد و هم نوعان خود از نظر هوش و استعداد را از خرید آن بر حذر دارد.

خاتمه

در انتها لازم می دانم از تمام کسانی که در تولید این اثر نقش داشتند اعم از مولفین، حروف چین ها، پرسنل زحمت کش انتشارات و . . . کمال تشکر را داشته باشم و از شما خوانندگان گرامی نیز به خاطر نواقص و کمبودهای احتمالی طلب عفو دارم.

رسول حاجی زاده

رسول حاجی زاده

تقدیم به دو زن!

یک عشق آموخت مرا و دیگری جان سوخت.

«مادر و همسر»

از فراق تو مرا چون سوخت جان چون ننالم بی تو ای جانِ جهان

مقدمه

خوشا مرز ایران عنبر نسیم که خاکش گرامی تر از زروسیم
هوایش موافق به هر آدمی زمینش سراسر پر از خرمی

بعضی جملات و حرف‌ها جزئی از وجود آدمی می‌شوند وقتی که آن‌ها را درک می‌کنی. با آن‌ها زندگی می‌کنی بلکه آن‌ها زندگی تو را می‌سازند وقتی که به آن‌ها فرصت بدی.

«امید من به شما دبستانی‌هاست.»

این جمله از زبان بزرگ مردی چون روح... وجودت را پر از حماسه و امید و سوال می‌کند وقتی که نونهال و نوجوان باشی...

خدا را شاکرم که به من لطف کرد تا نیروی جوانی‌ام را در خدمت به علم و فرهنگ صرف کنم هر چند می‌دانم که بسیار راه دارم تا کمال آباد!

کتاب حاضر مجموعه‌ای غنی از سؤالات سال اول دوره‌ی اول دبیرستان (هفتم) است که با دقت و موشکافی تألیف شده‌اند و یا از آزمون‌های معتبر ریاضی مانند: آزمون‌های تیزهوشان، مسابقات جهانی و داخلی ریاضی، المپیادهای ریاضی ایران، آزمون‌های ورودی مدارس خاص و... انتخاب شده‌اند.

از ویژگی‌های بارز این کتاب می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

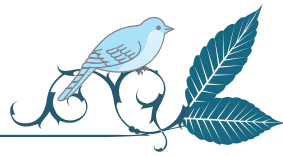
- کتاب کار دقیقاً با سرفصل‌ها و نمونه تمرین‌های کتاب درسی پیش روی کرده است. ادعا می‌کنیم که غیرممکن است تمرینی را در کتاب پیدا کنید که نمونه‌ی تعمیم‌یافته‌ی آن، منطبق با همان سرفصل در این کتاب وجود نداشته باشد.
- در هر فصل بعد از سؤالات تعمیم‌یافته کتاب، سؤالاتی متفاوت که به کمی خلاقیت احتیاج دارند و لازم است با صبر و حوصله با آن‌ها برخورد کرد گنجانده شده است تا نیازهای کنجکاوانه و خلاقانه‌ی دانش‌آموز پر تلاش و باهوش مخاطب انتشارات خوشخوان را برطرف سازد.
- سؤالات با رعایت نکات آموزشی آورده شده‌اند. یعنی دانش‌آموز با حل یک به یک سؤالات، بدون خواندن مطلبی و با کمک گرفتن از کسی به ابداعات و اکتشافات زیبایی در دنیای ریاضی خواهد رسید و پس از خروج از جاده‌ی کتاب به یک فرد متبحر و قدرتمند در زمینه‌ی ریاضیات سال هفتم تبدیل خواهد شد ان شاء...!

در انتها بر خود واجب می‌دانم از مدیر انتشارات، جناب آقای حاجی‌زاده که بی‌تعارف، برای ارتقای سطح فکری و فرهنگی این مرزوبوم زحمت می‌کشند، تشکر کنم. اگر زحمات ایشان و جناب آقای دکتر محمدجمال صادقی نبود، قطعاً این کتاب به سرانجام نمی‌رسید.

از عزیزان بزرگواری که در نوشتن این کتاب بنده را یاری کرده‌اند از جمله استاد بزرگوار جناب آقای داود معصومی، آقایان امیرحسین کاظمی، امیر سید صالحی، محسن یوریور، افشین فرج‌پور، سهند حسین‌زاده و مهربد فراهانی و خانم‌ها ساناز عزیززاده، غزاله فرج‌پور و خانم سعیده عباس‌پور که در بازنویسی کتاب کمک شایانی کردند، تشکر می‌کنم.

با وجود زحمات فراوان، مطمئن هستیم که کتاب خالی از ایراد نیست. شما می‌توانید از طریق سایت انتشارات به نشانی khoshkhan.ir و یا به‌طور مستقیم با مؤلف از طریق آیدی تلگرام [@karimmokhtari](https://t.me/karimmokhtari) ایرادهای احتمالی را با ما در میان بگذارید.

بلند همت باشید - کریم مختاری



فهرست مطالب

۱	راهبردهای حل مسئله	فصل ۱	
۴۵	عددهای صحیح	فصل ۲	
۶۳	جبر و معادله	فصل ۳	
۸۳	هندسه و استدلال	فصل ۴	
۹۹	شمارنده‌ها و اعداد اول	فصل ۵	
۱۲۱	سطح و حجم	فصل ۶	
۱۳۷	توان و جذر	فصل ۷	
۱۵۵	بردار و مختصات	فصل ۸	
۱۷۱	آمار و احتمال	فصل ۹	

راهبردهای حل مسئله

فهرست مطالب فصل

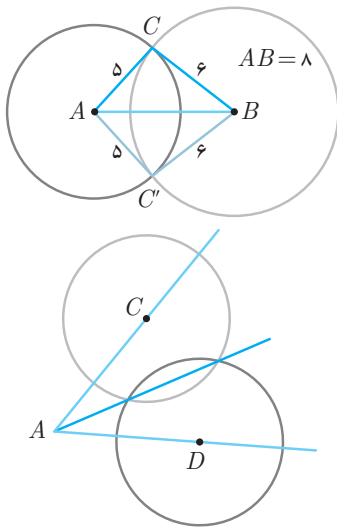
بخش اول:	راهبرد رسم شکل	۲
بخش دوم:	راهبرد الگوسازی	۸
بخش سوم:	راهبرد حذف حالت‌های نامطلوب	۱۳
بخش چهارم:	راهبرد الگویابی	۱۶
بخش پنجم:	راهبرد حدس و آزمایش	۲۳
بخش ششم:	راهبرد زیرمسئله	۲۸
بخش هفتم:	راهبرد حل مسئله‌ی ساده‌تر	۳۲
بخش هشتم:	راهبرد روش‌های نمادین	۳۸

چند نمونه‌ی حل شده

مثال ۱

فقط با استفاده از یک خط‌کش و پرگار مثلثی به طول اضلاع ۵، ۶ و ۸ رسم کرده و سپس نیم‌ساز یکی از زاویه‌ها را رسم کنید.

«کتاب درسی - تألیفی»



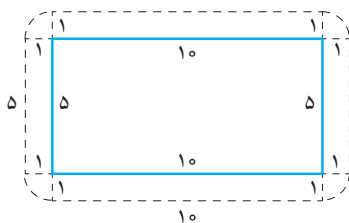
ابتدا پاره‌خطی به طول ۸ واحد رسم می‌کنیم. واحد را هر اندازه‌ای که بخواهید می‌توانید در نظر بگیرید. نام این پاره‌خط را AB می‌گذاریم. اکنون رأس سوم مثلث باید از یکی از نقاط A و B ، ۶ واحد و از دیگری ۵ واحد فاصله داشته باشد. سپس از یکی از نقاط A یا B دایره‌ای به شعاع ۵ و از دیگری دایره‌ای به شعاع ۶ رسم می‌کنیم و محل تقاطع آن‌ها را مشخص می‌کنیم. این نقاط می‌توانند رأس سوم مثلث باشند.

برای رسم نیم‌ساز زاویه‌ی $\hat{C}AB$ کافی است دو نقطه‌ی هم‌فاصله از رأس زاویه‌ی A را در نظر بگیریم (مانند C و D) به طول شعاع یکسان و به مرکز این دو نقطه دایره‌هایی رسم کنیم. محل برخورد این دو دایره روی نیم‌ساز قرار دارد. پس کافی است که آن‌ها را به A وصل کنیم تا نیم‌ساز رسم شود.

مثال ۲

یک باغچه‌ی مستطیل شکل به طول ۱۰ متر و عرض ۵ متر است. اگر به فاصله‌ی یک متر از لبه‌ی باغچه دور تا دور آن را نرده بکشیم به طوری که فاصله‌ی هر نقطه از نرده با نزدیک‌ترین نقطه‌ی محیط باغچه برابر یک متر باشد، چند متر نرده احتیاج داریم؟

«تألیفی»



ابتدا شکل باغچه و نرده را رسم می‌کنیم. در چهار گوشه‌ی شکل ۴ تا ربع دایره با شعاع ۱ تشکیل می‌شود سپس محیط شکل حاصل را حساب می‌کنیم:

$$\text{محیط} = 2 \times 10 + 2 \times 5 + 4 \times \left(\frac{2 \times 3,14 \times 1}{4} \right) = 36,28$$

مثال ۳

در کشور ریاضیات، ۵ شهر بزرگ با اسامی یک، دو، سه، چهار و پنج وجود دارد. در مورد این شهرها می‌دانیم: «تألیفی»

(الف) از شهر یک فقط به شهر سه و چهار جاده وجود دارد.

(ب) شهر دو فقط به شهر پنج و یک جاده‌ای ندارد.

(ج) شهر پنج دو جاده دارد.

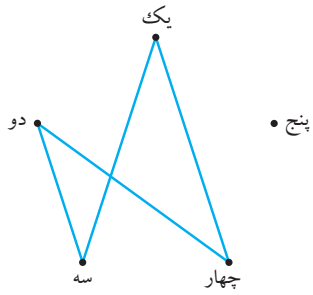
(د) شهر چهار، چهار جاده دارد.

در این کشور چند جاده وجود دارد؟

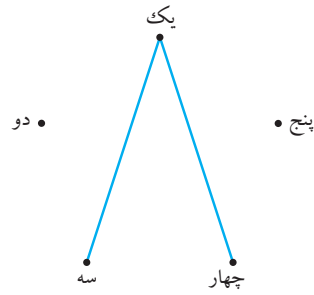


مرحله به مرحله با خواندن هر جمله شکل مربوطه را کامل می‌کنیم:

(ب)

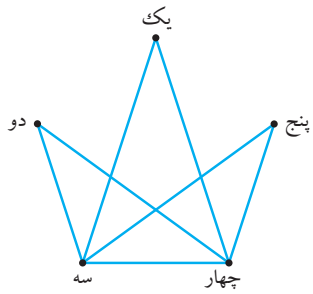


(الف)

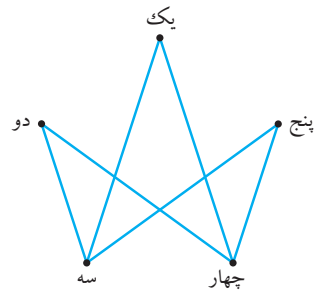


اکنون دقت کنید که دو جاده‌ی شهر پنج باید به شهرهای سه و چهار وصل شود. (چرا؟)

(د)



(ج)





تمرین

بخش ۱



۱ یک باغچه‌ی مستطیل شکل به طول 1° و عرض 5 متر است. اگر درون باغچه تا فاصله‌ی 1 متری از حاشیه‌ی آن به صورت مستطیلی چمن‌کاری شود و باقی آن را گل نرگس بکاریم چه مقدار از مساحت باغچه چمن‌کاری شده و چه مقداری از آن را گل نرگس کاشته‌ایم؟

«تألیفی»

۲ زمین حیاط گوگول جان عجیب است. در آن حیاط اگر توپی از ارتفاع کم‌تر از یک متر رها شود توپ به زمین چسبیده و اصلاً بالا نمی‌آید ولی اگر توپ از ارتفاع بیش از یک متر رها شود هر بار پس از برخورد نصف ارتفاع اولیه‌اش بالا می‌آید. گوگول جان توپش را از ارتفاع 18 متری رها کرده است. این توپ از لحظه‌ی رها شدن تا توقف کامل چند متر حرکت کرده است؟

«تألیفی»

۳ در لیگ کشور شکرستان ۷ تیم فوتبال وجود دارد که انتهای لیگ هر تیم دقیقاً با هر تیم دیگری فقط یک بازی انجام داده است. تعداد کل بازی‌ها را بیابید.

«تألیفی»

۴ حوضی مربعی شکل پر از آب در وسط یک حیاط قرار دارد به طوری که در هر یک از چهار گوشه‌ی آن درخت تنومندی قرار دارد. چطور می‌توان حوض را بزرگ‌تر کرد به شرطی که اولاً باز هم مربعی باشد و ثانیاً درخت‌ها همچنان در مرز بین آب و خشکی قرار داشته باشند.

«تألیفی»

۵ قطاری با سرعت 1° متر بر ثانیه و طول 1° متر به ابتدای یک تونل 2° متری می‌رسد. چند ثانیه طول می‌کشد تا تمام قطار از داخل تونل عبور کند؟

«متنوع»

۶ وقتی اتوبوسی نصف مسیر خود را طی کرده بود، مسافری به خواب رفت. هنگامی که بیدار شد، بقیه‌ی مسافتی که باقی مانده بود، نصف مسافتی بود که در طی آن مسافر به خواب رفته بود. مدت خواب مسافر، اتوبوس چه کسری از کل مسیر را طی کرده است؟

«آزمون ورودی سوم راهنمایی»

۷ از تکه چوبی به طول 9° سانتی‌متر به کمک دو تکه چوب دیگر به طول‌های 3° و 5° سانتی‌متر، چطور می‌توان تکه چوبی 7°



یک بار باخت از دور مسابقات حذف می‌شود. «تألیفی»
 (الف) قهرمان این دوره از مسابقات، چند بازی انجام می‌دهد؟

(ب) در کل چند بازی در این مسابقات انجام می‌شود؟

۱۱ با کدام دسته از اعداد زیر می‌توان یک مثلث ساخت؟ آن‌ها را با پرگار رسم کنید و دلیل رد کردن گزینه‌های دیگر را توضیح دهید.
 «تغییر یافته‌ی کتاب پنجم»

۱۲ راست‌آباد و درست‌آباد ۸ کیلومتر از هم فاصله دارند. چوپانان این دو روستا به خاطر امنیت گله‌هایشان آن‌ها را بیش از ۵ کیلومتر از روستا دور نمی‌کنند. آیا ممکن است گله‌ای از درست‌آباد با گله‌ای از راست‌آباد به هم برسند؟ «آسان شده‌ی مرحله‌ی اول»

ساعتی متری برید؟ «تألیفی»

۸ در یک مربع 5×5 حداکثر چند مستطیل 3×1 می‌توان جای داد که هیچ کدام روی هم قرار نگیرد؟ «مرحله‌ی اول ریاضی»

۹ ۴ خط مختلف از داخل یک مربع عبور می‌کنند. کم‌ترین و بیش‌ترین ناحیه‌هایی که این خطوط می‌توانند در مربع ایجاد کنند چند تا است؟ آیا این سؤال را برای ۵ خط نیز می‌توانید حل کنید؟ «تألیفی»

برای ایده گرفتن در حالت کلی می‌توانید به این موضوع توجه کنید که با رسم هر فضا و تقاطع آن با فضای دیگر (به غیر از اولین تقاطع یک نامیه به تعداد نواهی اضافه می‌شود.

۱۰ در لیگ جهانی والیبال، بیست و چهار تیم در چهار گروه شش تیمی به صورت دوره‌ای با هم بازی می‌کنند (یعنی در هر گروه هر تیم با تمام تیم‌های دیگر دقیقاً یک بار بازی می‌کند). سپس از هر گروه دو تیم به مرحله‌ی تک حذفی صعود می‌کنند (یعنی هر تیم با





۱۴ دانش‌آموزان پایه اول دبیرستان خوشحالان ۱۱۴ نفر هستند. در بین این دانش‌آموزان ۴۰ نفر به درس علوم تجربی و ۸۵ نفر به درس ریاضی علاقه دارند. هم‌چنین ۱۵ نفر به هر دو درس علاقه‌مندند. آیا کسی هست که به هیچ کدام از این دروس علاقه نداشته باشد؟ آن‌ها چند نفرند؟ **«تألیفی»**

(یواشکی: دو دایره که ناحیه‌ی مشترک دارند بکشید. یکی نماینده‌ی گروه ریاضی و یکی نماینده‌ی گروه علوم تجربی.)

۱۵ از بین ۱۰۰ نفر مجرم، ۳۸ نفر قاتل، ۳۰ نفر دزد، ۴۲ نفر کلاه‌بردار، ۸ نفر دزد و قاتل، ۵ نفر دزد و کلاه‌بردار، ۱۰ نفر قاتل و کلاه‌بردار و ۳ نفر هم سرگرم هر سه شغل! بوده‌اند. **(الف)** چند نفر از مجرمین مذکور، به هیچ کدام از این ۳ شغل مشغول نیستند؟

(ب) چند نفر فقط دزد هستند؟

(ج) چند نفر فقط به یکی از این شغل‌ها سرگرم هستند؟

۱۳ نقشه‌ی کشور برادران به صورت مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۲۰ واحد است. این کشور توسط سه برادر اداره می‌شود که پایتخت هر کدام یکی از رأس‌های مثلث است. طبق وصیت پدرشان هر کدام از آن‌ها فقط از مناطقی مالیات می‌گیرند که فاصله‌شان تا پایتخت او کم‌تر از ۱۱ واحد باشد و باقی مناطق کشور منطقه‌ی آزاد محسوب می‌شود. **«تألیفی»**

(الف) هر کدام از برادرها از چه مساحتی از کشور مالیات می‌گیرد؟

(ب) کدام مناطق باید به دو برادر مالیات دهند؟

(ج) آیا منطقه‌ای در این کشور وجود دارد که در آن باید به هر سه برادر مالیات داد؟

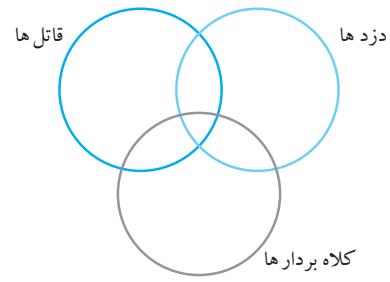
(د) بهترین منطقه برای کسب و کار کجاست؟



افراد قوم «راستان» از قوم «دوران» هستند. با رسم شکل و ارائه‌ی دلیل نشان دهید که حتماً «بعضی از افراد قوم «چپان» از قوم «دوران» هستند.»

«مسابقات ریاضی»

«جزوه رشد» (یواشکی: از نمودار مقابل کمک بگیرید.)



۱۶ در اون طرف‌تر آباد، بعضی از افراد قوم «دوران» از قوم «نزدیکان» هستند. هیچ کدام از افراد قوم «نزدیکان» از قوم «چپان» نیستند. همه‌ی افراد قوم «راستان» از قوم «چپان» هستند. بعضی از



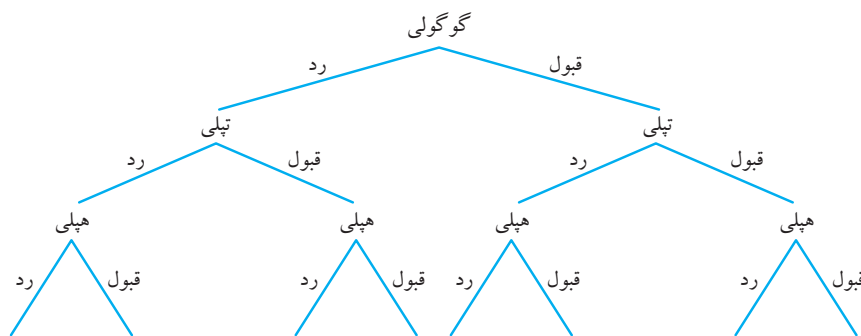
چند نمونه‌ی حل شده

مثال ۴

کلاس هفتم اون طرف تر آباد ۳ دانش آموز به نام‌های گوگولی، تپلی و هپلی دارد. معلم ریاضی آن‌ها برگه‌های آزمون را گم کرده است و می‌خواهد به صورت تصادفی اعلام نتیجه کند. در اون طرف تر آباد در کارنامه‌ی هر شخص نوشته می‌شود که قبول شده است یا نه و از نمره خبری نیست. او به چند طریق می‌تواند دانش آموزان را قبول یا رد نماید. گوگولی می‌تواند قبول یا رد شود. اگر گوگولی قبول شد، تپلی می‌تواند قبول یا رد شود و اگر گوگولی رد شد باز تپلی می‌تواند قبول یا رد شود. تا این جا شد ۴ حالت. برای هر کدام از این ۴ حالت، هپلی می‌تواند قبول یا رد شود. یعنی در کل ۸ حالت مختلف برای این ۳ عزیز به وجود می‌آید. به جدول و نمودار زیر دقت کنید.

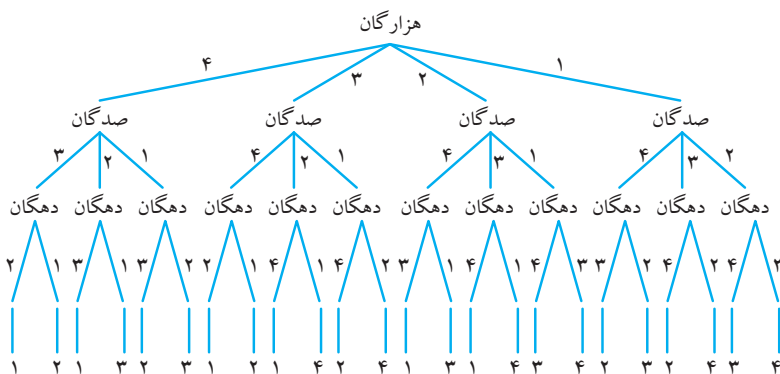
گوگولی	ق	ق	ق	ق	ر	ر	ر	ر
تپلی	ق	ق	ر	ر	ق	ق	ر	ر
هپلی	ق	ر	ق	ر	ق	ر	ق	ر

این ۸ حالت را در نمودار زیر نیز می‌توان مشاهده کرد:



مثال ۵

با ارقام ۱، ۲، ۳ و ۴ چند عدد ۴ رقمی می‌توان ساخت به شرطی که از هر کدام از این رقم‌ها یک بار استفاده شود؟ برای انتخاب رقم هزارگان ۴ انتخاب داریم. اگر هر کدام از این ۴ رقم انتخاب شود با توجه به این‌که دیگر آن رقم را نمی‌توانیم در جایگاه‌های دیگر استفاده کنیم، برای انتخاب رقم صدگان ۳ گزینه و همین طور برای انتخاب عدد دهگان ۲ گزینه و برای یکان یک گزینه خواهیم داشت و جواب برابر $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$ خواهد بود.



مثال ۶

با حاصل ضرب اعداد ۱، ۲، ۳ و ۵ چند عدد مختلف می توان ساخت؟ (از هیچ عددی بیش از یک بار استفاده نشود).
از راهبرد الگوسازی استفاده می کنیم. ابتدا اعدادی را می نویسیم که از یک عدد ساخته شده باشند: ۱، ۲، ۳، ۵
اکنون اعدادی را می نویسیم که از حاصل ضرب ۲ عدد به دست آیند:

$$۱ \times ۲ = ۲, ۱ \times ۳ = ۳, ۱ \times ۵ = ۵, ۲ \times ۳ = ۶, ۲ \times ۵ = ۱۰, ۳ \times ۵ = ۱۵$$

$$\text{سه تایی ها: } ۱ \times ۲ \times ۳ = ۶, ۱ \times ۲ \times ۵ = ۱۰, ۱ \times ۳ \times ۵ = ۱۵, ۲ \times ۳ \times ۵ = ۳۰$$

$$۱ \times ۲ \times ۳ \times ۵ = ۳۰ \quad \text{چهار تایی:}$$

اکنون اعداد تکراری را حذف کرده و تمام حالات مختلف را بشمارید.





تمرین

بخش ۲



۱۷ طنابی به طول ۲۰ واحد داریم. با این طناب چند مستطیل مختلف با طول اضلاع عدد صحیح می‌توان درست کرد؟ همه‌ی آن‌ها را رسم کرده و مساحت هر کدام را داخل آن بنویسید. (مربع نوع خاصی از مستطیل محسوب می‌شود). «کتاب درسی»

۱۸ اگر با آن طناب دایره‌ای درست کنید، مساحت آن چقدر می‌شود؟ به نظرتان چرا مساحت این دایره از تمامی مستطیل‌ها بیش‌تر است؟ «کتاب درسی»

۱۹ یک تاس سفید و یک تاس مشکی را می‌اندازیم. در چند حالت، مجموع اعداد رو شده بر ۳ بخش پذیر است؟ جدول بکشید و تمام حالات را بنویسید. سپس سعی کنید بدون جدول سؤال را حل کنید. «تألیفی»

۲۰ در یک آزمون ۶ سؤالی گزینه‌دار، هر پاسخ درست ۴ امتیاز مثبت و هر پاسخ اشتباه ۱ امتیاز منفی دارد. اگر پسر حشمت خان فقط به یک سؤال جواب نداده باشد. تمام امتیازهای ممکن برای او را بررسی کنید. «تألیفی»

۲۱ با انگشتان یک دست به ۵ صورت می‌توان عدد ۱ را نشان داد. به چند صورت می‌توان عدد ۲ را نشان داد به این شرط که: «تألیفی»

(الف) دو انگشت انتخاب شده در کنار هم باشند.

(ب) دو انگشت انتخاب شده در کنار هم نباشند.

(ج) مجموع حالت‌های الف و ب چه عددی را نشان می‌دهد؟



(ج) زوج بوده و بر ۳ بخش پذیر باشد.

(د) رقم تکراری نداشته باشند.

(ه) اعدادی را بنویسید که حتماً رقم تکراری داشته باشند.

(و) اکنون تمامی حالت‌های ممکن را بنویسید و توضیح دهید که چه ارتباطی بین جواب قسمت‌های «الف و ب» و نیز بین جواب قسمت‌های «د و ه» وجود دارد؟

۲۴ شماره تلفن‌های اون طرف‌تر آباد همگی ۸ رقمی هستند و هیچ‌کدام با صفر شروع نمی‌شوند. همگی از چپ به راست صعودی هستند و رقم تکراری ندارند. اون طرف‌تر آباد چند شماره تلفن مختلف می‌تواند داشته باشد؟ «تألیفی»

۲۲ دبیرستان «زرنگان» هفت دانش‌آموز ممتاز دارد. متأسفانه مدیر مدرسه فقط دو جایزه یکسان دارد و تصمیم دارد به قید قرعه آن‌ها را به دو نفر از دانش‌آموزان ممتاز جایزه بدهد. «تألیفی»
(الف) چند حالت مختلف برای اهدا این دو جایزه وجود دارد؟

(ب) اگر ۳ جایزه داشتیم، چند حالت مختلف برای اهدا وجود داشت؟

(ج) اگر ۶ جایزه داشتیم، چند حالت مختلف برای اهدا وجود داشت؟

۲۳ با سه رقم ۵ و ۲ و ۷ تمام عددهای سه‌رقمی ممکن را بنویسید. به شرطی که: (در عددهای شما می‌تواند رقم‌های تکراری هم باشد) «تألیفی»
(الف) آن اعداد زوج باشند.

(ب) آن عدد فرد باشد.



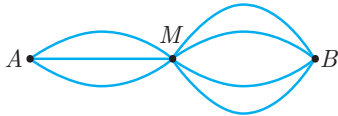


۲۵

با استفاده از رقم‌های ۱، ۲، ۳ و ۴، همه‌ی اعداد چهاررقمی ممکن با رقم‌های غیرتکراری را بر روی تخته‌ی بزرگ کلاس نوشته‌ایم. مجموع همه‌ی این اعداد را به دست آورید.

۲۸

به شکل نگاه کرده و به سؤالات زیر پاسخ دهید:



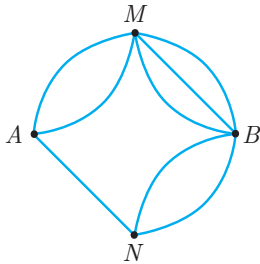
(الف) خرگوش کوچولو به چند روش مختلف می‌تواند از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B برود؟

(ب) خرگوش کوچولو به چند روش مختلف می‌تواند از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B برود و به نقطه‌ی A برگردد؟

(ج) خرگوش کوچولو به چند روش مختلف می‌تواند از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B برود و به نقطه‌ی A برگردد ولی در برگشت از مسیری که رفته عبور نکند؟

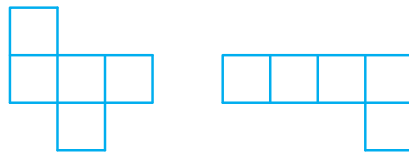
۲۹

هر سه قسمت سؤال قبل را برای شکل زیر نیز حل کنید.



۲۶

دور یک میز مربعی ۴ صندلی می‌توان قرار داد. دانش‌آموزان می‌خواهند برای مراسمی در سالن مدرسه، ۵ تا از این میزهای مربعی را به هم بچسبانند تا یک میز بزرگ‌تر درست کنند. به چند حالت مختلف می‌توانند این کار را در سالن انجام دهند؟ آن‌ها را رسم کنید و بگویید در کدام حالت بیش‌ترین صندلی را می‌توان دور میز بزرگ چید؟ دقت کنید که اتصال یعنی چسبیدن کامل یک ضلع میز به یک ضلع میز دیگر و دو نمونه از این اتصال‌ها نشان داده شده‌اند. «تألیفی»



۲۷

خانه‌ی امیرحسین، رسول، داود و سهیل در یک سمت خیابان اصلی اون‌طرف‌تر آباد است. اگر فاصله‌ی خانه‌ی سهیل و امیرحسین ۱۰۰ متر، فاصله‌ی خانه‌ی امیرحسین و رسول ۱۵۰ متر و فاصله‌ی خانه‌ی رسول و داود ۶۰ متر باشد، فاصله‌ی خانه‌ی سهیل و داود چه مقدارهایی می‌تواند باشد؟ (یواشکی: هم از راهبرد رسم شکل و هم راهبرد الگوسازی استفاده کنید.) «تألیفی»



چند نمونه‌ی حل شده

مثال ۷

مجموع سن سه نفر ۱۵ و حاصل ضرب سن آن‌ها مضربی از ۱۴ است. مجموع سن بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین فرد چقدر است؟
«تألیفی»

ساده‌ترین روشی که به ذهن می‌رسد این است که تمام حالتی که مجموع ۳ عدد طبیعی برابر ۱۵ است را بنویسیم و حساب کنیم که در کدام حالت حاصل ضرب، مضربی از ۱۴ است. ولی ساده‌تر هم می‌توان مسئله را حل کرد. واضح است که حداقل یکی از افراد باید ۷ ساله باشد و حداقل سن یکی دیگر از آن‌ها یک عدد زوج است. با توجه به این اطلاعات بزرگ‌ترین عدد نمی‌تواند ۸ یا بزرگ‌تر از آن باشد. زیرا مجموع ۳ عدد باید ۱۵ باشد. پس بزرگ‌ترین عدد ۷ است. اکنون فقط حالتی را می‌نویسیم که این ویژگی را دارند:

$$\left\{ \begin{array}{l} 7 + 7 + 1 \rightarrow \text{عدد زوج ندارد} \\ 7 + 6 + 2 \rightarrow \text{جواب مورد نظر} \\ 7 + 5 + 3 \rightarrow \text{عدد زوج ندارد} \\ 7 + 4 + 4 \rightarrow \text{کوچک‌ترین عدد ندارد} \end{array} \right. \Rightarrow \text{جواب} = 7 + 2 = 9$$



مثال ۸

دوست شما یکی از خانه‌های صفحه‌ی 12×12 را در نظر گرفته است. شما باید با طرح چند سؤال، خانه‌ی مورد نظر او را پیدا کنید. او فقط می‌تواند به سؤالات شما جواب بله یا خیر بدهد. چگونه می‌توان خانه‌ی مورد نظر را با طرح یک روش اصولی، همواره با حداکثر ۸ سؤال پیدا کرد؟
«تألیفی»

این صفحه $12 \times 12 = 144$ خانه دارد. ما در هر سؤال می‌توانیم خانه‌ها را به دو قسمت تبدیل کنیم. از دوستان می‌پرسیم که «آیا خانه‌ی مورد نظر در نیمه‌ی بالای جدول است؟» چه جواب بله باشد و چه خیر، نیمی از خانه‌ها حذف می‌شوند و ما باید بین ۷۲ خانه به جست‌وجو بپردازیم. همین روند را ادامه می‌دهیم:

$$9 \xrightarrow{\text{سؤال ۱}} 18 \xrightarrow{\text{سؤال ۲}} 36 \xrightarrow{\text{سؤال ۳}} 72 \xrightarrow{\text{سؤال ۴}} 144$$

بعد از ۴ سؤال به ۹ خانه می‌رسیم. این ۹ خانه را به ۲ قسمت ۴ و ۵ خانه‌ی تقسیم می‌کنیم. بعد از شنیدن جواب یا ۵ خانه در پیش‌روی ما باقی می‌ماند و یا ۴ خانه. ما حالت ۵ خانه‌ی را ادامه می‌دهیم:

$$1 \xrightarrow{\text{سؤال ۵}} 2 \xrightarrow{\text{سؤال ۶}} 3 \xrightarrow{\text{سؤال ۷}} 5 \xrightarrow{\text{سؤال ۸}} 9$$



تمرین

بخش ۳



۳۳ با استفاده از یک ترازوی دوکفه‌ای قدیمی چگونه می‌توان از بین ۱۳۹۶ سکه‌ی هم‌شکل، یکی از آن‌ها را که وزنش کمی بیش‌تر از بقیه است را پیدا کرد؟ روش کاری ارائه دهید که در آن کم‌ترین بار از ترازوی دوکفه‌ای استفاده شده باشد و روش کار در هر شرایطی درست باشد.

۳۴ دوست شما یکی از مضرب‌های ۵ که کوچک‌تر از 1000 است را در نظر گرفته است. شما باید با طرح چند سؤال، عدد مورد نظر او را پیدا کنید. با طرح حداکثر چند سؤال با جواب بله یا خیر، به طور حتمی می‌توان آن را پیدا کرد؟

۳۵ اگر نمره‌ی ریاضی احمد بالاتر از حسن، صادق پایین‌تر از رضا باشد، هم‌چنین رضا بالاتر از احمد شده باشد و صادق پایین‌ترین نمره را داشته باشد. نمره‌ی ریاضی افراد را به ترتیب صعودی مرتب کنید.

۳۰ تعداد زیادی سکه‌ی 50 و 100 تومانی داریم و می‌دانیم که وزن یک سکه‌ی 50 تومانی با یک سکه‌ی 100 تومانی برابر است. به چند حالت می‌توان با سکه‌ها 500 تومان درست کرد به شرطی که بتوان با آن‌ها در یک ترازوی دوکفه‌ای تعادل ایجاد کرد؟ «تألیفی»

۳۱ در مستطیلی که طولش دو برابر عرض آن است، محیط برابر 36 واحد است. مساحت آن را حساب کنید.

«آزمون تیزهوشان»

۳۲ مجموع سن سه نفر 13 و حاصل ضرب سن آن‌ها 72 است. اختلاف بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین سن بین این سه نفر کدام است؟





۳۷ سه کلاه سفید و دو کلاه سیاه را جلوی چشمان سه ریاضی‌دان درون کیسه‌ای خالی قرار می‌دهیم. سپس آن‌ها را به صف پشت سر هم قرار می‌دهیم و سر هر کدام از آن‌ها بدون آن‌که ببینند یکی از کلاه‌های درون کیسه را قرار می‌دهیم. نفر سوم کلاه‌های دو نفر دیگر را می‌بیند و نفر دوم کلاه نفر اول را می‌بیند. از نفر سوم می‌پرسند که کلاه سرش چه رنگی است و او در جواب می‌گوید معلوم نیست. همین پرسش را از نفر دوم می‌کنند و او هم می‌گوید معلوم نیست. ولی وقتی این سؤال را از نفر اول می‌کنند او می‌گوید کلاه من سفید است. او درست می‌گوید یا نادرست؟

۳۶ روزی مسئول سرشماری به منزل قمرخان می‌رود و از او درباره‌ی سن فرزندانش سؤال می‌کند. او جواب می‌دهد: «من فقط سه پسر دارم که حاصل ضرب سن آن‌ها ۳۶ است و حاصل جمع سن‌شان ۲ تا از شماره پلاک همسایه‌ی سمت راست کم‌تر است.» مسئول سرشماری به شماره پلاک همسایه‌ی سمت راست نگاهی می‌اندازد و می‌گوید: «شما حتماً باید اطلاعات بیش‌تری به من بدهید.» قمرخان می‌گوید: «بزرگ‌ترین پسر من به ریاضیات بسیار علاقه‌مند است.» مسئول سرشماری با شنیدن این جمله سن هر سه پسر قمرخان را می‌فهمد. آیا می‌توانید سن سه پسر قمرخان را به‌دست بیاورید؟

چند نمونه‌ی حل شده

مثال ۹

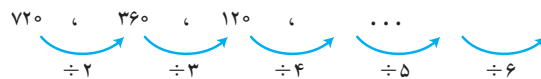
سه عدد بعدی الگوهای زیر را بنویسید.

(الف) $۵, ۷, ۱۰, ۱۴, \dots$

دقت کنید که در این سؤال مقداری که به هر عضو اضافه می‌شود، ثابت نیست:

پس عضوهای بعدی به ترتیب $۱۹, ۲۵, ۳۲$ هستند.(ب) $۷۲۰, ۳۶۰, ۱۲۰, \dots$

در این دنباله‌ی اعداد، ابتدا عضو اول نصف شده است. سپس عضو دوم بر ۳ تقسیم شده است.

پس عضوهای بعدی به ترتیب $۳۰, ۶, ۱$ خواهند بود.

مثال ۱۰

شکل دهم الگوی مقابل با چند دایره ساخته می‌شود؟



به سادگی فهمیده می‌شود که تعداد دایره‌ها به صورت الگوی عددی زیر است:

$$1 \times 1 = 1, 2 \times 2 = 4, 3 \times 3 = 9, 4 \times 4 = 16, \dots$$

پس شکل ۱۰ از $۱۰ \times ۱۰ = ۱۰۰$ دایره ساخته خواهد شد.

از طرفی می‌توان به مسئله این طور نیز نگاه کرد:



مثال ۱۱

در اون طرف تر آباد نوعی درخت وجود دارد که هر سال هر کدام از شاخه‌هایش به دو سمت رشد می‌کنند به طوری که مجموع طول دو شاخه‌ی جدید، نصف شاخه‌ی قبلی است. وقتی قمرخان یک ساله بود این درخت فقط یک شاخه به طول یک متر



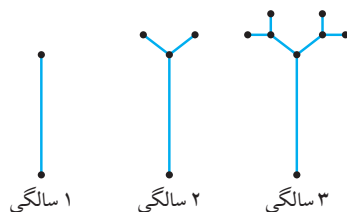
داشت. اکنون که او ۱۰ ساله است مجموع طول شاخه‌های این درخت چقدر است؟

$$1 = \text{مجموع طول شاخه‌ها در ۱ سالگی قمرخان}$$

$$1 + 2 \times \frac{1}{4} = 1 + \frac{1}{2} = \text{مجموع طول شاخه‌ها در ۲ سالگی قمرخان}$$

$$1 + 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{16} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \text{مجموع طول شاخه‌ها در ۳ سالگی قمرخان}$$

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \text{مجموع طول شاخه‌ها در ۴ سالگی قمرخان}$$



به همین ترتیب خواهیم داشت:

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{512} = \text{مجموع طول شاخه‌ها در ۱۰ سالگی قمرخان}$$

برای پیدا کردن حاصل آن مجموع بهتر است به آن $\frac{1}{512}$ اضافه و کم کنیم:

$$? = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{256} + \frac{1}{512} + \frac{1}{512} - \frac{1}{512}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{256} + \frac{1}{256} - \frac{1}{512}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{128} + \frac{1}{128} - \frac{1}{512} = \dots = 2 - \frac{1}{512} = 1,998,05$$





تمرین

بخش ۴

۳۸

سه عدد بعدی الگوهای زیر را بنویسید. رابطه‌ی بین اعداد را توضیح دهید.*
«تألیفی»

(ط) ۲, ۴, ۱۶, ۹۶, , , ,

(الف) ۲, ۵, ۸, ۱۱, ۱۴, , ,

(ی) ۲, ۴, ۱۶, ۱۲۸, , , ,

(ب) ۱۴۱, ۱۴۸, ۱۵۵, , , ,

(ک) ۱, ۴, ۹, ۱۶, , , ,

(ج) ۱۰, ۸, ۶, ۵, ۵, ۵, , , ,

(ل) ۱, ۸, ۲۷, ۶۴, , , ,

(د) ۴, ۲, ۱, $\frac{1}{3}$, , , ,

(م) ۲, ۱۲, ۳۰, ۵۶, , , ,

(ه) ۵, ۶, ۱۰, ۱۹, ۳۵, , , ,

(ن) ۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, , , ,

(و) ۱۰, ۱۸, ۲۸, ۴۶, , , ,

(س) ۳, ۳, ۶, ۱۸, ۷۲, , , ,

(ز) ۶, ۱۲, ۲۴, ۴۸, , , ,

(ح) ۵, ۵, ۱۰, ۳۰, , , ,

* لازم به ذکر است که برای بعضی از قسمت‌ها ممکن است بیش از یک الگو پیدا کرده و جواب‌های متنوعی پیدا کنید و در حالت کلی جواب هیچ یک از قسمت‌ها لزوماً منحصر به فرد نیست.

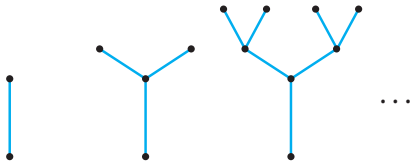




(ب) شکل پنجم از چند چوب‌کبریت ساخته شده است؟

(ج) کدام شکل با 100° چوب‌کبریت ساخته شده است؟

۴۲ با اتصال تعدادی میله اجسام زیر را ساخته‌ایم. برای ساخت شکل 11° به چند میله و چند اتصال نیاز داریم؟



«المپیاد ریاضی»

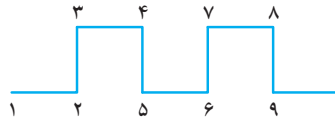
۴۳ در الگوهای زیر با بیان دلیل بگویید که شکل دهم از چند واحد ساخته شده است. (واحد هر شکل روبه‌روی آن نوشته شده است). «آزمون جهانی تیمز - المپیاد ریاضی - مسابقات ریاضی - کانگورو»

۳۹ تعدادی از اعداد را از چپ به راست پشت سر هم نوشته‌ایم:

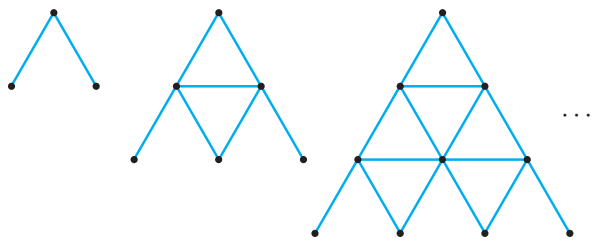
۲, ۵, ...

از جمله‌ی سوم به بعد، هر جمله از تقسیم جمله‌ی قبلی به قبلی‌تر به دست می‌آید. به طور مثال جمله‌ی سوم برابر $\frac{5}{2}$ است. جمله‌ی 121 ام را به دست آورید. «المپیاد ریاضی»

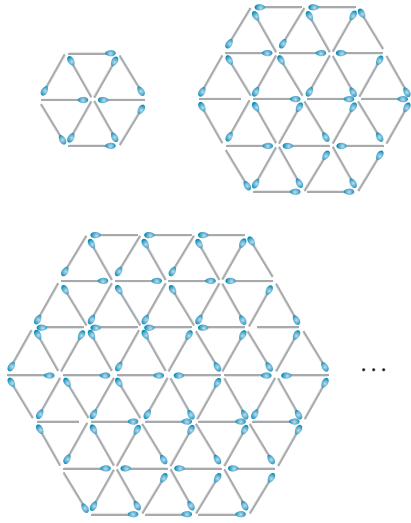
۴۰ به الگوی تکراری زیر دقت کنید و قطعه‌ی این الگو از نقطه‌ی 1393 تا 1396 را رسم کنید. «المپیاد ریاضی»



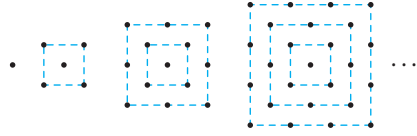
۴۱ (الف) در الگوی زیر شکل هفتم نسبت به شکل قبلی چند چوب‌کبریت بیش‌تر دارد؟ «المپیاد ریاضی»



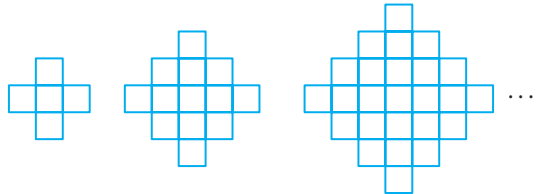
(ی) (چوبکبریت)



(ز) (نقطه)

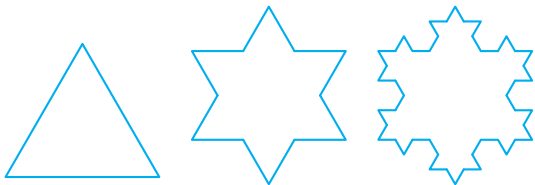


(ح) (مربع)

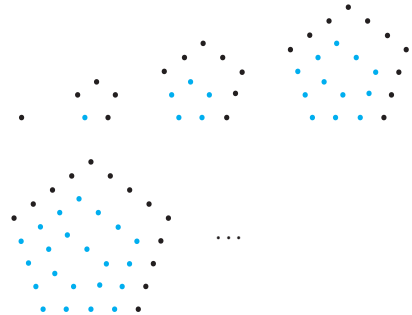


۴۴

برای ایجاد یک برف دانه‌ی کُخ، یک مثلث متساوی‌الاضلاع در نظر گرفته، روی هر ضلع آن این روند را تکرار می‌کنیم: ضلع را به ۳ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و روی پاره خط وسطی، یک مثلث متساوی‌الاضلاع جدید می‌سازیم و قاعده‌اش (همان پاره خط وسطی) را حذف می‌کنیم و روی پاره خط‌های باقی‌مانده همین کار را انجام می‌دهیم. جمله‌ی عمومی دنباله‌ی تعداد پاره خط‌ها در هر مرحله را به دست آورید.



(ط) (نقطه)

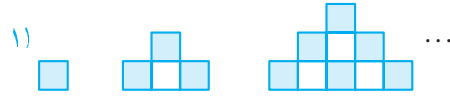


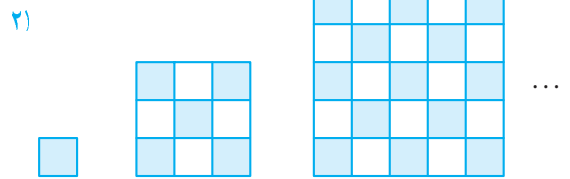




۴۵

در الگوهای زیر با بیان دلیل بگویید که چه نسبتی از شکل دهم هاشور خورده است. «المپیاد ریاضی»





۴۶

الگوی جدول زیر را پیدا کرده و مجموع اعداد ردیف آخر را بنویسید. «کانگورو»

۱۲	۵
۱۷	۷
۲۴	۱۰
۳۴	۱۴

۴۷

خرگوش‌های اون طرف‌تر آباد عمر جاودان دارند. در هر سال هر جفت خرگوش بالغ، جفت تازه‌ای که بعد از دو سال بالغ می‌گردند، تولید کنند. اگر حشمت جان (پسر حشمت خان!) در تولد ۱۰ سالگی‌اش یک جفت خرگوش تازه متولد شده هدیه گرفته باشد، چهار سال بعد چند خرگوش خواهد داشت؟

