

مجموعه‌های متناهی و نامتناهی

درس اول

مجموعه اعداد

اعداد طبیعی: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$

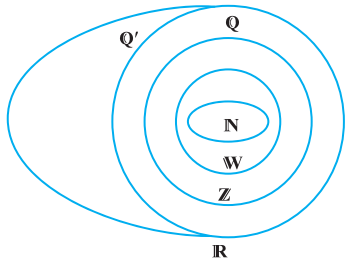
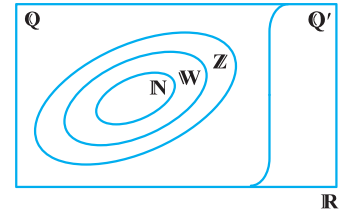
اعداد حسابی: $\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$

اعداد صحیح: $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$

اعداد گویا: $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\} = \left\{ \frac{m}{n} \mid m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N} \right\}$

اعداد گنگ: $\mathbb{Q}' =$ اعدادی که گویا نیستند = اعدادی که نتوانیم به صورت کسر بنویسیم

اعداد حقیقی: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$



۱ اعداد زیر را روی شکل جای دهید.

$\sqrt{5}$, $\frac{2}{3}$, 0.16 , -5 , 2π , $-1/7$, 0 , $\sqrt{9}$, $0/3$, $3/14$

۲ درستی یا نادرستی هر یک از عبارتهای زیر را تعیین کنید.

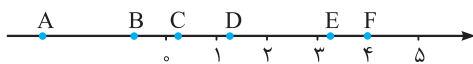
- آ $\mathbb{Z} \cup \mathbb{N} = \mathbb{N}$
- ب $\mathbb{W} - \{0\} = \mathbb{N}$
- ث $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \cap \mathbb{Z}$
- ج $\mathbb{Z} - \mathbb{N} = \mathbb{W}$
- خ $\mathbb{Q}' \cap \mathbb{Z} = \emptyset$

- ب $\mathbb{R} - \mathbb{Q} = \mathbb{Q}'$
- ت $\mathbb{N} \cup \mathbb{W} \subseteq \mathbb{W}$
- ج $\mathbb{N} - \mathbb{W} = \emptyset$
- ح $\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}' = \emptyset$

۳ حاصل هر یک از عبارتهای زیر را تعیین کنید.

- آ $(\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}') - (\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}') =$
- ب $(\mathbb{Z} \cap \mathbb{R}) - (\mathbb{N} \cap \mathbb{Q}) =$

- ب $\mathbb{Z} \cap (\mathbb{R} \cup \mathbb{Q}') \cap (\mathbb{R} \cap \mathbb{Q}) =$
- ت $(\mathbb{W} - \mathbb{N}) \cup (\mathbb{Z} - \mathbb{W}) =$



- $-\frac{9}{6}$ • $1/2$ • $1 - \sqrt{2}$ • π • $\frac{\sqrt{144}}{3}$ • $\frac{1}{6}$

۴ هر یک از اعداد داده شده را به نقاط متناظرشان روی محور وصل کنید.

۵ به کمک مجموعه‌های اعداد:

- آ عددی مثال بزنید که گویا باشد، اما صحیح نباشد.
- ب دو عدد حقیقی مثال بزنید که گویا نباشند.
- پ آیا عددی می‌توانید مثال بزنید که صحیح باشد، اما گویا نباشد؟
- ت آیا عددی وجود دارد که حسابی باشد، اما طبیعی نباشد؟
- ث عددی مثال بزنید که صحیح باشد، اما حسابی نباشد.
- ج دو عدد گویا بین ۰ و ۱ مثال بزنید. آیا می‌توانید اعداد گویای بیشتری هم مثال بزنید؟ بین دو عدد حقیقی، چند عدد گویا وجود دارد؟
- چ دو عدد گنگ بین ۱ و ۲ مثال بزنید. آیا می‌توانید اعداد گنگ بیشتری مثال بزنید؟ بین دو عدد حقیقی چند عدد گنگ وجود دارد؟

اگر $A = \{5k | k \in \mathbb{N}\}$ ، B اعضای A باشند که بر ۶ بخش پذیرند و C زیرمجموعه‌ای از A باشد که $B \subseteq C \subseteq A$ ، دو مجموعه برای C مثال بزنید.

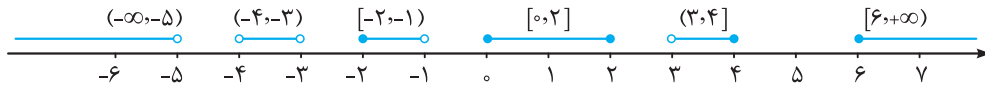
آیا اعضای مجموعه C همگی زوج‌اند؟

آیا اعضای مجموعه C مضرب ۵ اند؟

یکان اعضای A چه عددی است؟ یکان اعضای B و $C - B$ چه اعدادی است؟

بازه‌ها

به زیرمجموعه‌هایی از \mathbb{R} که شامل تمام اعداد حقیقی بین دو عدد مشخص‌اند، بازه یا فاصله می‌گویند. در واقع هر بازه، تیکه‌ای از محور رو نشون می‌ده و شامل یه عالمه عدد حقیقیه.



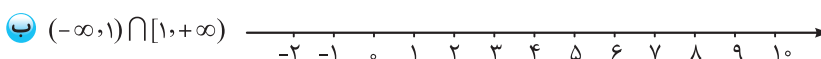
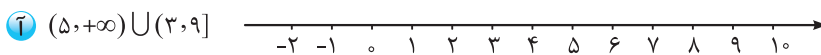
جدول زیر را کامل کنید.

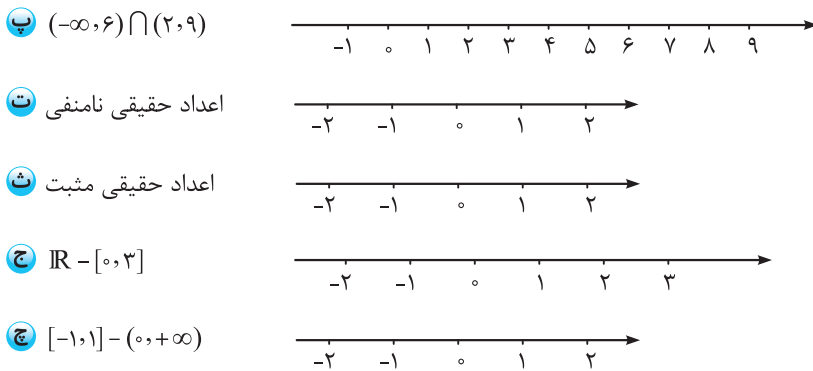
نمایش هندسی	نمایش مجموعه‌ای	نوع بازه	بازه
	$[0, 1)$

	$\{x \in \mathbb{R} 0 < x \leq 1\}$

	باز	$(0, 1)$
	$\{x \in \mathbb{R} x > 1\}$

حاصل هریک از مجموعه‌های زیر را به کمک محور مشخص کنید.





درستی یا نادرستی هریک از عبارتهای زیر را تعیین کنید.

آ $\{x \in \mathbb{R} | x \geq -1, x \leq 1\} = [-1, +\infty) \cap (-\infty, 1] = [-1, 1]$

ب $\{x \in \mathbb{R} | x > 1, x \leq -1\} = [-1, 1)$

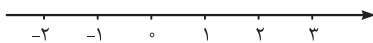
پ $\{x \in \mathbb{R} | x \geq -1 \text{ یا } x \leq 1\} = [-1, +\infty) \cup (-\infty, 1] = \emptyset$

ت $\{x \in \mathbb{R} | x \geq 1 \text{ یا } x < -1\} = \mathbb{R} - [-1, 1)$

اگر A اعداد حقیقی نامثبت، $B = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 1\}$ و $C = (-1, 2]$ باشد،

آ مجموعه‌های A ، B و C را روی محور مشخص کنید.

ب به کمک قسمت «آ» حاصل هریک از عبارتهای زیر را بیابید.



آ $A \cup B = \mathbb{R} - \dots$

ب $A \cap B = \dots$

ت $A - C = \dots$

ب $B \cap C = \dots$

ت $B - C = \dots$

ج $C - (A \cup B) = \dots$

مجموعه‌های مساوی در ستون‌های چپ و راست را به هم وصل کنید.

- | | | |
|------------------------|---|-----------------------------------|
| $\mathbb{R} - [-1, 1)$ | • | $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$ |
| $[-1, 1) - \{1\}$ | • | $[-1, 1)$ |
| $\mathbb{R} - (-1, 1)$ | • | $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$ |
| $[-1, 1) \cup \{1\}$ | • | $(-\infty, -1) \cup [1, +\infty)$ |
| $[-1, 1) - \{-1\}$ | • | $(-1, 1)$ |
| $\mathbb{R} - \{1\}$ | • | $(-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$ |
| $\mathbb{R} - [-1, 1]$ | • | $[-1, 1]$ |

اعداد مربوط به هر بازه را به آن وصل کنید.

- | | | | | | |
|-----------|--------------------------|------------------------|------------|-----------------------|----------------------------|
| اعداد : | • $1 - 2/05 \times 10^5$ | • $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | • ۰ | • $\frac{17}{3}$ | • $-\frac{\pi}{3}$ |
| بازه‌ها : | • $(-\infty, -2)$ | • $[-3, 0)$ | • $(0, 2)$ | • $[-\frac{1}{2}, 3]$ | • $[\frac{3}{2}, +\infty)$ |

مجموعه متناهی و نامتناهی

به مجموعه‌ای که تعداد اعضایش به عدد حسابی باشد، مجموعه متناهی می‌گویند. اگر A به مجموعه متناهی باشد، تعداد اعضایش را $n(A)$ یا $n(A) \in \mathbb{W}$ نشان می‌دهند. واضح است که اگر به مجموعه متناهی نباشد، نامتناهی و تعداد اعضایش از هر عدد دلخواهی بزرگتره.

در بین مجموعه‌های زیر، مجموعه‌های متناهی و نامتناهی را مشخص کنید.

- الف $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ ب اعداد طبیعی غیرصحيح
- پ خطوط گذرا از مبدأ ت انسان‌های روی کره زمین
- ث اعداد اول زوج ج اعداد گویای غیرصحيح
- چ بازه $[-۱۰۱]$ ح مضارب عدد ۲۴
- خ مقسوم‌علیه‌های عدد ۲۴ د $\{x \in \mathbb{Z} | -3 \leq x \leq 5\}$
- ز $\{x \in \mathbb{R} | -3 \leq x \leq 5\}$

اگر $A \subseteq B$ ، درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را تعیین کنید.

- الف اگر A متناهی، آن‌گاه B متناهی است.
- ب اگر B متناهی، آن‌گاه A متناهی است.
- پ اگر $B - A$ متناهی، آن‌گاه B متناهی است.
- ت اگر B نامتناهی، آن‌گاه $A - B$ متناهی است.
- ث اگر A نامتناهی، آن‌گاه $B - A$ متناهی است.

در هر یک از موارد در جدول زیر، مجموعه‌های متناهی یا نامتناهی را مشخص کنید.

A	B	$A \cap B$	$A \cup B$	$A - B$	$B - A$	$(A \cup B) - (A \cap B)$
\mathbb{N}	\mathbb{W}
\mathbb{R}	\mathbb{Q}
مضارب طبیعی ۳	$\{x \in \mathbb{Z} x^2 \leq 50\}$	متناهی
اعداد طبیعی فرد	اعداد اول
$\{x \in \mathbb{N} x < ۱۰\}$	$\{x \in \mathbb{Z} x < \frac{3}{4}\}$
متناهی	متناهی	متناهی
متناهی	نامتناهی
نامتناهی	نامتناهی	متناهی یا نامتناهی

۱۶ اگر A مجموعه همه اعداد طبیعی فرد باشد،

آ دو زیرمجموعه نامتناهی از A بنویسید که اشتراک نداشته باشند.

ب دو زیرمجموعه نامتناهی از A بنویسید که اشتراک متناهی داشته باشند.

پ دو زیرمجموعه نامتناهی از A بنویسید که یکی زیرمجموعه دیگری باشد.

۱۷ برای هر یک از موارد زیر در صورت وجود، مثال بزنید.

آ مجموعه‌ای نامتناهی از اعداد صحیح بین دو عدد گویای $\frac{3}{5}$ و $\frac{16}{17}$

ب مجموعه‌ای نامتناهی از اعداد گویای بین دو عدد صحیح 0 و 1

پ دو مجموعه نامتناهی که اشتراکشان متناهی باشد.

ت دو مجموعه نامتناهی که اجتماعشان متناهی باشد.

ث دو مجموعه نامتناهی که تفاضل آنها متناهی باشد.

۱۸ اگر اشتراک دو بازه $(-\infty, n]$ و $(1, m)$ ناتهی باشد، کدام گزینه لزوماً صحیح است؟

(۴) $n \leq 1$

(۳) $n = 1$

(۲) $1 \leq n \leq m$

(۱) $n > 1$

۱۹ اگر بازه $[-\frac{1}{3}, -\frac{1}{4}]$ ، $[\frac{2}{3}, \frac{1}{2}]$ و $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{4})$ شامل مبدأ مختصات باشد، n متعلق به کدام بازه است؟

(۴) $(-\frac{1}{4}, \frac{2}{3}]$

(۳) $(-\frac{2}{3}, \frac{1}{2}]$

(۲) $(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}]$

(۱) $[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{4}]$

(راهنمایی: برای حل این سؤال دو تا شرط $2n + 1 < 0$ و $2 \leq 3n + 2 \leq 0$ باید هم‌زمان اتفاق بیفته.)

۲۰ اگر $A_n = (\frac{(-1)^n}{4}, n]$ ، $(n \in \mathbb{N})$ باشد، مجموعه $(A_1 \cap A_2) - (A_1 \cup A_2)$ شامل چند عدد صحیح است؟

(۴) صفر

(۳) ۱

(۲) ۳

(۱) ۲

۲۱ اگر $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ ، $(n \in \mathbb{N})$ و $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \dots$ و $B = A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots$ باشد، کدام گزینه صحیح است؟

(۴) $B = \{0\}$

(۳) $A = [-1, 1]$

(۲) $B = \emptyset$

(۱) $A = \mathbb{R}$

۲۲ اگر اشتراک دو بازه $[n, -3]$ و $(1, +\infty)$ مجموعه‌ای متناهی باشد، کدام گزینه لزوماً صحیح است؟

(۴) $n \leq 1$

(۳) $n \geq 1$

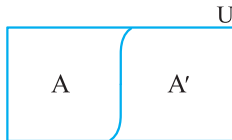
(۲) $n < 1$

(۱) $n = 1$



مجموعه مرجع و مجموعه متمم

مجموعه مرجع مجموعه‌ایه که همه مجموعه‌هایی که باهاشون کار می‌کنیم، زیرمجموعه اون باشن و با U نشون می‌دن. حالا اگه U مجموعه مرجع و $A \subseteq U$ باشه، به $A' = U - A$ متمم A می‌گن. درواقع A' شامل اعضای U ست که تو A نیستن. دوتا نکته تو این تعریف هست:



$$A \cap A' = \emptyset$$

۱ هر مجموعه و متممش، اشتراک ندارند:

$$A' \cup A = U$$

۲ اجتماع هر مجموعه با متممش، برابر با مجموعه مرجعه:

$$Q' = \mathbb{R} - Q, \quad Q \cap Q' = \emptyset, \quad Q \cup Q' = \mathbb{R}$$

مثل Q و Q' که متمم همن:

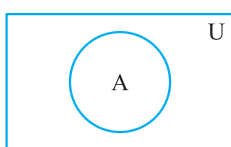
۲۳ اگر $A = \{x \in U \mid -1 \leq x \leq 1\}$ باشد، در هر حالت، مجموعه A و متممش A' را بیابید.

U	A	A'
$U = \mathbb{N}$	$\mathbb{N} - \{1\} = \{2, 3, \dots\}$
$U = \mathbb{W}$
$U = \mathbb{Z}$
$U = \mathbb{R}$

۲۴ اگر \mathbb{R} مجموعه مرجع باشد، هر مجموعه را به متممش وصل کنید.

Q	•	• $(-\infty, 0) \cup [1, +\infty)$
Q'	•	• $[0, +\infty)$
$[0, 1)$	•	• Q
$\{1\}$	•	• $(-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$
$(-\infty, 0)$	•	• $(-\infty, 1)$
$[1, +\infty)$	•	• Q'

۲۵ اگر U مجموعه مرجع و $A \subseteq U$ باشد، به کمک نمودار جاهای خالی را پر کنید.

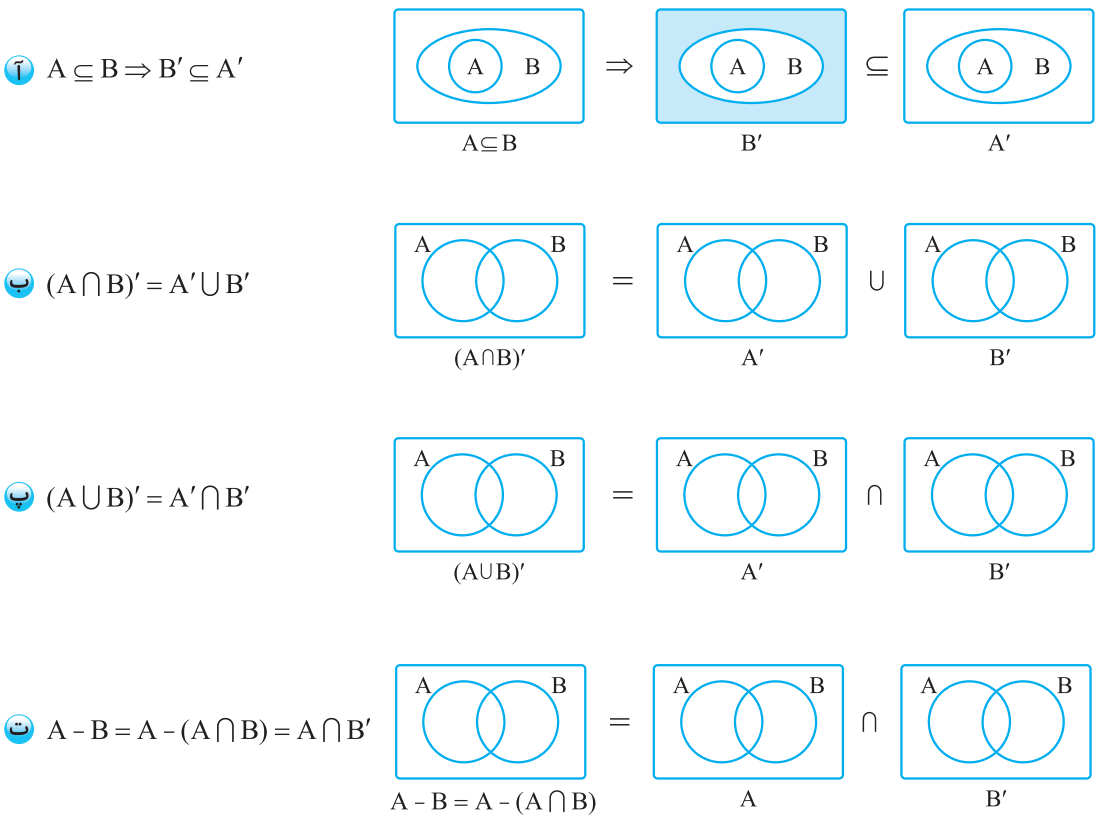


- ۱ $A \cap U = \dots$ ۲ $\emptyset' = \dots$ ۳ $A \cup A' = \dots$ ۴ $A \cup U = \dots$
 ۵ $U' = \dots$ ۶ $A - A' = \dots$ ۷ $U - A = \dots$ ۸ $(A')' = \dots$
 ۹ $A' - A = \dots$ ۱۰ $A - U = \dots$ ۱۱ $A \cap A' = \dots$

۲۶ اگر $U = \{x \in \mathbb{Z} \mid |x| < 10\}$ مجموعه مرجع، $A = \{x \in U \mid x^2 < 50\}$ ، مجموعه مقسوم‌علیه‌های عدد ۳۰ و $C \subseteq U$ مجموعه مضارب عدد ۶ باشد، هر یک از مجموعه‌های زیر را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

- آ $U = \dots\dots\dots$
- ب $A = \dots\dots\dots$
- پ $B = \dots\dots\dots$
- ت $C = \dots\dots\dots$
- ث $B' = \dots\dots\dots$
- ج $A' = \dots\dots\dots$
- چ $A' \cap B' = \dots\dots\dots$
- ح $C \cap A' = \dots\dots\dots$
- خ $(A \cup B)' = \dots\dots\dots$
- د $C' = \dots\dots\dots$
- ذ $(B \cap C)' = \dots\dots\dots$
- ر $B' \cup C' = \dots\dots\dots$

۲۷ به کمک نمودار، درستی هر یک از عبارتها را نشان دهید.



۲۸ اگر $U = \mathbb{Z}$ باشد،

- آ مجموعه‌ای نامتناهی مثال بزنید که متمم‌اش هم نامتناهی باشد.
- ب مجموعه‌ای نامتناهی مثال بزنید که متمم‌اش متناهی باشد.
- پ مجموعه‌ای متناهی مثال بزنید که متمم‌اش نامتناهی باشد.
- ت آیا مجموعه‌ای متناهی وجود دارد که متمم‌اش متناهی باشد؟

تعداد اعضای اجتماع دو مجموعه

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

اگر A و B دو تا مجموعه متناهی باشن، اون وقت:

یه چیزی! اگه A و B مجزا باشن یعنی اشتراکشون تهی باشه، اون وقت:

$$A \text{ و } B \text{ مجزا} \Rightarrow A \cap B = \emptyset \Rightarrow n(A \cap B) = 0 \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

جفت مجموعه‌های مجزا را با علامت ✓ مشخص کنید.

آ (A و A')

ب (Q' و Z)

پ (W و Z)

ت (اعداد اول و اعداد زوج)

ث ($\{x | -x \in \mathbb{N}\}$ و $\{-x | x \in \mathbb{N}\}$)

اگر A و B دو مجموعه مجزا و باپایان در \mathbb{N} باشند، به کمک مثال، درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را بررسی کنید.

A = { }, B = { }

آ $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

ب $A \subseteq B'$

پ $A' \subseteq B$

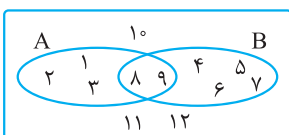
ت $A' \subseteq B'$

ث $A' \cup B' = U$

ج $A' \cap B' = \emptyset$

اگر A و B دو مجموعه مجزا باشند، حاصل عبارت‌های $(A \cap (B \cup A)) \cap B$ و $((A - B) \cup (B - A)) - B$ را بیابید.

باتوجه به شکل، اعضا و تعداد اعضای هریک از مجموعه‌ها را بیابید.



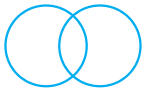
آ $A - (A - B) =$

ب $A' \cap B' =$

پ $A' - B' =$

ت $A \cap B' =$

ث $A' \cup B' =$



۳۳ یک مؤسسه انتشاراتی برای استخدام ویراستار و مؤلف آگهی داده است. اگر ۱۴ نفر برای ویراستاری، ۱۷ نفر برای

تألیف و ۵ نفر برای هر دو شغل داوطلب شده باشند،

آ) کلاً چند نفر برای استخدام داوطلب شده‌اند؟

ب) چند نفر فقط برای ویراستاری داوطلب شده‌اند؟

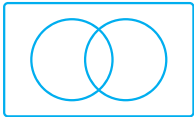
پ) چند نفر فقط برای تألیف داوطلب شده‌اند؟

۳۴ در بین ۱۰۰ دانش‌آموز یک مدرسه، ۳۲ نفر عینکی و ۲۳ نفر چپ دست‌اند. اگر ۴ نفر از عینکی‌ها چپ دست باشند،

آ) چند نفر عینکی یا چپ دست‌اند؟

ب) چند نفر از دانش‌آموزان راست دست، عینکی نیستند؟

پ) چند نفر از دانش‌آموزان عینکی، راست دست‌اند؟

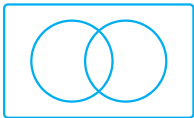


۳۵ در یک جمع ۱۵ نفری، ۵ نفر علاقمند به دیدن فوتبال و ۹ نفر علاقمند به دیدن سریال‌اند. اگر ۳ نفر خواهان خاموش بودن تلویزیون باشند،

آ) چند نفر علاقمند به دیدن هر دو برنامه هستند؟

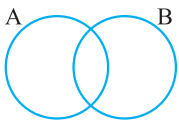
ب) چند نفر فقط علاقمند به دیدن فوتبال‌اند؟

پ) چند نفر علاقمند نیستند سریال ببینند؟



۳۶ مجموعه $(A \cup B)$ دارای ۶ عضو، $(A \cap B)$ دارای ۲ عضو و $(A - B)$ هم دارای ۳ عضو می‌باشد. به کمک نمودار ون تعداد اعضای هر یک

از مجموعه‌های زیر را تعیین کنید.



$n(A) =$

$n(B) =$

$n(B - A) =$

۳۷ اگر $n(A) = 6$ ، $n(B) = 5$ ، $n(A \cup B) = 9$ و $n(U) = 14$ باشد، به کمک نمودار ون حاصل هر یک از موارد خواسته شده را بیابید.

(راهنمایی: $n(A \cap B)$ را روی نمودار X بنواز.)

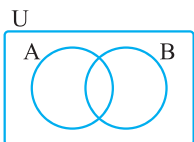
آ) $n(A \cap B) =$

ب) $n(A' \cup B') =$

پ) $n(A' \cap B') =$

ت) $n(A' \cap B) =$

ث) $n(B' - A') =$



۳۸ اگر A و B مجزا، A و C نیز مجزا باشند، کدام گزینه لزوماً صحیح است؟

۲) A و $(B \cup C)$ مجزا

۱) B و C مجزا

۴) $B \cap C \neq \emptyset$

۳) $A \cap (B \cup C) \neq \emptyset$

۳۹ مجموعه A دارای ۱۵، B دارای ۱۲ و $A \cap B$ دارای ۵ عضو می‌باشد. اگر ۵ عضو از مجموعه A حذف کنیم، ۳ عضو از اشتراک آن‌ها حذف

می‌شود. تعداد اعضای اجتماع مجموعه جدید A و مجموعه B چه قدر است؟

۴) ۱۹

۳) ۱۸

۲) ۱۷

۱) ۱۶

۴۰ اگر دو مجموعه غیر تهی و با پایان A و B طوری باشند که تعداد اعضای $A \cap B$ و $A \cup B$ برابر باشند، الزاماً کدام نتیجه‌گیری صحیح است؟

۴) $A \cap B = \emptyset$

۳) $A = B$

۲) $n(A) = n(B)$ ، $A \neq B$

۱) $n(A) \neq n(B)$ ، $A \neq B$

۴۱ در یک کلاس ۲۵ نفری، ۱۸ نفر به ریاضی و ۱۷ نفر به فیزیک علاقمندند. حداقل چند نفر به هر دو درس علاقمندند؟

۴) ۲

۳) ۵

۲) ۱۰

۱) ۱۵