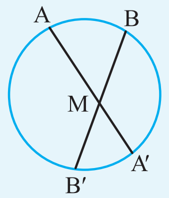
درس دوم — رابطه‌های طولی در دایره

بخش اول: روابط طولی و مماس در دایره

قضیه از نقطهٔ M درون یک دایره دو وتر دلخواه AA' و BB' را رسم می‌کنیم.

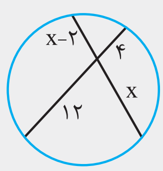
آن‌گاه $MA.MA' = MB.MB'$ (نهایی- دی ۹۵، خرداد ۹۵ و خرداد ۹۲)

(راهنمایی: از A به B' و از B به A' وصل کنید.)



اثبات ....

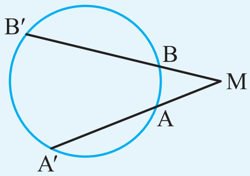
مثال در شکل مقابل مقدار x را بیابید. (نهایی- خرداد ۹۶)



پاسخ ....

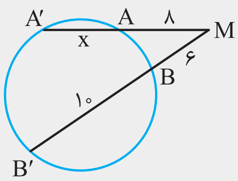
قضیه اگر امتداد وترهای AA' و BB' از یک دایره یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند،

آن‌گاه: $MA.MA' = MB.MB'$ (نهایی- خرداد ۹۴)



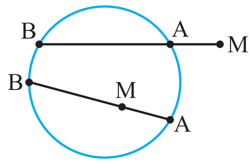
اثبات ....

مثال مقدار x را در شکل مقابل بیابید. (مشابه نهایی- شهریور ۹۰)



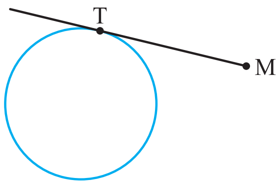
پاسخ ....

قطعه‌های قاطع در دایره



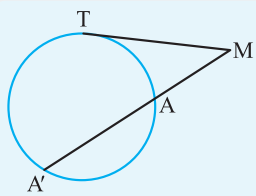
مطابق شکل اگر از نقطهٔ M داخل یا خارج یک دایره، قاطعی رسم کنیم تا دایره را در نقاط A و B قطع کند، پاره‌خط‌های MA و MB را دو قطعهٔ قاطع یا قطعه‌های قاطع می‌گوییم.

قطعهٔ مماس در دایره



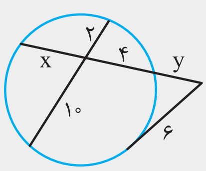
مطابق شکل اگر از نقطهٔ M خارج دایره، مماسی بر دایره رسم کرده و نقطهٔ تماس خط و دایره را T بنامیم، پاره‌خط MT را قطعهٔ مماس گوییم.

قضیه **مطابق شکل اگر از نقطهٔ M خارج دایره یک مماس و یک قاطع نسبت به دایره رسم کنیم، آن‌گاه مربع اندازهٔ قطعهٔ مماس برابر است با حاصل‌ضرب اندازهٔ دو قطعهٔ قاطع. به عبارت دیگر قطعهٔ مماس واسطهٔ هندسی بین دو قطعهٔ قاطع است. $MT^2 = MA.MA'$** (نهایی- خرداد ۹۳)



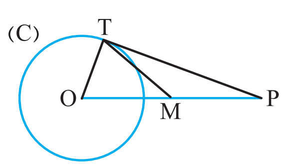
اثبات

مثال در شکل مقابل y را بیابید. (نهایی- شهریور ۹۳)



پاسخ

رسم خط مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج دایره

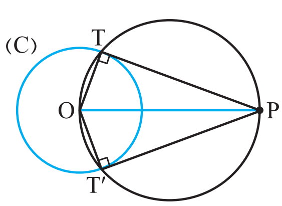


مطابق شکل فرض کنید از نقطهٔ P، مماس PT بر دایرهٔ C(O،R) رسم شده است.

آ) مثلث $O\hat{T}P$ در رأس T قائم‌الزاویه است. زیرا:

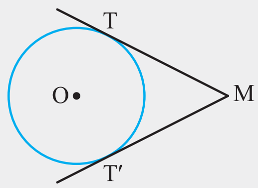
ب) اگر نقطهٔ M را وسط OP در نظر بگیریم، آن‌گاه $MT = MP = MO$. زیرا:

پس دایره به مرکز M و قطر OP از نقطهٔ T می‌گذرد.



پ) بنابراین برای رسم خط مماس بر دایره از نقطهٔ P خارج دایره، ابتدا دایره‌ای به قطر OP رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد این دایره با دایرهٔ (C) را T و T′ می‌نامیم. خط‌های PT و PT′ بر دایرهٔ (C) مماس‌اند. زیرا:

مثال دو خط MT و MT' در نقطه‌های T و T' بر دایرهٔ $C(O,R)$ مماس‌اند. ثابت کنید:



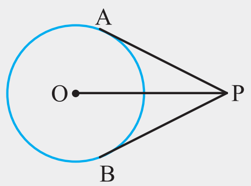
آ) طول دو قطعهٔ مماس با هم برابر است. (نهایی- شهریور ۹۵ و ۹۳)

پاسخ

ب) خط OM نیمساز زاویه‌های TMT' و TOT' است.

پاسخ

مثال در شکل مقابل، O مرکز دایره و PO برابر ۴ و شعاع دایره برابر ۲ واحد است.



آ) طول مماس PA را بیابید.

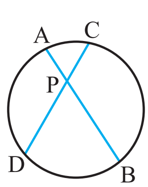
پاسخ

ب) زاویهٔ بین دو مماس را تعیین کنید.

پاسخ

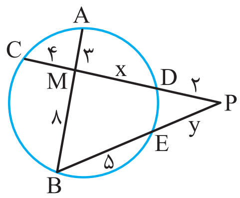
تمرین در منزل

۳۹ در شکل روبه‌رو نقطهٔ P بر وتر AB به طول ۱۶ واحد از دایره چنان قرار دارد که آن وتر را به نسبت ۱ به ۳ تقسیم کرده است. اگر طول وتر CD برابر ۱۴ واحد باشد. طول PC چقدر است؟ (مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

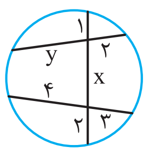


۴۰ از نقطهٔ M خارج از یک دایره مماس MT به طول ۶ را بر آن رسم می‌کنیم. هم‌چنین از M قاطعی رسم می‌کنیم تا دایره را در نقاط A و B قطع کند. اگر $AB = ۵$، طول‌های MA و MB را بیابید. (مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

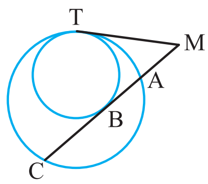
۴۱ در شکل روبه‌رو مقادیر x و y را بیابید.



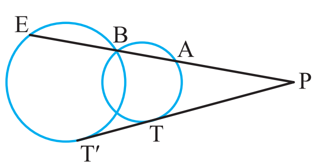
۴۲ در شکل مقابل مقادیر x و y را بیابید.



۴۳ در شکل مقابل، دو دایره مماس داخل‌اند. اگر $MA = ۴$ و $AC = ۸$ باشد، طول MB را بیابید.

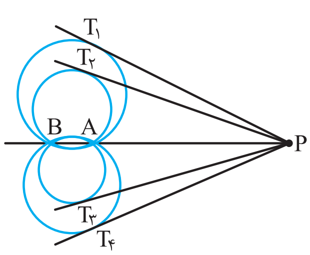


۴۴ در شکل مقابل، $PT = ۳TT'$ و $PA = ۹$. طول AE را محاسبه کنید.



۴۵ مطابق شکل، AB وتر مشترک همهٔ دایره‌ها است. اگر از نقطهٔ P واقع بر امتداد وتر مشترک، مماس‌هایی بر دایره‌ها رسم کنیم، نشان دهید نقاط تماس $T_۱$، $T_۲$، $T_۳$ و $T_۴$ و ... همگی روی یک دایره قرار دارند.

(مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

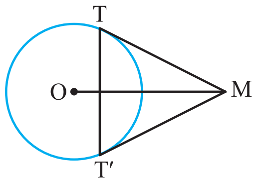


۴۶ دایرهٔ $C(O,R)$ و نقطهٔ M واقع در خارج این دایره داده شده‌اند، از نقطهٔ M بر این دایره دو مماس رسم کنید. (مراحل رسم را توضیح دهید.)

(نهایی- خرداد ۹۴)

۴۷ زاویهٔ بین دو مماس رسم شده از نقطهٔ A بر دایرهٔ $C(O,9)$ برابر 60° است. طول دو قطعهٔ مماس و فاصلهٔ مرکز دایره از نقطهٔ A را بیابید.

۴۸ در شکل مقابل شعاع دایره برابر ۳ و فاصلهٔ M از مرکز دایره برابر ۶ است. (مشابه نهایی- خرداد ۹۳)



آ) طول مماس‌های MT و MT′ را بیابید.

ب) طول وتر TT′ را به‌دست آورید.

پ) اندازهٔ زاویهٔ TMT′ را مشخص کنید.

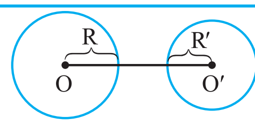
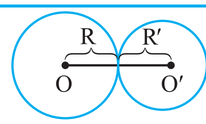
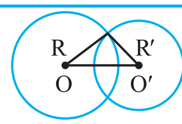
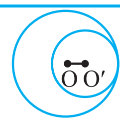
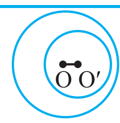
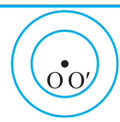
یادداشت

درس دوم
رابطه‌های طولی در دایره

بخش دوم: وضعیت دو دایره، مماس مشترک، مساحت و محیط در دایره

بررسی وضعیت دو دایره نسبت به هم

دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ نسبت به هم دارای شش وضعیت می‌باشند که با فرض خط‌المرکزین $(OO'=d)$ به شرح زیر است:

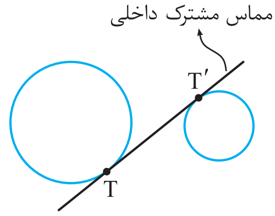
متخارج (بیرون هم)		$d>R+R'$
مماس خارج		$d=R+R'$
متقاطع		$\lvert R-R'\rvert<d<R+R'$
مماس داخل		$d=\lvert R-R'\rvert$
متداخل (یکی درون دیگری)		$d<\lvert R-R'\rvert$
هم‌مرکز		$d=0$

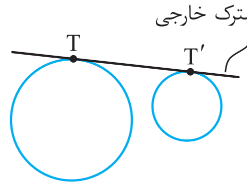
مثال دو دایره به طول شعاع‌های ۸ و ۱۲ واحد و طول خط‌المرکزین ۱۵ واحد نسبت به هم چه وضعی دارند؟

پاسخ

مماس مشترک دو دایره

مماس مشترک دو دایره خطی است که بر هر دو دایره مماس باشد. اگر دو دایره در یک طرف خط مماس باشند، این خط را مماس مشترک خارجی و اگر دو دایره در دو طرف خط مماس باشند، این خط را مماس مشترک داخلی گوییم.

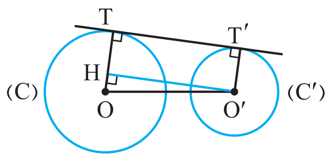




اندازهٔ مماس مشترک دو دایره

اندازهٔ مماس مشترک دو دایره، همان فاصلهٔ بین نقاط تماس دو دایره با خط مماس یعنی (TT') است.

رسم مماس مشترک خارجی دو دایره



دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را با فرض $R>R'$ در نظر می‌گیریم. فرض کنید خط TT' مماس مشترک خارجی این دو دایره باشد. ابتدا شعاع‌های OT و $O'T'$ را رسم می‌کنیم. سپس از نقطهٔ O' خطی موازی TT' رسم می‌کنیم تا OT را در H قطع کند.

آ) چهارضلعی $THO'T'$ مستطیل است. زیرا:

....

....

....

ب) اندازهٔ پاره‌خط OH بر حسب R و R' برابر است با:

....

....

پ) یک دایره به مرکز O و به شعاع OH رسم کنید و آن را C'' بنامید. خط $O'H$ بر این دایره مماس است، زیرا:

....

ت) با توجه به مراحل فوق برای رسم مماس مشترک خارجی دو دایره به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱) دایره‌ای به مرکز O و شعاع $R-R'$ رسم می‌کنیم (دایرهٔ C'').

۲) از نقطهٔ O' مماسی بر دایرهٔ C'' رسم کرده و نقطهٔ تماس را H می‌نامیم.

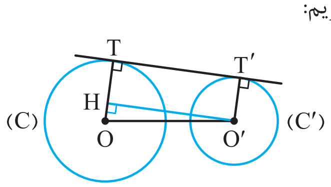
۳) از O به H وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ C را در T قطع کند.

۴) از O' خطی موازی OT رسم می‌کنیم تا دایرهٔ C' را در T' قطع کند.

۵) خط گذرنده از دو نقطهٔ T و T' جواب مسأله است.

محاسبهٔ اندازهٔ مماس مشترک خارجی دو دایره

می‌دانیم $OH=R-R'$ و $O'H=TT'$ است. با فرض $OO'=d$ در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHO' داریم:



$$OO'^2=OH^2+O'H^2 \Rightarrow d^2=(R-R')^2+TT'^2$$

$$\Rightarrow TT'^2=d^2-(R-R')^2 \Rightarrow TT'=\sqrt{d^2-(R-R')^2}$$

مثال **اندازهٔ مماس مشترک خارجی را در دو دایرهٔ $C(O,7)$ و $C'(O',1)$ با فرض $OO'=10$ تعیین کنید.** (نهایی- خرداد ۹۶)

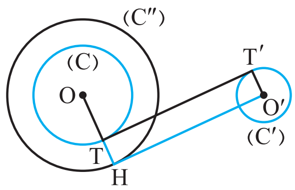
پاسخ ....

....

....

....

رسم مماس مشترک داخلی دو دایره



دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را با فرض $R>R'$ در نظر می‌گیریم. فرض کنید خط TT' مماس مشترک داخلی این دو دایره باشد. ابتدا شعاع‌های OT و $O'T'$ را رسم می‌کنیم. سپس از نقطهٔ O' خطی موازی TT' رسم می‌کنیم تا امتداد OT را در H قطع کند.

آ) چهارضلعی $THO'T'$ مستطیل است. زیرا:

ب) اندازهٔ پاره‌خط OH بر حسب R و R' برابر است با:

پ) یک دایره به مرکز O و به شعاع OH رسم کنید (دایرهٔ C'').

ت) با توجه به مراحل فوق برای رسم مماس مشترک داخلی دو دایره به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱) دایره‌ای به مرکز O و شعاع $R+R'$ رسم می‌کنیم (دایرهٔ C'').

۲) از نقطهٔ O' مماسی بر دایرهٔ C'' رسم کرده و نقطهٔ تماس را H می‌نامیم.

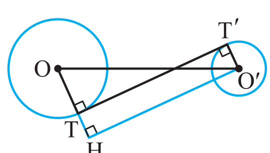
۳) از O به H وصل می‌کنیم تا دایرهٔ C را در T قطع کند.

۴) از O' خطی موازی OT رسم می‌کنیم تا دایرهٔ C' را در T' قطع کند.

۵) خط گذرنده از دو نقطهٔ T و T' جواب مسأله است.

محاسبهٔ اندازهٔ مماس مشترک داخلی دو دایره

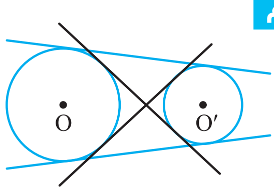
می‌دانیم $OH=R+R'$ و $O'H=TT'$ است. با فرض $OO'=d$ در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHO' داریم:



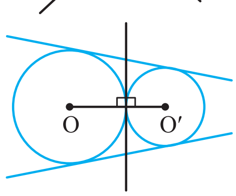
$$OO'^2=OH^2+O'H^2 \Rightarrow d^2=(R+R')^2+TT'^2$$

$$\Rightarrow TT'^2=d^2-(R+R')^2 \Rightarrow TT'=\sqrt{d^2-(R+R')^2}$$

تعداد مماس مشترک‌های داخلی و خارجی دو دایره با توجه به وضعیت دو دایره نسبت به هم



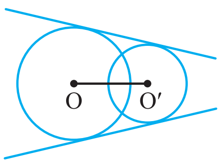
۱- **دو دایرهٔ متخارج:** در این حالت دو دایره دارای دو مماس مشترک داخلی و دو مماس مشترک خارجی می‌باشند.



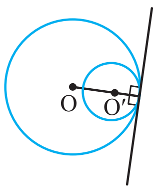
۲- **دو دایرهٔ مماس خارج:** در این حالت دو دایره دارای دو مماس مشترک خارجی و یک مماس مشترک داخلی می‌باشند.

تذکر در این حالت مماس مشترک داخلی بر خط‌المرکزین دو دایره عمود است و اندازهٔ مماس مشترک داخلی برابر صفر است.

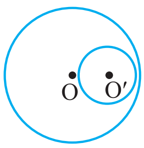
۳- دو دایرهٔ متقاطع: در این حالت دو دایره دارای دو مماس مشترک خارجی‌اند ولی مماس مشترک داخلی ندارند.



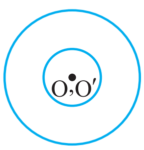
۴- دو دایرهٔ مماس داخل: در این حالت دو دایره فقط یک مماس مشترک خارجی دارند که بر خط‌المرکزین آن‌ها عمود و طول آن برابر صفر است.



۵- دو دایرهٔ متداخل: در این حالت دو دایره هیچ مماس مشترکی ندارند.



۶- دو دایرهٔ هم‌مرکز: در این حالت نیز دو دایره هیچ مماس مشترکی ندارند.



مثال **اگر دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ مماس خارج باشند.**

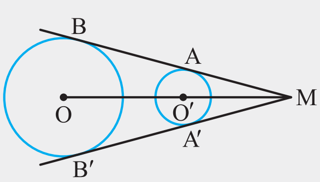
آ) نشان دهید طول مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر است با $TT'=2\sqrt{RR'}$

پاسخ

ب) تعداد مماس مشترک‌های داخلی و خارجی دو دایره را با رسم شکل مشخص کنید.

پاسخ

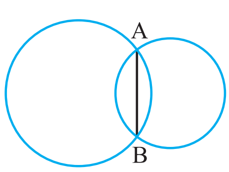
مثال **در شکل روبه‌رو نشان دهید نقطهٔ تقاطع مماس مشترک‌های خارجی روی امتداد خط‌المرکزین دو دایره است.**



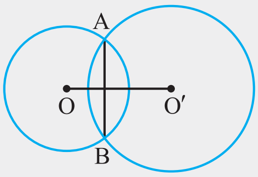
پاسخ

وتر مشترک دو دایرهٔ متقاطع

پاره‌خطی که نقاط تقاطع دو دایرهٔ متقاطع را به هم وصل می‌کند، وتر مشترک دو دایرهٔ متقاطع گوییم. مانند AB در شکل روبه‌رو:

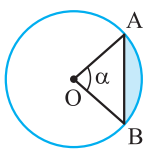


مثال در شکل مقابل دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ مفروض‌اند. ثابت کنید OO' عمودمنصف AB است.



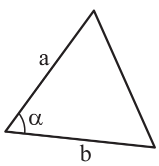
پاسخ

محاسبهٔ مساحت قطعه در یک دایره



برای این منظور کافی است مساحت قطاع OAB را یافته و مساحت مثلث OAB را از آن کم کنیم. پس داریم:

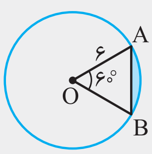
$$\text{مساحت قطعه} = (\text{مساحت قطاع } OAB) - (\text{مساحت مثلث } OAB) = \pi R^{۲}\left(\frac{\alpha^\circ}{۳۶۰^\circ}\right) - \frac{۱}{۲}R^{۲}\sin\alpha$$



یادآوری اگر از مثلثی دو ضلع و زاویهٔ بین آن دو ضلع معلوم باشد، مساحت مثلث برابر است با:

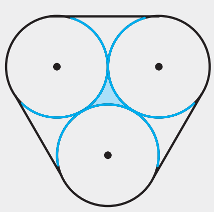
$$S = \frac{۱}{۲}ab\sin\alpha$$

مثال در شکل مقابل دایره به مرکز O و شعاع ۶ سانتی‌متر مفروض است. اگر زاویهٔ AOB برابر ۶۰° باشد، مساحت قطعهٔ رنگ‌شده را محاسبه کنید. (مشابه تمرین ۸ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)



پاسخ

مثال در شکل مقابل سه دایره به شعاع ۳ دوبه‌دو بر هم مماس‌اند. (مشابه تمرین ۶ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)



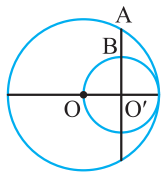
آ) طول نخی که دور آن‌ها پیچیده شده را بیابید. (راهنمایی: مرکز دایره‌ها را به هم و به نقاط تماس وصل کنید.)

پاسخ

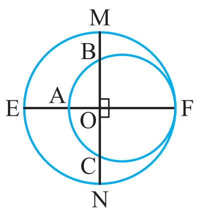
ب) مساحت ناحیهٔ رنگ‌شده را محاسبه کنید.

پاسخ

تمرین در منزل



۴۹ در شکل روبه‌رو دو دایره به مرکزهای O و O′ مماس داخلی‌اند. اگر AO′ عمود بر OO′ و $AB = \sqrt{۳} - ۱$ باشد، شعاع دایرهٔ کوچک‌تر را بیابید.



۵۰ در شکل روبه‌رو دو قطر MN و EF از دایرهٔ بزرگ‌تر بر هم عمـود و دو دایـره مماس داخل‌انـد. اگـر $AE = ۱۶$ و $BM = ۱۰$ باشد، شعاع دایرهٔ کوچک‌تر را به‌دست آورید.

(مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

۵۱ دو دایره مماس داخل‌اند. اگر مساحت ناحیهٔ محدود بین دو دایره برابر ۳۶π و طول خط‌المرکزین آن‌ها برابر ۲ باشد. مطلوب است:

آ) اندازهٔ شعاع‌های دو دایره

(مشابه تمرین ۷ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

ب) اندازهٔ بزرگ‌ترین وتر از دایرهٔ بزرگ‌تر که بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس باشد.

۵۲ دو دایره به شعاع‌های ۹ و ۴ سانتی‌متر، مماس برون هستند. مقدار x را چنان بیابید که اندازهٔ مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر $۵x + ۲$ باشد.

(مشابه نهایی- دی ۹۵ و خرداد ۹۳)

۵۳ مقدار x را چنان بیابید که اندازهٔ مماس مشترک داخلی دو دایره به شعاع‌های ۲ و ۳ و خط‌المرکزین $d = 5x - 7$ برابر ۱۲ باشد.

۵۴ دو دایره به شعاع‌های ۲ سانتی‌متر و ۷ سانتی‌متر و خط‌المرکزین برابر $2x + 1$ سانتی‌متر مفروض‌اند. اگر اندازهٔ مماس مشترک خارجی آن‌ها برابر $2x$ سانتی‌متر باشد. مطلوب است:

(مشابه نهایی- خرداد ۹۶)

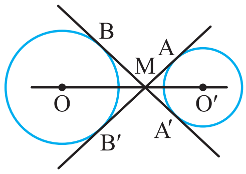
آ) مقدار x

ب) وضعیت دو دایره نسبت به هم

پ) تعداد مماس مشترک‌های داخلی و خارجی دو دایره با رسم شکل

۵۵ دو دایرهٔ متقاطع به شعاع‌های ۲ و ۹ مفروض‌اند. اگر شعاع‌های گذرنده از نقطهٔ تقاطع بر هم عمود باشند، طول مماس مشترک و وتر مشترک آن‌ها را بیابید.

۵۶ ثابت کنید مماس مشترک‌های داخلی دو دایره در نقطه‌ای روی خط‌المرکزین متقاطع‌اند.

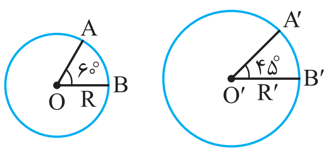


۵۷ اندازهٔ مماس مشترک‌های داخلی و خارجی دو دایره به خط‌المرکزین $d = 10$ به ترتیب ۶ و ۸ می‌باشد. اندازهٔ شعاع‌های دو دایره را محاسبه کنید.

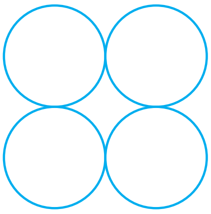
(مشابه تمرین ۵ صفحهٔ ۲۳ کتاب درسی)

۵۸ دو دایرهٔ مماس برون به شعاع‌های $R_1 = 8$ و $R_2 = 2$ مفروض‌اند. اگر TT' مماس مشترک و O و O' مرکزهای دو دایره باشند، مساحت چهارضلعی $OO'T'T$ چقدر است؟

۵۹ مطابق شکل طول کمان AB با طول کمان $A'B'$ برابر است. نسبت مساحت‌های دو دایره را محاسبه کنید.



۶۰ چهار دایرهٔ مساوی به شعاع R مطابق شکل برهم مماس‌اند. مطلوب است:

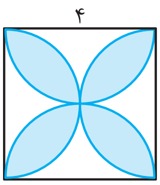


آ) طول نخی که دور آن‌ها بسته شود.

ب) مساحت محصور بین چهار دایره

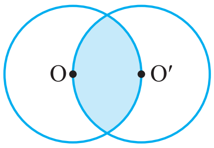
پ) شعاع دایره‌ای که با چهار دایره مماس خارجی است.

۶۱ در شکل روبه‌رو چهار نیم‌دایره به قطر اضلاع مربع رسم کرده‌ایم. مساحت ناحیهٔ رنگ‌شده را بیابید.



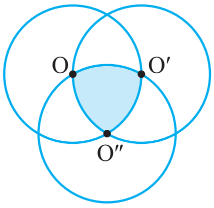
۶۲ دو دایره به شعاع R مطابق شکل مفروض‌اند. مساحت قسمت رنگ‌شده را محاسبه کنید. (راهنمایی: مرکز دو دایره را به هم و به نقاط تقاطع وصل کنید.)

(ویژهٔ علاقمندان)



۶۳ سه دایره به شعاع R مطابق شکل مفروض‌اند.

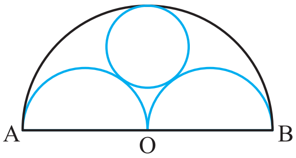
(ویژهٔ علاقمندان)



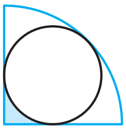
آ طول نخی که دور سه دایره کشیده می‌شود را محاسبه کنید.

ب مساحت قسمت رنگ‌شده را بیابید.

۶۴ در شکل مقابل $OA = OB = ۳$ ، شعاع دایره‌ای که بر سه نیم‌دایره مماس شده است را بیابید.



۶۵ مطابق شکل در ربع‌دایره‌ای به شعاع $\sqrt{۲}+۱$ یک دایره محاط شده است. مطلوب است:



آ اندازهٔ شعاع دایره

ب مساحت ناحیهٔ رنگ‌شده

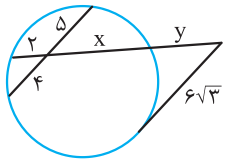
تست‌های نمونه

۶۶ طول مماس مشترک خارجی دو دایرهٔ مماس، $\sqrt{۲}$ برابر شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر است. شعاع دایرهٔ بزرگ‌تر چند برابر شعاع دایرهٔ کوچک‌تر است؟ (سراسری- ۸۱)

۱) $\sqrt{۲}$ ۲) ۱/۵ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۲

۶۷ در شکل مقابل مقدار y کدام است؟ (سراسری- ۸۵)

۱) ۶ ۲) ۷/۵ ۳) ۸ ۴) ۹

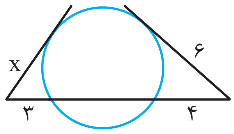


۶۸ اندازهٔ مماس مشترک خارجی دو دایره به شعاع‌های ۱۴ و ۶ واحد برابر ۱۵ واحد است. خط‌المرکزین این دو دایره چند واحد است؟ (سراسری- ۹۱)

۱) $۱۲\sqrt{۲}$ ۲) ۱۸ ۳) ۱۷ ۴) $۷\sqrt{۶}$

۶۹ در شکل مقابل، اندازهٔ x چند واحد است؟ (سراسری- ۹۱)

۱) $۳\sqrt{۲}$ ۲) ۵ ۳) $۲\sqrt{۶}$ ۴) $۲\sqrt{۵}$



۷۰ دو دایره به شعاع‌های ۴ و ۱۰/۵ واحد مماس برون‌اند. از مرکز دایرهٔ کوچک‌تر، مماسی بر دایرهٔ بزرگ‌تر رسم می‌کنیم. طول این قطعهٔ مماس چقدر است؟ (سراسری- ۹۲)

۱) ۸ ۲) $۳\sqrt{۵}$ ۳) $۴\sqrt{۶}$ ۴) ۱۰

۷۱ در دایره‌ای به قطر ۱۲ واحد، فاصلهٔ مرکز دایره از وتر AB برابر ۲ واحد است. نقطهٔ C در امتداد AB به فاصلهٔ $CB = ۲\sqrt{۲}$ انتخاب شده است، طول قطعهٔ مماسی که از C بر دایره رسم شود کدام است؟ (سراسری خارج از کشور- ۹۲)

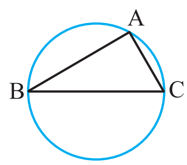
۱) $۲\sqrt{۱۰}$ ۲) $۳\sqrt{۵}$ ۳) ۷ ۴) $۵\sqrt{۲}$

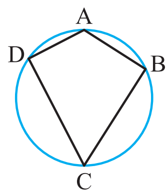
درس سوم
چندضلعی‌های محاطی و محیطی

بخش اول: چندضلعی‌های محاطی و محیطی و دایره‌های محاطی مثلث

چندضلعی محاطی

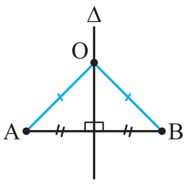
اگر همهٔ رأس‌های یک چندضلعی روی یک دایره قرار داشته باشند، آن چندضلعی را محاطی و دایره را محیطی گوییم. مانند مثلث ABC و چهارضلعی $ABCD$.



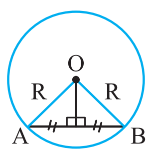


یادآوری ۱- می‌دانیم هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک فاصله است و بر عکس. مطابق شکل روبه‌رو خط Δ عمودمنصف پاره‌خط AB است. پس داریم:

$$O \in \Delta \Leftrightarrow OA = OB$$



۲- اگر دایره‌ای از دو نقطهٔ A و B بگذرد، مرکز دایره از آن دو نقطه به یک فاصله است $(OA = OB)$. پس مرکز دایره روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد (مطابق شکل).

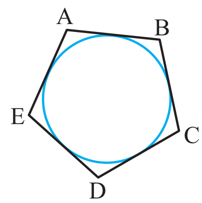


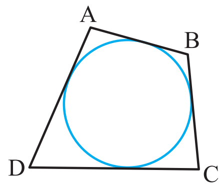
مثال ثابت کنید اگر عمودمنصف‌های همهٔ ضلع‌های یک چندضلعی در یک نقطه همرس باشند آن چندضلعی محاطی است و بر عکس.

اثبات

چندضلعی محیطی

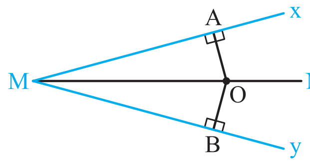
هرگاه همهٔ ضلع‌های یک چندضلعی بر یک دایره مماس باشند، چندضلعی را محیطی و دایره را محاطی گوییم. مانند چهارضلعی ABCD و پنج‌ضلعی ABCDE.



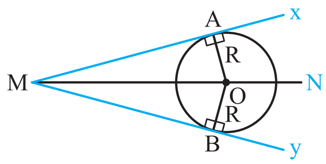


یادآوری ۱- می‌دانیم هر نقطه واقع بر نیمساز یک زاویه از دو ضلع زاویه به یک فاصله است و بر عکس. مطابق شکل MN نیمساز زاویهٔ xMy است. پس داریم:

$$O \in MN \Leftrightarrow OA = OB$$



۲- مطابق شکل دایره $C(O,R)$ بر اضلاع زاویهٔ xMy مماس است. از آن‌جا که $OA = OB = R$ پس مرکز دایره از دو ضلع زاویهٔ xMy به یک فاصله است. در نتیجه مرکز دایره روی نیمساز زاویهٔ xMy قرار دارد.



مثال ثابت کنید اگر تمام نیمسازهای زاویه‌های داخلی یک چندضلعی در یک نقطه همرس باشند، آن چندضلعی محیطی است و بر عکس.

اثبات

مثال یک n ضلعی با محیط ۲P و مساحت S بر دایره‌ای به شعاع r محیط است. ثابت کنید $r = \frac{S}{P}$.

(راهنمایی: از مرکز دایره به همهٔ رئوس n ضلعی وصل کنید.)

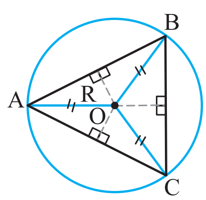
پاسخ

مثال یک لوزی با طول قطرهای ۶ و ۸ سانتی‌متر بر دایره‌ای محیط است. شعاع این دایره را محاسبه کنید.

پاسخ

دایرهٔ محیطی مثلث

می‌دانیم که سه عمودمنصف اضلاع هر مثلث همرس‌اند و نقطهٔ همرسی آن‌ها تنها نقطه‌ای است که از سه رأس مثلث به یک فاصله است. اگر نقطهٔ همرسی سه عمودمنصف اضلاع مثلث ABC را O فرض کنیم، دایره‌ای که به مرکز O و شعاع OA رسم شود از هر سه نقطهٔ A ، B و C می‌گذرد. این دایره را دایرهٔ محیطی مثلث گوییم. پس هر مثلث همواره قابل محاط شدن در یک دایره است.



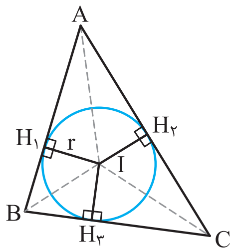
$OA = OB = OC = R$

مثال ثابت کنید در هر مثلث نیمساز هر رأس و عمودمنصف ضلع مقابل به آن رأس، روی دایرهٔ محیطی مثلث یکدیگر را قطع می‌کنند.

(مشابه تمرین ۳ صفحهٔ ۲۹ کتاب درسی)

پاسخ

دایرهٔ محاطی داخلی مثلث



$IH_1 = IH_2 = IH_3 = r$

می‌دانیم که نیمسازهای زاویه‌های داخلی هر مثلث همرس‌اند و نقطهٔ همرسی آن‌ها از سه ضلع مثلث به یک فاصله است. اگر نقطهٔ همرسی سه نیمساز داخلی را I فرض کنیم، دایره‌ای که به مرکز I و شعاع فاصلهٔ I از یکی از اضلاع مثلث رسم شود بر هر سه ضلع مثلث مماس است. این دایره را دایرهٔ محاطی داخلی مثلث گوییم. پس هر مثلث همواره قابل محیط شدن بر یک دایره است.

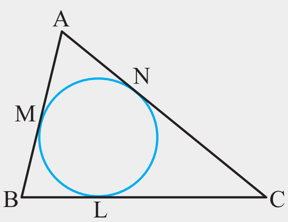
تذکر شعاع دایرهٔ محاطی داخلی هر مثلث نیز مانند شعاع دایرهٔ محاطی n ضلعی برابر است با $r = \frac{S}{P}$

مثال شعاع دایرهٔ محاطی داخلی یک مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع ۴ را محاسبه کنید.

پاسخ

مثال اگر نقاط تماس دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC با اضلاع $AB = c$ ، $AC = b$ و $BC = a$ را با M ، N و L نشان دهیم و محیط مثلث $2P$ باشد، ثابت کنید: (مشابه تمرین ۶ صفحهٔ ۳۰ کتاب درسی)

$$\begin{cases} AM = AN = P - a \\ BM = BL = P - b \\ CN = CL = P - c \end{cases}$$



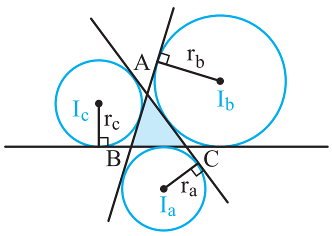
پاسخ

مثال نشان دهید در هر مثلث نیمسازهای دو زاویهٔ خارجی با نیمساز داخلی زاویهٔ سوم همرس‌اند.

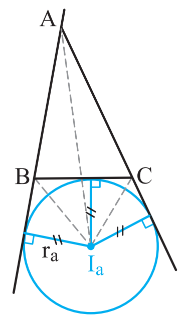
پاسخ

دایره‌های محاطی خارجی مثلث

می‌دانیم در هر مثلث نیمسازهای دو زاویهٔ خارجی با نیمساز داخلی زاویهٔ سوم همرس‌اند. این نقطه خارج مثلث است و از سه ضلع مثلث به یک فاصله است. اگر نقطهٔ همرسی را مطابق شکل (۱) I_a فرض کنیم، دایره‌ای که به مرکز I_a و شعاع r_a رسم می‌شود بر یک ضلع و امتداد دو ضلع دیگر مثلث مماس است. این دایره را دایرهٔ محاطی خارجی نظیر رأس A از مثلث گوییم. هر مثلث سه دایرهٔ محاطی خارجی دارد (شکل ۲).



شکل (۲)



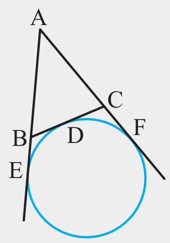
شکل (۱)

مثال شعاع یکی از دایره‌های محاطی خارجی مثلث ABC به مساحت S و محیط $2P$ را محاسبه کنید.

پاسخ

مثال در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، $\widehat{A} = ۹۰^\circ$، $AB = ۶$ و $AC = ۸$. شعاع دایرهٔ محاطی داخلی و شعاع‌های دایره‌های محاطی خارجی را محاسبه کنید.

پاسخ

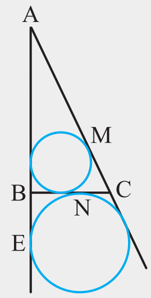


مثال اگر نقاط تماس دایرهٔ محاطی خارجی مثلث ABC با ضلع BC و امتداد اضلاع AB و AC را با D، E و F نشان دهیم. ثابت کنید:

(مشابه تمرین ۶ صفحهٔ ۳۰ کتاب درسی)

$$\begin{cases} AE = AF = P \\ BD = BE = P - c \\ CD = CF = P - b \end{cases}$$

پاسخ



مثال در مثلث ABC، $AB = ۵$، $BC = ۳$ و $AC = ۶$ است. نسبت $\frac{AM + AE}{BN}$ را بیابید.

پاسخ

تمرین در منزل

۷۲ نشان دهید اگر عمودمنصف‌های سه ضلع از یک چهارضلعی همرس باشند، این چهارضلعی محاطی است.

۷۳ نشان دهید اگر سه نیمساز داخلی یک چهارضلعی همرس باشند، این چهارضلعی محیطی است.

۷۴ ثابت کنید در هر مثلث ABC نیمساز زاویهٔ A، زاویهٔ بین قطر دایرهٔ محیطی و ارتفاع نظیر رأس A را نیز نصف می‌کند.

۷۵ در مثلث متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $۴\sqrt{۳}$ واحد، طول خط‌المرکزین دو دایرهٔ محیطی و محاطی خارجی آن را بیابید.

۷۶ در یک مثلث متساوی‌الساقین طول قاعده ۶ واحد و طول ارتفاع وارد بر قاعده برابر ۴ واحد است. طول شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث را بیابید.

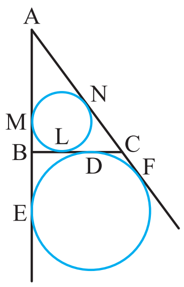
۷۷ اگر شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC را با r، شعاع‌های سه دایرهٔ محاطی خارجی مثلث را با r_a، r_b و r_c و ارتفاع‌های مثلث را با h_a، h_b و h_c نشان دهیم، ثابت کنید: (مشابه تمرین ۵ صفحه‌های ۲۹ و ۳۰ کتاب درسی)

آ) $\frac{1}{r_a}+\frac{1}{r_b}+\frac{1}{r_c}=\frac{1}{r}$

ب) $\frac{1}{h_a}+\frac{1}{h_b}+\frac{1}{h_c}=\frac{1}{r}$

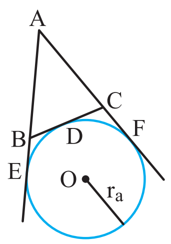
۷۸ ثابت کنید شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلث قائم‌الزاویه‌ای که طول ضلع‌های زاویهٔ قائمهٔ آن a و b و طول وترش c باشد، برابر با $\frac{a+b-c}{2}$ است.

۷۹ دایرهٔ محاطی داخلی مثلث قائم‌الزاویه‌ای وتر آن را به دو پاره‌خط به طول‌های ۶ و ۹ تقسیم کرده است. طول ضلع‌های زاویهٔ قائمهٔ این مثلث را بیابید.



۸۰ مطابق شکل در مثلث ABC دایرهٔ محاطی داخلی و دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع BC رسم شده است. با فرض $b > c$ ثابت کنید:

$$\begin{cases} BL = CD \\ ME = NF = a \\ LD = b - c \end{cases}$$



۸۱ مطابق شکل ضلع BC در نقطهٔ D بر دایره به مرکز O مماس است. ثابت کنید با تغییر مکان نقطهٔ D روی دایره بین دو نقطهٔ ثابت E و F، محیط مثلث ABC ثابت ولی مساحت آن متغیر است. (نهایی- دی ۹۲ و خرداد ۹۰)

یادداشت

درس سوم — چندضلعی‌های محاطی و محیطی

بخش دوم: چهارضلعی‌های محاطی و محیطی و n ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی

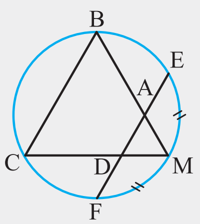
قضیه در هر چهارضلعی محاطی، زاویه‌های روبه‌رو مکمل یکدیگرند و برعکس. (نهایی- خرداد ۹۶)

اثبات

مثال دو زاویهٔ مجاور یک چهارضلعی محاطی 80° و 120° است. قدرمطلق تفاضل دو زاویهٔ دیگر را بیابید.

پاسخ

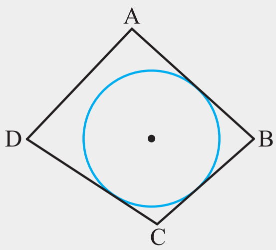
مثال در شکل مقابل، M وسط کمان EF است، ثابت کنید چهارضلعی ABCD محاطی است.



پاسخ

مثال چهارضلعی محدب ABCD مفروض است، ثابت کنید دایره‌ای وجود دارد که همواره بر سه ضلع AB ، BC و CD مماس باشد.

پاسخ



قضیه یک چهارضلعی محیطی است اگر و فقط اگر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل برابر مجموع اندازه‌های دو ضلع مقابل دیگر باشد.
(نهایی- خرداد ۹۲)

اثبات

مثال مشخص کنید کدام‌یک از چهارضلعی‌های زیر محاطی و کدام‌یک محیطی است. دلیل خود را بیان کنید.

۱) متوازی‌الاضلاع

۲) مستطیل

۳) لوزی

۴) مربع

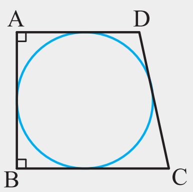
۵) ذوزنقه

۶) ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین

۷) کایت

پاسخ

مثال ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD بر دایره‌ای به شعاع ۳، محیط است. اگر $CD = ۹$ باشد، محیط و مساحت ذوزنقه را بیابید.



پاسخ

مثال یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین با قاعده‌هایی به طول‌های a و b بر دایره‌ای به شعاع R محیط است. ثابت کنید:

آ) طول ساق برابر است با $\frac{a+b}{۲}$ (مشابه تمرین ۴ صفحهٔ ۲۹ کتاب درسی)

پاسخ

ب) شعاع دایره برابر است با $\frac{۱}{۲}\sqrt{ab}$

پاسخ

پ) مساحت ذوزنقه برابر است با $(\frac{a+b}{۲})\sqrt{ab}$

پاسخ

چندضلعی‌های منتظم

یک چندضلعی محدب را منتظم گوییم هرگاه همهٔ اضلاع آن با هم و همهٔ زاویه‌های آن نیز با هم مساوی باشند. مانند مثلث متساوی‌الاضلاع و مربع.

اندازهٔ زاویه‌های n ضلعی منتظم

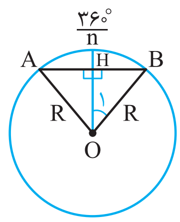
هر زاویهٔ درونی n ضلعی منتظم برابر $\frac{(n-۲)۱۸۰^\circ}{n}$ و هر زاویهٔ بیرونی برابر $\frac{۳۶۰^\circ}{n}$ است.

مثال **ثابت کنید هر n ضلعی منتظم قابل محاط شدن در یک دایره و قابل محیط شدن بر یک دایرهٔ دیگر است.**

اثبات

محاسبهٔ اندازهٔ ضلع، محیط و مساحت در n ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی

آ) n ضلعی منتظم محاطی



هر n ضلعی منتظم یک دایره را به n کمان مساوی به اندازهٔ $\frac{360^\circ}{n}$ تقسیم می‌کند. فرض کنید AB یکی از اضلاع n ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع R باشد. از مرکز دایره بر وتر AB عمود می‌کنیم. می‌دانیم قطر عمود بر وتر، آن وتر و کمان‌های نظیر آن را نصف می‌کند. پس داریم:

$$\text{مرکزی}\quad A\hat{O}B=\frac{360^\circ}{n}\Rightarrow \hat{O}_1=\frac{180^\circ}{n}$$

$$\Rightarrow \sin\hat{O}_1=\frac{HB}{OB}\Rightarrow \sin\frac{180^\circ}{n}=\frac{HB}{R}\Rightarrow HB=R\sin\frac{180^\circ}{n}\Rightarrow \boxed{\mathbf{AB=2R\sin\frac{180^\circ}{n}}}$$

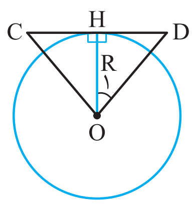
حال اگر P_n و S_n به ترتیب محیط و مساحت n ضلعی منتظم محاطی باشند، داریم:

$$\boxed{\mathbf{P_n=n.AB=2nR\sin\frac{180^\circ}{n}}}$$

$$S_{\overset{\Delta}{OAB}}=\frac{1}{2}OA.OB.\sin A\hat{O}B=\frac{1}{2}R^2\sin\frac{360^\circ}{n}$$

$$S_n=n.S_{\overset{\Delta}{OAB}}\Rightarrow \boxed{\mathbf{S_n=\frac{n}{2}R^2\sin\frac{360^\circ}{n}}}$$

ب) n ضلعی منتظم محیطی



فرض کنید CD یکی از اضلاع n ضلعی منتظم محیطی است.

$$\tan\hat{O}_1=\frac{HD}{OH}\Rightarrow \tan\frac{180^\circ}{n}=\frac{HD}{R}\Rightarrow HD=R\tan\frac{180^\circ}{n}\Rightarrow \boxed{\mathbf{CD=2R\tan\frac{180^\circ}{n}}}$$

حال اگر P'_n و S'_n به ترتیب محیط و مساحت n ضلعی منتظم محیطی باشند، داریم:

$$\boxed{\mathbf{P'_n=n.CD=2nR\tan\frac{180^\circ}{n}}}$$

$$S_{\overset{\Delta}{OCD}}=\frac{1}{2}OH.CD=\frac{1}{2}R.2R\tan\frac{180^\circ}{n}=R^2\tan\frac{180^\circ}{n}$$

$$S'_n=n.S_{\overset{\Delta}{OCD}}\Rightarrow \boxed{\mathbf{S'_n=nR^2\tan\frac{180^\circ}{n}}}$$

مثال مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایره‌ای به شعاع R را بیابید. (مشابه تمرین ۲ صفحهٔ ۳۹ کتاب درسی)

پاسخ

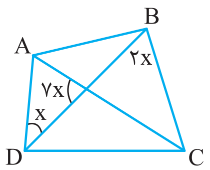
مثال طول ضلع و مساحت شش‌ضلعی منتظم محیط بر دایره‌ای به شعاع ۲ را بیابید.

پاسخ

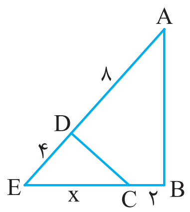
تمرین در منزل

۸۲ ثابت کنید اگر یک ذوزنقه محاطی باشد، آن‌گاه متساوی‌الساقین است و بر عکس. (مشابه تمرین ۱ صفحهٔ ۲۹ کتاب درسی)

۸۳ در شکل مقابل چهارضلعی ABCD محاطی است. مقدار x را بیابید.



۸۴ در شکل مقابل چهارضلعی ABCD محاطی است. مقدار x را بیابید.



۸۵ نیمسازهای زاویه‌های درونی یک چهارضلعی محدب را رسم می‌کنیم. ثابت کنید چهارضلعی که از برخورد این نیمسازها به‌وجود می‌آید محاطی است.