

فصل

۳

# توابع نمایی و لگاریتمی

در این فصل خواهیم خواند:

- ← درس اول: تابع نمایی
- ← درس دوم: تابع لگاریتمی و لگاریتم
- ← درس سوم: ویژگی‌های لگاریتم و حل معادله‌های لگاریتمی



در کشت یک نوع باکتری ۲۰۰۰ باکتری موجود است. تعداد باکتری‌ها در هر ساعت ۳ برابر می‌شود. تابعی که تعداد باکتری‌ها را پس از  $t$  ساعت نشان می‌دهد بیابید. پس از ۵ ساعت چه تعداد باکتری موجود است؟ پس از چند ساعت تعداد باکتری‌ها ۱۰۰۰۰ خواهد شد؟



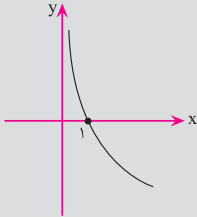
## درس دوم: تابع لگاریتمی و لگاریتم

## پرسش و تمرین

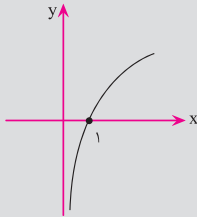
## نکته



تابع معکوس تابع نمایی  $y = a^x$  با شرط  $a > 0$  و  $a \neq 1$ ، تابع لگاریتمی  $y = \log_a x$  است. که نمودار آن به صورت زیر است.



$$y = \log_a x \quad ; \quad 0 < a < 1$$



$$y = \log_a x \quad a > 1$$

## نکته



در حالت کلی داریم:  $a > 0, a \neq 1$

$$a^m = n \leftrightarrow \log_a n = m$$

$a$ ، را مبنای لگاریتم می‌گویند.

$$y = \log_a x \quad \text{دامنه} = (0, +\infty)$$

$$\text{برر} = \mathbb{R}$$

\* در تابع  $y = \log_a x$ ، با شرط  $a > 1$ ، با

افزایش  $x$  مقدار  $y$  هم افزایش می‌یابد.

\* در تابع  $y = \log_a x$  با شرط  $0 < a < 1$ ،

با افزایش  $x$  مقدار  $y$  کاهش می‌یابد.

۱. در تابع وارون‌پذیر  $f(x) = 5^x$  مقادیرهای زیر را بیابید.

الف)  $f(2) = \dots\dots\dots$       ب)  $f^{-1}(125) = \dots\dots\dots$       پ)  $f(-1) = \dots\dots\dots$

ت)  $f^{-1}(5) = \dots\dots\dots$       ث)  $f^{-1}\left(\frac{1}{125}\right) = \dots\dots\dots$       ج)  $f^{-1}\left(\frac{1}{25}\right) = \dots\dots\dots$

۲. هر کدام از توابع ستون اول را به تابع معکوس متناظر آن در ستون دوم وصل کنید.

$f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{3}} x$ الف.	
$f^{-1}(x) = \log_{\frac{1}{2}} x$ ب.	
$f^{-1}(x) = \log_6 x$ پ.	
$f^{-1}(x) = \log_{\sqrt{v}} x$ ت.	

$f(x) = 6^x$ ۱.
$f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ ۲.
$f(x) = (\sqrt{v})^x$ ۳.
$f(x) = (6/2)^x$ ۴.

۳. در هر مورد نمودار تابع  $f$  و تابع معکوس آن را رسم کرده و دامنه و برد هر کدام را مشخص کنید.

الف)  $f(x) = 6^x$

---



---

ب)  $f(x) = \left(\frac{1}{3}\right)^x$

---



---

۴. هر کدام از تساوی‌های توانی را به صورت لگاریتمی و تساوی‌های لگاریتمی را به صورت توانی بنویسید.

الف)  $5^3 = 125 \rightarrow \dots\dots\dots$

ب)  $\log_{10} 1000 = 3 \rightarrow \dots\dots\dots$

پ)  $3^{-4} = \frac{1}{81} \rightarrow \dots\dots\dots$

ت)  $\log_2 \frac{1}{64} = -6 \rightarrow \dots\dots\dots$

ث)  $(6/1)^3 = 6/001 \rightarrow \dots\dots\dots$

ج)  $\log_{6/2} 6/008 = 3 \rightarrow \dots\dots\dots$

چ)  $\left(\frac{3}{2}\right)^4 = \frac{81}{16} \rightarrow \dots\dots\dots$

ح)  $2^{-7} = \frac{1}{128} \rightarrow \dots\dots\dots$

---



---



۵. نمودار توابع لگاریتمی زیر را رسم کنید.

الف)  $y = \log_7(x - 1)$

ب)  $y = -\log_3 x$

پ)  $y = \log_{5/2}(x + 2)$

ت)  $y = -\log_{5/5}(x + 1)$

ث)  $y = 1 + \log_2 x$

ج)  $y = -2 + \log_{3/3}(x + 2)$

چ)  $y = |\log_5(x + 3)|$

ح)  $y = -\log_7(-x) + 1$

نکته



از روی نمودار  $y = \log_a x$  می‌توان نمودار توابع جدیدی را رسم کرد.

۱)  $y = \log_a(-x)$

قرینه نسبت به محور  $y$  ها

۲)  $y = -\log_a x$

قرینه نسبت به محور  $x$  ها

۳)  $y = \log_a x + k$   $k$  واحد به بالا

۴)  $y = \log_a x - k$   $k$  واحد به پایین

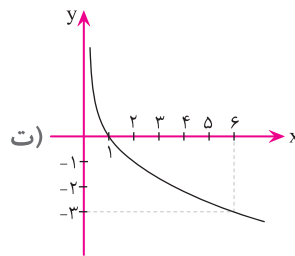
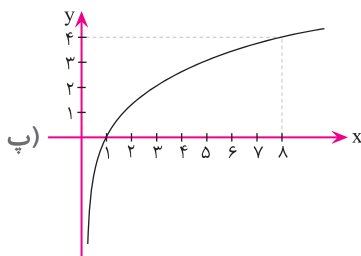
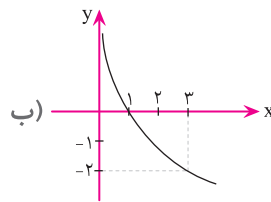
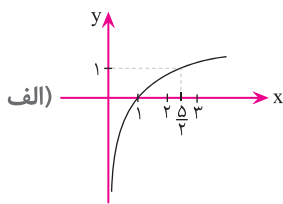
۵)  $y = \log_a(x - k)$

$k$  واحد به سمت راست

۶)  $y = \log_a(x + k)$

$k$  واحد به سمت چپ

۶. نمودار چند تابع لگاریتمی در زیر رسم شده است، ضابطه مربوط به هر کدام را بنویسید.



۷. در هر مورد مشخص کنید که لگاریتم داده شده بین کدام دو عدد صحیح متوالی قرار دارد؟

الف)  $\log_3 7$

ب)  $\log_4 3$

پ)  $\log_{1/3} 3$

ت)  $\log_{1/8} 5$

ث)  $\log_5 84$

ج)  $\log_{2/10} 9$



۸. با استفاده از تعریف لگاریتم، حاصل عبارت‌های زیر را بیابید.

الف)  $\log_2 \frac{1}{16}$  \_\_\_\_\_

ب)  $\log_{\frac{1}{5}} 125$  \_\_\_\_\_

پ)  $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{81}$  \_\_\_\_\_

ت)  $\log_{\frac{1}{2}} \sqrt{32}$  \_\_\_\_\_

ث)  $\log_8 \sqrt[3]{256}$  \_\_\_\_\_

ج)  $\log_{\frac{1}{81}} \sqrt[4]{27}$  \_\_\_\_\_

چ)  $\log_{\sqrt{a^y}} \sqrt[3]{a^z}$  ( $a > 0, a \neq 1$ ) \_\_\_\_\_

۹. یک‌به‌یک بودن توابع زیر را بررسی کرده و تابع وارون آن‌ها را بیابید.

الف)  $f(x) = 5 \times 2^{x-1}$  \_\_\_\_\_

ب)  $f(x) = 3^{2x-1} - 4$  \_\_\_\_\_

پ)  $f(x) = \log_3(x-2)$  \_\_\_\_\_

ت)  $f(x) = 2 \log_4(5-x) - 3$  \_\_\_\_\_

۱۰. دامنه توابع زیر را بیابید.

الف)  $f(x) = \log(4x - 12)$  \_\_\_\_\_

ب)  $f(x) = \log\left(\frac{x-3}{x+5}\right)$  \_\_\_\_\_

پ)  $f(x) = \log(x-3) - \log(x+5)$  \_\_\_\_\_

ت)  $f(x) = \log(x-3)(x+2)$  \_\_\_\_\_

ث)  $f(x) = -\log(x^2 - 9)$  \_\_\_\_\_

ج)  $f(x) = \log(x-3)^2$  \_\_\_\_\_

چ)  $f(x) = \frac{1}{\log_5 x}$  \_\_\_\_\_

ح)  $f(x) = \log_x(1-x^2)$  \_\_\_\_\_

### نکته



تابع لگاریتمی زمانی تعریف شده است که:

$$y = \log_a u \rightarrow \begin{matrix} u > 0 \\ a > 0, a \neq 1 \end{matrix}$$



$$\text{خ) } f(x) = \frac{\log(x+2)}{\log_r(x-1)}$$

$$\text{د) } f(x) = \log(x^2 - 4) + \frac{x}{\log_r(x+1) - 2}$$

۱۱. نامعادله‌های زیر را حل کنید.

$$\text{الف) } \log_r(x-1) > \log_r^5$$

$$\text{ب) } \log_{r/2}(x-4) \geq \log_{r/2}^3$$

$$\text{پ) } \log_{r/3}(\lambda + 2x) \leq \log_{r/3}^2$$

$$\text{ت) } \log_{r/5}(x-1) < \log_{r/5}^3$$

$$\text{ث) } \log_{r/2}(x+2) > -3$$

$$\text{ج) } \log_r(2x-1) < 4$$

۱۲. دامنه‌ی توابع زیر را بیابید.

$$\text{الف) } f(x) = \sqrt{\log_r x}$$

$$\text{ب) } f(x) = \sqrt{\log_r(x-1)}$$

$$\text{پ) } f(x) = \sqrt{\log_{r/5}(x-2)}$$

$$\text{ت) } f(x) = \sqrt{1 - \log_r(x-3)}$$

$$\text{ث) } f(x) = \sqrt{1 + \log_{r/2}(x-1)}$$

$$\text{ج) } f(x) = \frac{x}{\sqrt{\log_r(x+1) - 2}}$$

$$\text{چ) } f(x) = \frac{1-x}{\sqrt{\log_{r/2}(1-x) - 3}}$$

نکته



اگر  $a > 1$  داریم؛

$$\log_a m > \log_a n \leftrightarrow m > n$$

اگر  $0 < a < 1$  داریم؛

$$\log_a m > \log_a n \leftrightarrow m < n$$



### پرسش‌های چهارگزینه‌ای



۱. ضابطه تابع معکوس تابع  $f(x) = \frac{3^x}{25^x}$  کدام است؟

$f^{-1}(x) = 3 \log_5 x$  (۱)        $f^{-1}(x) = 5 \log_3 x$  (۲)

$f^{-1}(x) = \log_{\frac{5}{3}} x$  (۳)        $f^{-1}(x) = \log_{\frac{3}{5}} x$  (۴)

۲. اگر  $\log_3 14^a = a$ ، حدود  $a$  کدام است؟

$-4 < a < -3$  (۱)        $a > -4$  (۲)

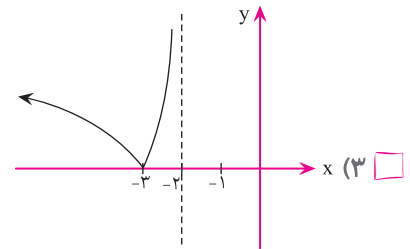
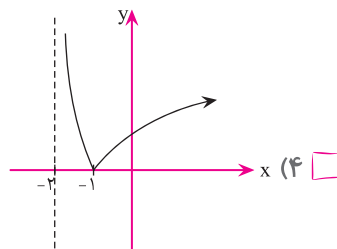
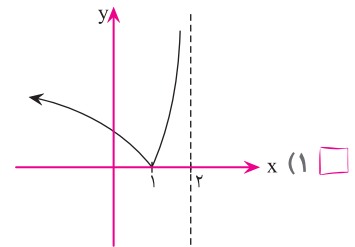
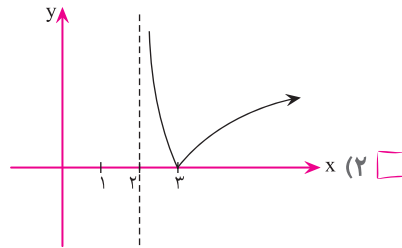
$-5 < a < -4$  (۳)        $-6 < a < -5$  (۴)

۳. دامنه تابع  $f(x) = \log_5(4 - x^2)$  کدام است؟

$[-2, 2]$  (۱)        $(-2, 2)$  (۲)

$[0, 2)$  (۳)        $(-2, 0]$  (۴)

۴. نمودار  $y = |\log_{0.5}(x-2)|$  کدام است؟



۵. مجموعه جواب نامعادله  $2 \leq \log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(x-1) \leq 4$  کدام است؟

$[\frac{2}{3}, \frac{4}{5}]$  (۱)        $[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}]$  (۲)        $[\frac{4}{5}, \frac{5}{4}]$  (۳)        $[\frac{2}{3}, \frac{4}{5}]$  (۴)



## آزمون غنی‌سازی

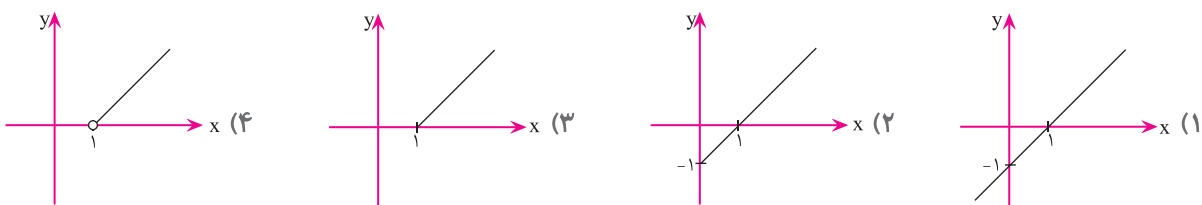
۱. معادله‌ی نمایی  $9^x - 8 \times 3^x + 15 = 0$  چند جواب دارد؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۲. مجموعه جواب نامعادله  $625 < 5^{x-x^2-8} < (2/5)^{x-x^2-8}$  کدام است؟

- (۱)  $1 < x < 4$  (۲)  $2 < x < 3$  (۳)  $3 < x < 4$  (۴)  $1 < x < 5$

۳. نمودار تابع  $\sqrt[5]{\log_4(x-1)} = \sqrt[5]{\log_4 y}$  کدام است؟



۴. حاصل  $\frac{1}{\log_a^{b+1}} + \frac{1}{\log_b^{a+1}}$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳)  $\log_b^a$  (۴)  $\log_a^b$

۵. جواب معادله  $\underbrace{2^x + 2^x + \dots + 2^x}_{\text{تا } 27} = \underbrace{3^x + 3^x + \dots + 3^x}_{\text{تا } 8}$  کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۵

۶. دامنه‌ی تابع  $f(x) = \sqrt{\log(\log_{1/2}(x-1))}$  به صورت  $(a, b]$  است، حداکثر مقدار  $b - a$  کدام است؟

- (۱) ۰/۱ (۲) ۰/۲ (۳) ۰/۳ (۴) ۰/۵

۷. وارون تابع  $f(x) = \log(x^3 - 6x^2 + 12x)$  کدام است؟

- (۱)  $y = 2 - \sqrt[3]{10^x + 8}$  (۲)  $y = 2 + \sqrt[3]{10^x + 8}$  (۳)  $y = 2 - \sqrt[3]{10^x - 8}$  (۴)  $y = 2 + \sqrt[3]{10^x - 8}$

۸. حاصل  $\log_2 \frac{8}{9} + \log_2 \frac{9}{10} + \log_2 \frac{10}{11} + \dots + \log_2 \frac{31}{32}$  کدام است؟

- (۱) صفر (۲) -۲ (۳) ۳ (۴) -۳

۹. مجموع جواب‌های معادله  $\frac{1}{5 - \log x} + \frac{2}{1 + \log x} = 1$  کدام است؟

- (۱) ۱۰۰۰ (۲) ۱۰۱۰۰ (۳) ۱۱۰۰ (۴) ۹۰۰

۱۰. جواب نامعادله  $\left(\frac{1}{2}\right)^{\log_{1/2} \log(x-4)} > 1$  کدام است؟

- (۱)  $5 < x < 14$  (۲)  $x > 14$  (۳)  $4 < x < 5$  (۴)  $x < 14$



## آزمون نوبت اول

پایه یازدهم		حسابان
ردیف	سؤالات	بارم
۱	مجموع چند جمله از دنباله حسابی ... , ۱۸ , ۲۴ برابر صفر است؟	۱/۵
۲	اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه‌های معادله $x^2 - 3mx + 4 = 0$ باشند، $m$ را چنان بیابید که رابطه $\alpha\beta^{-1} + \beta\alpha^{-1} = \frac{73}{4}$ بین ریشه‌های معادله برقرار باشد.	۱/۵
۳	اگر نمودار تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ به صورت مقابل باشد، ضابطه تابع را بیابید.	۲
۴	نمودار تابع $f(x) =  x - 2  +  x  - x - 1$ را رسم کنید.	۱/۵
۵	دو نقاش اگر با هم کار کنند، خانه‌ای را ۴ روزه رنگ می‌زنند. اما اگر به تنهایی کار کنند، نقاش اول ۱۵ روز زودتر خانه را رنگ می‌زند. مشخص کنید هر نقاش به تنهایی خانه را در چند روز رنگ می‌زند؟	۱/۵
۶	مثلث ABC با رئوس $A(-1, 7)$ ، $B(-6, -2)$ و $C(4, 8)$ مفروض است. طول عمودی را که از رأس B بر میانه نظیر رأس A وارد می‌شود، بیابید.	۱/۵
۷	نمودار تابع مقابل را رسم کرده و برد تابع را تعیین کنید.	۱
	$f(x) = x^2 - 4 \quad D_f = (-\infty, -2) \cup [0, 1]$	
۸	دامنه تابع زیر را بیابید.	۱
	$f(x) = \frac{\sqrt{4 -  x - 1 }}{x^2 - 4}$	
۹	نمودار تابع $y = x - [2x]$ را در بازه $[-1, 1]$ رسم کنید.	۲
۱۰	نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x - 1} + 1$ را رسم کرده و مشخص کنید آیا یک به یک است یا خیر؟ در صورت یک به یک بودن نمودار تابع معکوس آن را رسم کرده و ضابطه تابع معکوس را نیز به دست آورید.	۱/۵
۱۱	توابع $f(x) = \sqrt{2 - x}$ و $g(x) = \frac{x - 1}{x}$ مفروض‌اند. دامنه و ضابطه تابع $f \circ g$ را بیابید.	۱/۵
۱۲	در تابع نمایی $f(x) = a^x$ ، اگر $f(4) > f(3)$ باشد، حدود $a$ را تعیین کنید و از رابطه $a^y > a^z > a^t$ چه رابطه‌ای بین $y$ و $z$ و $t$ نتیجه می‌شود.	۰/۷۵





بارم	سؤالات	ردیف
۰/۷۵	تابع معکوس تابع نمایی $f(x) = 3 \times 5^{2x}$ را بیابید.	۱۳
۲	معادله و نامعادله زیر را حل کنید. الف) $5^x \times 25^{-x} = \frac{1}{\sqrt{125}} \times 5^{3x-2}$ ب) $\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{2x-1} \leq \left(\frac{3}{\sqrt{2}}\right)^{2-x}$	۱۴
۲۰	پرانرژی و پیروز باشید.	