



مجموعه، الگو، دنباله

در این فصل خواهیم خواند:

- ← درس اول: مجموعه متناهی و نامتناهی
- ← درس دوم: متمم یک مجموعه
- ← درس سوم: الگو و دنباله
- ← درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی



تعدادی توپ روی یک خط مستقیم و به فاصله دو متر از هم قرار دارند. فاصله توپ اول تا سبد ۲ متر است. دونه‌ای باید از کنار سبد شروع کرده، هر توپ را برداشته، به سبد بیندازد و مجدداً به طرف توپ بعدی برود و آن را تا سبد حمل کند و به داخل آن بیندازد. برای انداختن ده توپ به این شیوه دونه چه مسافتی را باید برود؟



درس اول: مجموعه متناهی و نامتناهی

پرسش و تمرین

۱. به هر یک از موارد زیر پاسخ دهید.

الف. مجموعه‌های \mathbb{N} ، \mathbb{Z} ، \mathbb{Q} ، \mathbb{Q}' و \mathbb{R} را در یک نمودار ون نمایش دهید.

ب. سه عدد حقیقی بنویسید که گویا نباشند.

۲. حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف) $\mathbb{R} - \mathbb{Q} =$	ب) $\mathbb{R} - \mathbb{Q}' =$	پ) $\mathbb{W} - \mathbb{N} =$
ت) $\mathbb{Z} - \mathbb{N} =$	ث) $\mathbb{N} - \mathbb{W} =$	ج) $\mathbb{Z} \cap \mathbb{N} =$
ج) $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} =$	ح) $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' =$	خ) $\mathbb{Q} - \mathbb{Q}' =$

۳. مجموعه‌های زیر را به صورت بازه نشان داده و روی محور اعداد حقیقی نیز نمایش دهید.

الف) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 2 \leq x \leq 4\}$

ب) $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x \leq 2\}$

پ) $C = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x < 1\}$

ت) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x < 2\}$

ث) $E = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 2\}$

ج) $F = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 3\}$

ج) $G = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 2\}$

ح) $H = \{x \in \mathbb{R} \mid x < -2\}$

۴. اگر $A = [-2, 4]$ و $B = (-\infty, -3]$ مفروض باشند، حاصل $A \cup B$ و $A \cap B$ و $A - B$ و $B - A$ را به صورت بازه نشان دهید.

۵. حاصل عبارات زیر را به صورت بازه نمایش دهید.

الف) $(-\infty, 2) \cup [0, 3)$

پ) $[2, 7) - (-1, 3)$

ث) $(-2, 3] \cap (3, 5]$

ج) $(2, 5) \cup [3, 8)$

ب) $[-1, +\infty) \cap [-3, 4]$

ت) $(-\infty, 4) \cap [3, +\infty)$

ج) $(-\infty, 4] - (2, +\infty)$

ح) $([-2, 4) \cup [0, +\infty)) - (-\infty, 1]$

۶. درستی یا نادرستی جملات زیر را مشخص کنید.

الف. $2/7 \in [2, 3)$

ب. $-3 \in (-\infty, -3)$

پ. $4 \notin [5, +\infty)$

ج. $(1, 3) \subset [1, 2]$

ث. $\frac{1}{7} \notin (-2, 1)$

ت. $7/5 \in \{7, 8\}$



یادآوری

مجموعه‌های اعداد مختلف به صورت زیر هستند:

مجموعه اعداد طبیعی

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$$

مجموعه اعداد مسایی

$$\mathbb{W} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$$

مجموعه اعداد صحیح

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$$

مجموعه اعداد گویا

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

مجموعه اعداد گنگ

$\mathbb{Q}' =$ مجموعه اعداد حقیقی که نتوان به صورت کسر متعارفی نوشت.

مجموعه اعداد حقیقی

$$\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$$

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$$



تعریف

بازه‌ها: زیرمجموعه‌هایی خاص، از اعداد حقیقی را به صورت بازه‌ها نشان می‌دهند که داریم:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$

$$[a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$$

$$(a, +\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$$

$$(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$$

$$(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$



- ج. $(-\infty, 1) \subset (-\infty, 1]$ ح. $\emptyset \in (-\infty, 5]$ خ. $\emptyset \notin [3, +\infty)$
 د. $\{-2, 0, 2\} \notin (-3, 2]$ ذ. $[1, 2] \in [0, 3]$ ر. $\sqrt{5} \notin [2, 3)$
 ز. $(-3, 5) \subset [-4, 5]$ ژ. $\{3, 4\} = [3, 4]$ س. $\pi \in (-1, 3]$

۷. هر یک از اعداد ستون اول، عضو یکی از بازه‌های داده شده در ستون دوم هستند، هر عدد را به بازه نظیر آن وصل کنید.

الف. $[-3, -2]$	۱. $-\frac{5}{2}$
ب. $[\frac{5}{4}, 3)$	۲. -2×10^{-4}
پ. $(-\infty, -3)$	۳. π
ت. $(-2, \frac{1}{4}]$	۴. $2/\sqrt{6}$
ث. $[3, +\infty)$	۵. $\sqrt{200}$
ج. $(\frac{1}{4}, \frac{5}{2})$	۶. 0

۸. در هر مورد مقدار m را بیابید.

- الف) $(-\infty, 4] \cap (-3, m) = (-3, 2)$ _____
 ب) $(2, 5] \cup [m, 6) = [-4, 6)$ _____
 پ) $(-\infty, 5] \cap [m, 9] = \{5\}$ _____
 ت) $[2, 3) \cup (m, 3] = (1, 3]$ _____

۹. مشخص کنید کدام یک از مجموعه‌های زیر منتهای یا نامنتهای است. اگر مجموعه‌ای منتهای است، در صورت امکان تعداد اعضای آن را مشخص کنید.

- الف. مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی فرد ب. مجموعه تعداد پرندگان روی زمین
 پ. مجموعه اعداد طبیعی مضرب ۷ ت. بازه $[1, 2]$
 ث. مجموعه مضارب فرد طبیعی عدد ۶ ج. مجموعه کسره‌های منفی با صورت -2
 ج. مجموعه اعداد گویای بین $\frac{1}{3}$ تا $\frac{1}{2}$ ح. مجموعه اعداد گنگ بین ۱ تا ۲
 خ. مجموعه شعرای ایرانی د. مجموعه تمام دایره‌های مماس بر محور x

۱۰. بازه $(3, 4)$ را در نظر بگیرید.

- الف. این بازه یک مجموعه منتهای یا نامنتهای است؟ _____
 ب. یک مجموعه منتهای مثال بزنید که زیرمجموعه بازه فوق باشد. _____
 پ. یک مجموعه نامنتهای مثال بزنید که زیرمجموعه بازه فوق باشد. _____
 ت. یک مجموعه نامنتهای مثال بزنید که بازه فوق زیرمجموعه آن مجموعه باشد. _____
 ث. آیا مجموعه منتهای وجود دارد که بازه فوق زیرمجموعه آن باشد؟ _____

۱۱. اگر $A = [2, +\infty)$ و $A \subseteq B$ باشد، به موارد زیر پاسخ دهید.

- الف. مجموعه B منتهای یا نامنتهای است؟ _____
 ب. برای مجموعه B دو مثال بزنید. _____

تعریف

مجموعه منتهای: مجموعه‌ای را که تعداد اعضای آن یک عدد حسابی باشد، مجموعه منتهای یا مجموعه پایان می‌گویند.
مجموعه نامنتهای: مجموعه‌ای که نمی‌توان تعداد اعضای آن را با یک عدد حسابی بیان کرد، مجموعه نامنتهای یا مجموعه بی‌پایان می‌گویند.



۱۲. متناهی یا نامتناهی بودن مجموعه‌های زیر را مشخص کنید.

الف. اعداد گویای موجود در بازه $[2, \frac{5}{4}]$ ب. اعداد طبیعی موجود در بازه $(-3, 7]$

پ. اعداد صحیح موجود در بازه $(-\infty, 7)$ ت. اعداد گنگ موجود در بازه $(1, 2)$

۱۳. اگر $A = \{-1, 0, 1\}$ و $B \subseteq A$ باشد، به موارد زیر پاسخ دهید.

الف. مجموعه B متناهی یا نامتناهی است؟

ب. برای مجموعه B دو مثال بنویسید.

۱۴. فرض کنید A ، مجموعه تمام مضارب طبیعی عدد ۷ باشد.

الف. A را با نوشتن اعضا مشخص کنید.

ب. A را به زبان ریاضی نوشته و مشخص کنید A متناهی یا نامتناهی است.

پ. دو مجموعه متناهی بنویسید که زیرمجموعه A بوده و اشتراک آن‌ها تهی باشد.

ت. دو مجموعه نامتناهی مانند C و D بنویسید که زیرمجموعه A بوده و $D \subset C$.

۱۵. به موارد زیر پاسخ دهید.

الف. مجموعه $\mathbb{R} - \{5\}$ را روی محور نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماع دو بازه بنویسید.

ب. مجموعه $\mathbb{R} - \{2, -3\}$ را روی محور نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماع چند بازه بنویسید.

پ. مجموعه $\mathbb{R} - (-1, 2)$ را روی محور نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماع چندبازه بنویسید.

ت. مجموعه $\mathbb{R} - [-2, 3]$ را روی محور نشان دهید و سپس آن را به صورت اجتماع چندبازه بنویسید.

ث. مجموعه مقسوم‌علیه‌های صحیح عدد ۱۲ را نوشته و مشخص کنید متناهی یا نامتناهی است.

پرسش‌های چهارگزینه‌ای



۱. کدام یک از مجموعه‌های زیر متناهی است؟

(۱) $[0, \frac{1}{4}]$ (۲) \mathbb{Z} (۳) $\mathbb{W} - \mathbb{N}$ (۴) \mathbb{R}

۲. اگر $A = [-2, 7]$ و $B = (-\infty, 6]$ ، آن‌گاه $A - B$ کدام است؟

(۱) $[6, 7]$ (۲) $(6, 7)$ (۳) $[-2, 6]$ (۴) $(-\infty, -2)$

۳. اگر $(-\infty, 3] \cap (m, 6] = \emptyset$ ، آن‌گاه m متعلق به کدام بازه است؟

(۱) $[3, 6]$ (۲) $(3, 6)$ (۳) $(3, 5)$ (۴) $[3, 6)$



۴. کدام یک از مجموعه‌های زیر نامتناهی است؟

۱) تمام دانش‌آموزان ایران در سال تحصیلی ۱۳۹۵

۲) مجموعه اعداد صحیح متعلق به بازه $[-7, 9]$

۳) مجموعه اعداد طبیعی متعلق به بازه $(-\infty, 100)$

۴) مجموعه اعداد گویای بازه $[3, 4]$

۵. اگر $A = (-\infty, 4]$ ، $B = (-2, 3)$ و $C = (-1, +\infty)$ مفروض باشند، چند عدد

صحیح در بازه $(A - C) \cap B$ وجود دارد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

درس دوم: متمم یک مجموعه

پرسش و تمرین

۱. در هر مورد با توجه به مجموعه مرجع داده شده، متمم مجموعه A را بیابید.

الف) $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $A = \{0, 2, 5\} \Rightarrow A' =$

ب) $U = \{4, 5, 6, 7, \dots\}$ $A = \{9, 10, 11, \dots\} \Rightarrow A' =$

پ) $U = \{2, 3, 4, 5, \dots\}$ $A = \{3, 5, 6, 7\} \Rightarrow A' =$

ت) $U = \{\dots, -3, -2\}$ $A = \{\dots, -7, -6\} \Rightarrow A' =$

ث) $U = [0, 2]$ $A = [0, 1] \Rightarrow A' =$

ج) $U = (-2, 5]$ $A = [1, 3) \Rightarrow A' =$

چ) $U = [-1, +\infty)$ $A = (5, +\infty) \Rightarrow A' =$

ح) $U = (-\infty, 4)$ $A = [0, 2] \Rightarrow A' =$

۲. اگر $U = [-2, 3]$ و $A = [-2, 0]$ و $B = (1, 3)$ مفروض باشند، حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف) $A' \cup B' =$ _____

ب) $(A \cap B)' =$ _____

۳. اعضای هر کدام از مجموعه‌های زیر را با توجه به مرجع معرفی شده، مشخص کنید.

الف) $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -2 \leq x \leq 3\}$

ب) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid -2 \leq x \leq 3\}$

پ) $C = \{x \in \mathbb{W} \mid -2 \leq x \leq 3\}$

ت) $D = \{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leq x \leq 3\}$

۴. اگر $U = \{-1, 0, 1, 2, 3\}$ ، $A = \{0, 2, 3\}$ و $B = \{-1, 0, 2\}$ باشد، حاصل عبارات زیر را بیابید.

الف) $A' \cup B' =$ ب) $(A \cap B)' =$

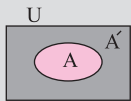
پ) $A' \cap B' =$ ت) $(A \cup B)' =$

تعریف

مجموعه مربع: به طور کلی در هر بخشی، مجموعه‌ای را که تمام مجموعه‌های مورد مطالعه، زیرمجموعه آن باشند، مجموعه مربع یا مجموعه جهانی می‌گویند و معمولاً آن را با نماد U نشان می‌دهند.

تعریف

تعریف متمم یک مجموعه: هرگاه U مجموعه مربع و $A \subset U$ باشد آن‌گاه مجموعه $U - A$ را متمم A می‌گویند و با نماد A' نشان می‌دهند. در واقع A' شامل اعضای از مجموعه مربع U می‌باشد که عضو A نباشند.





- ث) $A \cap B' =$ ج) $A - B =$
 چ) $(B - A)' =$ ح) $(A \cup B)'\ =$
 خ) $A' \cap A =$ د) $B' \cup B =$

۵. \mathbb{R} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر گرفته و متمم هر یک از مجموعه‌های زیر را روی محور نشان دهید.

- الف) $A = (-4, 5]$ _____
 ب) $B = \{\dots, -2, -1, 0\}$ _____
 پ) $C = (-\infty, 2)$ _____
 ت) $D = [-5, +\infty)$ _____
 ث) $E = \mathbb{Z}$ _____

۶. \mathbb{Z} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر گرفته و به موارد زیر پاسخ دهید.

الف. مجموعه‌ای نامتناهی مثل A مثال بزنید که A' هم نامتناهی باشد.

ب. مجموعه‌ای نامتناهی مثل B مثال بزنید که B' متناهی باشد.

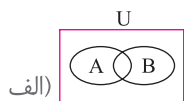
پ. مجموعه‌ای متناهی مثل C مثال بزنید و C' را به دست آورید. C' متناهی است یا نامتناهی؟

۷. مجموعه $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ، $A = \{2, 3\}$ و $B = \{1, 2, 3, 7\}$ را در نظر گرفته و A' و B' را بیابید. بین A و B و بین A' و B' چه رابطه‌ای وجود دارد؟

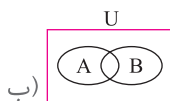
۸. مجموعه $U = \{-4, -3, -1, 0, 2, 7\}$ و $A = \{-4, 0, 7\}$ و $B = \{-3, 0, 2, 7\}$ و $C = \{-1, 0, 2\}$ مفروضند، حاصل عبارات زیر را بیابید.

- الف) $A' \cap (B \cup C)' =$ _____
 ب) $(A \cap B)' - C =$ _____
 پ) $(A - C)' \cup B' =$ _____

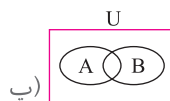
۹. در هر کدام از شکل‌های زیر، مجموعه خواسته شده را با هاشور زدن مشخص کنید.



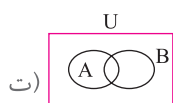
$(A \cap B)'$



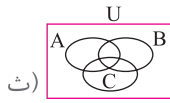
$(A \cup B)'$



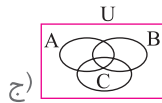
$(A - B)'$



$[(A - B) \cup (B - A)]'$



$[(A - C) \cup B]'$



$[(A \cup B) \cap C]'$

نکته



۱. $(A \cup B)' = A' \cap B'$
 ۲. $(A \cap B)' = A' \cup B'$
 ۳. $A - B = A \cap B'$
 ۴. $A \subset B \Leftrightarrow B' \subset A'$



نکته



نکته ۱: اگر A و B دو مجموعه جدا از هم (یا مجزا) باشند، یعنی $A \cap B = \emptyset$ آن‌گاه داریم:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

نکته ۲: برای یافتن تعداد اعضای $A - B$ داریم:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$

۱۰. \mathbb{R} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر گرفته و متمم مجموعه‌های زیر را روی محور نشان داده و به صورت بازه بنویسید.

الف) $A = \{5\}$

ب) $B = \{-2, 4\}$

۱۱. اگر A و B زیرمجموعه‌هایی از مجموعه مرجع U باشند و $n(U) = 200$ ، $n(A) = 50$ ، $n(B) = 70$ و $n(A \cap B) = 30$ ، آن‌گاه مطلوب است:

الف) $n(A \cup B) =$

پ) $n(B - A) =$

ب) $n(A \cap B') =$

ت) $n(A' \cap B') =$

۱۲. اگر A و B دو مجموعه جدا از هم از مجموعه مرجع U باشند و $n(U) = 100$ ، $n(A \cup B) = 52$ و $n(A) = 30$ باشد، حاصل $n(B')$ را بیابید.

۱۳. ۱۷ نفر از دانش‌آموزان یک کلاس در درس فیزیک یا شیمی تجدید شده‌اند. اگر ۱۱ نفر در فیزیک و ۱۳ نفر در شیمی تجدید شده باشند، مطلوب است:

الف. چند نفر در هر دو درس تجدید شده‌اند؟

ب. چند نفر فقط در فیزیک تجدید شده‌اند؟

۱۴. کلاسی ۳۲ نفر دانش‌آموز دارد، اگر ۱۳ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۴ نفر عضو تیم والیبال این کلاس باشند و ۱۰ نفر عضو هیچ کدام از این تیم‌ها نباشند، مطلوب است:

الف. چند نفر هم در تیم فوتبال و هم در تیم والیبال هستند؟

ب. چند نفر فقط عضو تیم فوتبال هستند؟

پ. چند نفر فقط عضو تیم ورزشی هستند؟

۱۵. در یک باشگاه ورزشی ۱۵ نفر عضو تیم بسکتبال و ۲۰ نفر عضو تیم والیبال و ۲۰ نفر عضو تیم فوتبال هستند، در ضمن ۳ نفر عضو مشترک تیم‌های بسکتبال و والیبال و ۶ نفر عضو مشترک تیم‌های والیبال و فوتبال و ۵ نفر عضو مشترک تیم‌های بسکتبال و فوتبال می‌باشند. اگر ۵۰ نفر حداقل در یکی از این ۳ تیم عضو باشند، چند نفر در هر ۳ تیم عضو هستند؟

پرسش‌های چهارگزینه‌ای



۱. اگر \mathbb{N} مجموعه اعداد طبیعی به عنوان مجموعه مرجع در نظر گرفته شود و مجموعه‌های $A = \{1, 3, 5, 7, \dots\}$ و $B = \{2, 4, 6, \dots\}$ مفروض باشند، حاصل $(A \cup B)'$ کدام است؟

(۱) \mathbb{N} (۲) \emptyset (۳) $\{1, 2, 3, \dots, 10\}$ (۴) $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$

۲. اگر $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ مجموعه مرجع باشد، چند مجموعه مانند A وجود دارد که در رابطه $A = \{3\} \cap A = \{1, 3, 6\}$ صدق می‌کند؟

(۱) ۶ (۲) ۴ (۳) ۸ (۴) ۱۰

نکته



اگر A' متمم A نسبت به مجموعه مرجع U باشد، داریم:

$$n(A) + n(A') = n(U)$$

نکته



در مورد ۳ مجموعه A و B و C داریم:

$$n(A \cup B \cup C) =$$

$$n(A) + n(B) + n(C)$$

$$- n(A \cap B) - n(A \cap C)$$

$$- n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$



۳. اگر $U = [-۳, +\infty)$ و $A = (۰, ۴]$ و $B = (-۳, ۲]$ مفروض باشند، حاصل $(B - A)'$ کدام است؟

- (۱) $(۰, +\infty)$ (۲) $[۰, +\infty)$
 (۳) $(-۳, ۰]$ (۴) $(۰, +\infty) \cup \{-۳\}$

۴. اگر $n(A) + n(B) = ۴n(A \cap B)$ باشد، حاصل $\frac{n(A \cup B)}{n(A \cap B)}$ کدام است؟

(۱) ۴ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۶

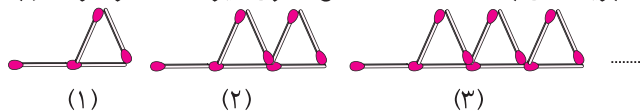
۵. در یک کلاس ۳۵ نفری، همه دانش‌آموزان ورزش می‌کنند که ۳۰ نفر از آنها فوتبال و ۱۵ نفر بسکتبال بازی می‌کنند، آن‌گاه چند نفر فقط بسکتبال بازی می‌کنند؟

(۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳) ۱۵ (۴) ۲۰

درس سوم: الگو و دنباله

پرسش و تمرین

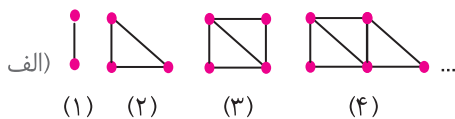
۱. تعداد چوب کبریت‌های به کار رفته در شکل الگوی زیر را در نظر گرفته و به موارد زیر پاسخ دهید.



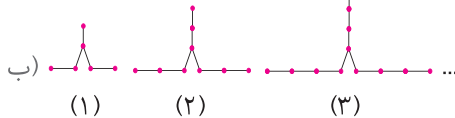
الف. اگر تعداد چوب کبریت‌ها را در هر شکل با a_n نشان دهیم، مقادیر a_1 ، a_2 ، a_3 را بنویسید.

ب. مقادیر a_5 ، a_{10} و a_n را بیابید.

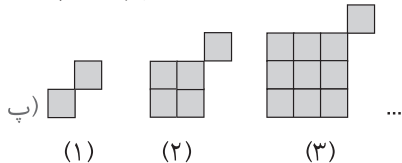
۲. در هر کدام از الگوهای زیر، جملات مشخص شده و جمله عمومی را بیابید و مشخص کنید الگو خطی است یا خیر؟



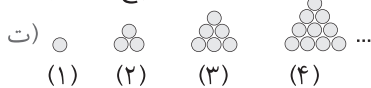
تعداد پاره‌خطها $\Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_{10} = a_n =$



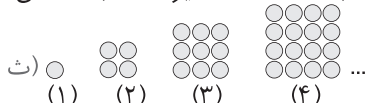
تعداد چوب کبریت‌ها $\Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_{10} = a_n =$



تعداد مربع‌های کوچک $\Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_{10} = a_n =$



تعداد دایره‌ها (دنباله مثلثی) $\Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_{10} = a_n =$



تعداد دایره‌ها (دنباله مربعی) $\Rightarrow a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = a_{10} = a_n =$

نکته



برای نشان دادن اعداد جملات یک الگو از متغیرهای اندیس‌دار به صورت $a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ استفاده می‌کنند. a_n را جمله عمومی الگو می‌گویند، چرا که ضابطه a_n ساختار جملات الگو را مشخص می‌کند و به کمک آن می‌توان مقدار هر جمله از الگو را به دست آورد.

تعریف



الگوی خطی: الگوهایی را که در آن‌ها اختلاف هر دو جمله متوالی، عددی ثابت باشد، را الگوهای خطی می‌نامند. جمله عمومی الگوهای خطی بر حسب n ، یک عبارت درجه اول به صورت $t_n = an + b$ می‌باشد.



۳. در هر مورد، C_n جمله عمومی یک الگوی خطی است. با توجه به اطلاعات داده شده، جمله عمومی C_n را بیابید.

الف) $C_3 = 11, C_{11} = 27$

ب) $C_5 = 22, C_7 = 32$

۴. چهار جمله اول هر یک از دنباله‌های زیر را که جمله عمومی آن‌ها داده شده است، بیابید.

الف) $t_n = \frac{n}{n+1}$

ب) $a_n = n^2 - 3n$

پ) $c_n = 3^n - 1$

ت) $u_n = \frac{1}{n+3}$

۵. هر کدام از الگوهای عددی زیر جملات یک دنباله محسوب می‌شوند. در هر مورد سه جمله بعدی را بنویسید و هم‌چنین سعی کنید جمله عمومی دنباله را حدس بزنید.

الف) $\dots, -6, -5, -4, \dots$

ب) $\dots, \frac{1}{16}, \frac{1}{9}, \frac{1}{4}, \frac{1}{1}, \dots$

پ) $\dots, \frac{5}{4}, \frac{4}{3}, \frac{3}{2}, \frac{2}{1}, \dots$

ت) $\dots, 16, 8, 4, 2, \dots$

ث) $\dots, \frac{-1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{-1}{3}, \frac{1}{2}, -1, \dots$

ج) $\dots, 0.03, 0.03, 0.03, \dots$

ح) $\dots, \frac{1}{2}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1, \dots$

خ) $\dots, 24, 15, 8, 3, 0, \dots$

۶. الگویی را که توسط مثلث‌های متساوی‌الاضلاع هم‌نهشت، ایجاد شده در نظر بگیرید.

الف. تعداد مثلث‌های متساوی‌الاضلاع کوچک را به صورت یک دنباله تا جمله پنجم بنویسید.



(۱)

(۲)

(۳)

ب. جمله عمومی دنباله را یافته و مشخص کنید آیا این دنباله، خطی است؟ چرا؟

۷. جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد چهار جمله اول دنباله را نوشته و سپس به هر یک از آن‌ها یک الگوی هندسی نظیر کنید.

الف) $a_n = 3n$



ب) $a_n = n^2 + 3$ _____

پ) $t_n = 4n + 2$ _____

۸. جمله پنجم دنباله‌ای با جمله عمومی $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}$ چند برابر جمله دوازدهم آن است؟

۹. اگر در دنباله‌ای داشته باشیم: $a_{3n+2} = \frac{n-1}{n+2}$ ، جمله‌های پنجم، یازدهم و جمله عمومی دنباله را بیابید.

۱۰. در هر کدام از دنباله‌های بازگشتی زیر جملات را تا جمله ششم بنویسید.

الف) $a_1 = 1, a_2 = 1, a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$

ب) $a_1 = 2, a_{n+1} = -a_n + 4$

پ) $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+2} = 2a_{n+1} - a_n$

۱۱. در دنباله $a_n = \frac{n+1}{2n+1}$ ، چندمین جمله دنباله برابر $\frac{20}{39}$ می‌باشد؟

۱۲. دنباله $a_n = 2n - 13$ چند جمله منفی دارد؟

۱۳. اولین جمله بزرگ‌تر از $2/9$ در دنباله $t_n = \frac{3n-7}{n+1}$ ، جمله چندم دنباله است؟

۱۴. مجموع ده جمله اول دنباله $a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$ را بیابید.

۱۵. در دنباله $t_n = \frac{1}{n(n+1)}$ مجموع جملات اول تا بیستم را بیابید.

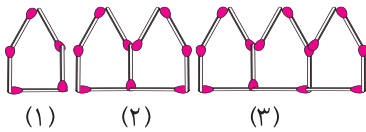
تعریف



تعریف دنباله بازگشتی: به دنباله‌هایی که جمله اول یا چند جمله اول آن مشخص باشد و جمله‌های بعدی بر حسب تدراری از جملات قبلی بیان شده باشد، دنباله‌های بازگشتی می‌گویند.



پرسش‌های چهارگزینه‌ای



۱. در الگوی مقابل که توسط چوب کبریت‌ها ساخته شده، جمله عمومی تعداد چوب کبریت‌ها کدام است؟

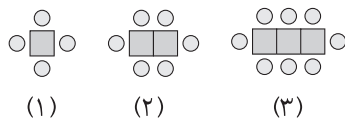
(۱) $8n - 3$ (۲) $4n + 1$ (۳) $4n + 3$ (۴) $7n - 2$

۲. یک قطعه چوب را در مرحله اول به ۳ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. در مرحله دوم هر یک از قطعه‌های مرحله اول را به ۳ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم، اگر این کار را ادامه دهیم در مرحله n ام تعداد تکه چوب‌های ایجاد شده چه قدر است؟

(۱) 3^{n-1} (۲) 3^n (۳) 3^{n+1} (۴) $3 + 3^{n-1}$

۳. در شکل مقابل الگویی از میز و صندلی‌ها رسم شده است. در مرحله هفتم تعداد صندلی‌ها کدام است؟

(۱) ۴۹ (۲) ۱۴ (۳) ۱۶ (۴) ۱۲



۴. دنباله $t_n = \frac{11 - 2n}{n + 1}$ ، چند جمله مثبت دارد؟

(۱) ۴ (۲) ۵ (۳) ۶ (۴) ۷

۵. در دنباله خطی $t_n = an + b$ اگر $t_7 = 3$ و $t_4 = 15$ باشند، جمله دهم این دنباله کدام است؟

(۱) ۵۰ (۲) ۱۵ (۳) ۶۹ (۴) ۵۱

درس چهارم: دنباله‌های حسابی و هندسی

پرسش و تمرین



۱. از بین دنباله‌های زیر، دنباله‌های حسابی را مشخص کنید و سپس جمله عمومی آن‌ها را بیابید.

(الف) $2, 5, 8, 11, \dots$

(ب) $-1, -4, -7, -10, \dots$

(پ) $1, 4, 9, 16, \dots$

(ت) $1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, \dots$

۲. در هر کدام از موارد زیر، جمله‌های مشخصی از یک دنباله حسابی داده شده‌اند. جمله عمومی

(الف) $t_3 = 8, t_5 = 14, t_n = ?$

(ب) $a_6 = -5, a_{10} = -13, a_n = ?$

تعریف



دنباله مسایی: دنباله‌ای که هر جمله آن به جز جمله اول با اضافه شدن یک مقدار ثابت به جمله قبلی از خودش به دست می‌آید. مقدار ثابت را قدر نسبت دنباله می‌گویند و با نماد d نشان می‌دهند.

نکته



جمله عمومی یک دنباله مسایی با جمله اول a_1 و قدر نسبت d به صورت زیر می‌باشد.
 $t_n = a_1 + (n - 1)d, t_n - t_{n-1} = d$

۳. اولاً در دنباله حسابی $1, 9, \dots, -15$ جمله دهم را یافته، ثانیاً معین کنید چندمین جمله آن برابر با ۲۲۵ است؟



۴. در یک دنباله حسابی $a_4 + a_{11} = 105$ و $a_3 + a_7 = 80$ می‌باشد، جملات این دنباله را مشخص کنید.

۵. دنباله حسابی متناهی ۷۲، ۰۰۰، ۹، ۲، چند جمله دارد؟

۶. در هر مورد x را چنان بیابید که ۳ عبارت داده شده تشکیل دنباله حسابی بدهند.

الف) $x + 1$ ، $2x + 3$ ، $5x - 7$

ب) $2x$ ، $-x + 1$ ، $3x - 2$

۷. در هر مورد بین دو عدد داده شده، به تعداد گفته شده واسطه‌ی حسابی درج کنید.

الف. بین -7 ، 23 پنج واسطه حسابی

ب. بین 9 ، 45 هشت واسطه حسابی

۸. مجموع سه عدد که تشکیل دنباله حسابی می‌دهند، ۲۱ و مجموع مربعات آن‌ها، ۱۶۵ می‌باشد. این ۳ عدد را بیابید.

۹. در یک دنباله حسابی اگر $a_1 + a_7 + a_8 = 15$ و $a_2 + a_7 + a_8 = 60$ باشد، a_{12} را بیابید.

۱۰. در یک دنباله حسابی، جمله صدویکم برابر ۵۰۵ و قدر نسبت با جمله اول برابر است. چند جمله این دنباله کوچک‌تر از ۵۰ است؟

نکته



۳ عدد a ، b و c تشکیل تصاعده حسابی می‌دهند اگر $b = \frac{a+c}{2}$ که در این صورت b را واسطه حسابی بین a و c می‌گویند.

نکته



در هر دنباله حسابی، جملات بین دو جمله غیرمتوالی را واسطه‌های حسابی بین آن دو جمله می‌گویند.
در دنباله ۱۲ و ۱۰ و ۸ و ۶ و ۴ و ۲ جملات ۱۰ و ۸ و ۶ و ۴ را چهار واسطه حسابی بین ۱۲ و ۲ می‌گویند.



۱۱. اگر m, n, p, q اعداد طبیعی باشند که $m + n = p + q$ ، آن‌گاه در دنباله حسابی t_n ثابت کنید:

$$t_m + t_n = t_p + t_q$$

۱۲. مجموع سه جمله از یک دنباله حسابی ۲۷ و حاصل ضرب همین ۳ جمله ۶۴۸ می‌باشد. قدرنسبت دنباله را بیابید.

۱۳. اگر t_n یک دنباله حسابی باشد، ثابت کنید:

الف) $t_1 + t_6 = 2t_4$

ب) $t_{15} = \frac{t_7 + t_{23}}{2}$

۱۴. اگر دنباله $1, x, y, 14, \dots$ دنباله حسابی باشد، حاصل $2x - 3y$ را بیابید.

۱۵. در یک دنباله حسابی، مجموع سه جمله اول -12 و مجموع سه جمله دوم 15 است. دنباله را مشخص کنید و جمله عمومی آن را بیابید.

۱۶. از بین دنباله‌های زیر، دنباله‌های هندسی را مشخص کرده و جمله عمومی آن‌ها را بیابید.

الف) $1, 2, 4, 8, \dots$

ب) $3, -1, \frac{1}{3}, \frac{-1}{9}, \dots$

پ) $2, 4, 6, 8, \dots$

ت) $-2, -1, \frac{-1}{2}, \frac{-1}{4}, \dots$

۱۷. جمله دهم دنباله هندسی $3, 6, 12, \dots$ را بیابید.

۱۸. در هر مورد با توجه به دو جمله داده شده از دنباله هندسی، جمله عمومی دنباله هندسی را بیابید.

الف) $t_3 = 120, t_6 = 960 \rightarrow t_n = ?$

ب) $t_4 = 20, t_7 = 540 \rightarrow t_n = ?$

۱۹. در هر مورد x را چنان بیابید که دنباله داده شده هندسی باشد.

الف) $12x - 4, 5x, 2x + 1$

ب) $4x + 44, 2x + 6, x - 1$

تعریف



دنباله هندسی؛ دنباله‌ای است که هر جمله آن به یک جمله اول، از ضرب جمله قبل در عددی ثابت به دست می‌آید. این عدد ثابت را قدرنسبت دنباله هندسی می‌گویند.

نکته



جمله عمومی دنباله هندسی با جمله اول a و قدرنسبت r به صورت زیر است.

$$t_n = a \cdot r^{n-1} \quad \frac{t_n}{t_{n-1}} = r$$

نکته



اگر a, b, c سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند داریم:

$$b^2 = ac$$
 در این صورت b را واسطه هندسی بین a و c می‌گویند.



۲۰. جمله هفتم یک دنباله هندسی مساوی هشت برابر جمله چهارم آن است، جمله دوازدهم این دنباله چند برابر جمله هشتم آن است؟

۲۱. بین 10° و 320° چهار واسطه هندسی درج کنید.

۲۲. اگر m, n, p, q اعداد طبیعی باشند که؛ $m + n = p + q$ آن گاه در دنباله هندسی t_n ثابت کنید:

$$t_m \times t_n = t_p \times t_q$$

۲۳. مجموع ۳ جمله متوالی از یک دنباله هندسی ۳۱ و حاصل ضرب آن‌ها ۱۲۵ می‌باشد، این ۳ جمله را بیابید.

۲۴. در دنباله هندسی t_n ثابت کنید.

الف) $t_4 \times t_{12} = t_8^2$ _____

ب) $t_5 \times t_{17} = t_{11}^2$ _____

۲۵. در یک دنباله هندسی مجموع سه جمله دوم ۲۷ برابر مجموع سه جمله اول است. قدرنسبت این دنباله را بیابید.

۲۶. در یک دنباله هندسی، قدرنسبت $-\frac{3}{4}$ و جمله سوم $-\frac{9}{4}$ می‌باشد. جمله چندم این دنباله برابر $-\frac{729}{64}$ است؟

۲۷. در یک دنباله هندسی حاصل ضرب جمله دوم و جمله چهارم ۱۶ و حاصل ضرب جمله پنجم و جمله سوم ۶۴ است. این دنباله را مشخص کنید.

۲۸. ضرب سه جمله متوالی دنباله هندسی ۲۷ است و جمله سوم ۶ واحد از جمله وسط بیشتر است، این سه جمله را بیابید.

تعریف



تعریف واسطه هندسی: در هر دنباله هندسی جمله یا جمله‌های بین دو جمله نامتوالی را واسطه یا واسطه‌های هندسی بین آن دو جمله می‌گویند. مانند:

$3, 6, 12, 24, 48, \dots \rightarrow$

$3, 6, 12, 24, 48$ سه واسطه هندسی بین 3 و 48 هستند.



پرسش‌های چهارگزینه‌ای

۱. اعداد $5p-1$ و $3p+4$ و $2p+3$ سه جمله متوالی یک دنباله حسابی هستند، قدرنسبت این

دنباله کدام است؟

۴ (۱) ۵ (۲)

۶ (۳) ۷ (۴)

۲. در یک دنباله‌ای $t_1 = 4$ و $t_{n+1} = t_n + 3$ جمله n ام آن کدام است؟

$n+5$ (۱) $3n+1$ (۲)

$2n+3$ (۳) $4n-1$ (۴)

۳. چندمین جمله از دنباله حسابی $\dots, 8, 5, 2$ برابر ۵۶ می‌باشد؟

۱۸ (۱) ۱۹ (۲)

۲۰ (۳) ۲۱ (۴)

۴. در یک دنباله هندسی $t_4 - t_3 = 6$ و قدرنسبت دنباله $\sqrt{3}$ است. جمله اول کدام است؟

$\sqrt{3}$ (۱) $2\sqrt{3}$ (۲)

۳ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ (۴)

۵. بین $\frac{1}{3}$ و ۲۷ سه واسطه هندسی درج شده است، مجموع این سه جمله چه قدر است؟

۱۱ (۱) ۱۳ (۲)

۱۵ (۳) ۹ (۴)



نمونه سؤال امتحانی فصل اول

ردیف	سؤالات	بارم																		
۱	هر کدام از موارد زیر را با عبارت مناسب پر کنید. الف. حاصل $(-2, 3] \cup [0, 7)$ برابر است با ب. مجموعه تمام مربع‌های شامل مبدأ مختصات، یک مجموعه است. (متناهی - نامتناهی) پ. اگر U مجموعه مرجع و A مجموعه دلخواهی باشد، آن‌گاه $n(A') = \dots$ ت. در دنباله‌ای با جمله عمومی $a_n = 3n^2 - 2$ مجموع جملات سوم و پنجم برابر است با ث. در دنباله هندسی با جمله عمومی $t_n = \frac{5}{3^n}$ ، قدر نسبت است. ج. جمله عمومی دنباله حسابی $\dots, -2, -7$ به صورت است.	۱/۵																		
۲	مجموعه‌های $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq -1\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -4 < x \leq 7\}$ و $C = [-10, 0)$ مفروض‌اند. حاصل عبارات مقابل را بیابید. الف) $A \cup C$ ب) $(B - A) \cup C$	۱																		
۳	اگر A ، مجموعه تمام مضارب طبیعی عدد ۴ باشد؛ الف. A را با نمایش اعضای آن نوشته و مشخص کنید A متناهی یا نامتناهی است؟ ب. یک زیرمجموعه متناهی و یک زیرمجموعه نامتناهی از A بنویسید.	۱																		
۴	اگر مجموعه مرجع U ، مجموعه اعداد صحیح باشد و $A = \{-2, -1, 0, 1\}$ و $B = \{-5, -4, -3, \dots\}$ مفروض باشند، حاصل عبارات زیر را بیابید. الف) $A' - B$ ب) $B' \cup A$	۱																		
۵	در یک کلاس ۳۵ نفری، تعداد ۱۲ نفر عضو گروه‌های ورزشی و ۱۷ نفر عضو گروه‌های فرهنگی هستند و ۹ نفر فقط عضو گروه‌های ورزشی هستند. مطلوب است: الف. چند نفر عضو حداقل یکی از گروه‌های ورزشی یا فرهنگی هستند؟ ب. چند نفر عضو هیچ‌کدام از گروه‌های ورزشی و فرهنگی نیستند؟	۱/۵																		
۶	الگوی مقابل را در نظر بگیرید و شکل بعدی را رسم و سپس جدول را کامل کنید. 	۱																		
<table border="1"> <thead> <tr> <th>شماره شکل : n</th> <th>۱</th> <th>۲</th> <th>۳</th> <th>۴</th> <th>۵</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>تعداد نقطه‌ها : t_n</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> <tr> <td>رابطه بین n و t_n</td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> <td></td> </tr> </tbody> </table>			شماره شکل : n	۱	۲	۳	۴	۵	تعداد نقطه‌ها : t_n						رابطه بین n و t_n					
شماره شکل : n	۱	۲	۳	۴	۵															
تعداد نقطه‌ها : t_n																				
رابطه بین n و t_n																				
الف. جمله عمومی t_n را بیابید. ب. آیا این الگو خطی است؟ چرا؟																				



بارم	سؤالات	ردیف
۱	یک دنباله با جمله عمومی $t_n = \frac{n-3}{n+1}$ مفروض است. الف. این دنباله چند جمله نامثبت دارد؟ ب. جمله چندم دنباله برابر با $\frac{1}{2}$ می‌باشد؟	۷
۱	جمله دوازدهم یک دنباله حسابی ۱۲۷ و جمله هفتم آن ۹۲ می‌باشد. این دنباله را مشخص کنید.	۸
۱	بین ۲ و ۴۸۶، چهار واسطه هندسی درج کنید.	۹
۱۰	پرانرژی و پیروز باشید.	



آزمون غنی سازی



۱. حاصل $(-2, 7) - (-10, 4)$ شامل چند عدد صحیح است؟

- ۸ (۱) ۷ (۲) ۹ (۳) ۱۰ (۴)

۲. اگر مجموعه مرجع $U = \{1, 2, 3, \dots, 10\}$ و $A = \{2, 4, 8\}$ و $B = \{1, 2, 8, 9\}$ و $C = \{1, 4, 8, 9, 10\}$ مفروض

باشند، مجموعه $[(A \cap B) \cup C]'$ چند زیرمجموعه دارد؟

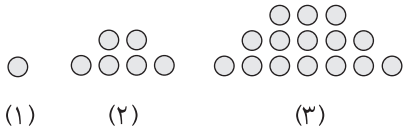
- ۶۴ (۱) ۴ (۲) ۱۶ (۳) ۶ (۴)

۳. از ۵۱ دانش‌آموز یک دبیرستان، ۳۵ نفر در کلاس ادبیات، ۳۱ نفر در کلاس عربی و ۲۳ نفر در هر دو کلاس شرکت کرده‌اند، چند

نفر در هیچ یک از دو کلاس شرکت نکرده‌اند؟

- ۵ (۱) ۶ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

۴. در الگوی مقابل، تعداد دایره‌ها در شکل پنجم کدام است؟



- ۱۲۰ (۱) ۵۰ (۲)

- ۹۰ (۳) ۴۵ (۴)

۵. اگر جملات یک دنباله از رابطه بازگشتی $a_n = xa_{n-1} + a_{n-2}$ ، به دست آید و جملات این دنباله به صورت $1, 2, 5, 12, \dots$

باشد، جمله ششم این دنباله کدام است؟

- ۷۰ (۱) ۶۰ (۲) ۵۸ (۳) ۶۵ (۴)

۶. اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه دنباله حسابی تشکیل می‌دهند، اگر محیط مثلث ۹۰ واحد از مساحت آن کمتر باشد، محیط مثلث کدام

است؟

- ۴۸ (۱) ۶۰ (۲) ۸۰ (۳) ۳۶ (۴)

۷. در دنباله حسابی با جمله عمومی t_n ، اگر $t_7 + t_8 = 32$ باشد، آن‌گاه حاصل $t_7 + t_5 + t_8$ کدام است؟

- ۴۸ (۱) ۴۰ (۲) ۵۴ (۳) ۶۴ (۴)

۸. اگر 27^{x+2y} ، 9^{x+y} ، 3^{2x-y} سه جمله متوالی یک دنباله هندسی باشند، آن‌گاه کدام رابطه بین x و y صحیح است؟

- $x = 2y$ (۱) $x = -2y$ (۲) $x = 4y$ (۳) $x = -4y$ (۴)

۹. در دنباله هندسی $8, p^2, p$ ، جمله پنجم کدام است؟

- ۱۶ (۱) $8\sqrt{2}$ (۲) $16\sqrt{2}$ (۳) ۳۲ (۴)

۱۰. جمله صدویکم دنباله حسابی $\dots, \frac{-95}{4}, -24, \dots$ ، با جمله هشتم دنباله هندسی $a_7, \dots, 128$ برابر است. قدرنسبت دنباله

هندسی کدام است؟

- ۲ (۱) $\frac{1}{2}$ (۲) $\frac{1}{4}$ (۳) ۴ (۴)