گذرنامه
ورود به آینده شگفت انگیز

کتاب آموزش کامل مفاهیم و آزمون

هندسه دوازدهم

(ریاضی فیزیک)

علی صادقی

بسم الله الرحمن الرحیم

مقدمه

به‌نام خداوند جان و خرد
کزین برتر اندیشه برنگذرد

بسیار خرسندیم که کتاب «هندسه دوازدهم» از مجموعه «گذرنامه» را تقدیم دانش‌آموزان می‌کنیم. این کتاب مطالب هندسه پایهٔ دوازدهم را به‌صورت مفهومی آموزش می‌دهد. دانش‌آموز، ابتدا با مباحث هر فصل آشنا می‌شود و با مثال‌های فراوان بر حل آن‌ها اشراف پیدا می‌کند. سپس برای هر فصل، تعدادی پرسش‌های تشریحی و چهارگزینه‌ای را پاسخ می‌دهد تا بر موضوع تسلط یابد. برخی از پرسش‌ها که با علامت ❊ مشخص شده‌اند، کمی دشوار می‌باشند که برای به چالش کشیدن دانش‌آموزان علاقه‌مند طراحی شده است.

در ادامه سؤالات کنکورهای سراسری و یک آزمون چهارگزینه‌ای برای هر درس جهت خودآزمایی آورده شده است.

همچنین جهت آشنایی دانش‌آموز با آزمون‌های تشریحی، برای هر فصل یک آزمون تشریحی طراحی شده است.

انتظار می‌رود کتاب حاضر، همهٔ نیازهای دانش‌آموزان کلاس دوازدهم را در درس هندسه که مایل به تحصیل در بهترین دانشگاه‌ها و بهترین رشته‌های کشور هستند، پاسخ‌گو باشد.

در اینجا لازم می‌دانیم از مؤلف محترم آقای علی صادقی که کتاب را زیر نظر دبیر مجموعه تألیف کرده‌اند تشکر کنیم. هم‌چنین از خانم محبوبه شریفی (حروف‌چین و صفحه‌آرا)، مینا غلام احمدی (رسم شکل)، بهاره خدامی (گرافیست و طراح جلد) و همچنین طوبی عینی‌پور (نمونه‌خوان) سپاسگزاریم.

امیدواریم دبیران محترم هندسه و دانش‌آموزان و خانواده‌های عزیز آن‌ها ما را با اعلام نظرات، پیشنهادها و انتقادهای خود دربارهٔ این کتاب یاری فرمایند.

انتشارات مبتکران

فهرست

فصل ۱
ماتریس و کاربردها

فصل ۲
آشنایی با مقاطع مخروطی

فصل ۳
بردارها

فصل ۱

ماتریس و کاربردها

درس ۱ ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها

مفهوم ماتریس[1] که در ادامه به آن می‌پردازیم، یکی از پرکاربردترین مفاهیم ریاضی (هندسه تحلیلی) است؛ که نخستین بار در کارهای ویلیام هامیلتون (۱۸۰۵–۱۸۶۵) ریاضی‌دان ایرلندی و «کِیلی» ریاضی‌دان انگلیسی در نیمهٔ اول قرن نوزدهم مطرح شد و مبنای نظری این علم را کارل وایراشتراوس (۱۸۱۵–۱۸۹۷) و دیگران در نیمهٔ دوم قرن نوزدهم و نیمهٔ اول قرن بیستم پایه‌ریزی کردند. یکی از نقش‌های اصلی ماتریس‌ها آن است که ابزار اصلی محاسبات علمی ریاضیات هستند، درست همان نقشی که سابق بر این، اعداد بر عهده داشتند. از این نظر می‌توان گفت نقش امروز ماتریس‌ها همان نقش دیروز اعداد است.

البته ماتریس‌ها به معنایی اعداد و بردارها را در بر دارند. بنابراین می‌توان آنها را تعمیمی از اعداد و بردارها در نظر گرفت. از مهم‌ترین کاربرد ماتریس‌ها می‌توان به حل دستگاه معادلات خطی، رمزنگاری، شیمی، زیست‌شناسی و شاخه‌های مختلف فیزیک مانند فیزیک کوانتوم اشاره کرد، به‌طوری که هایزنبرگ (اولین کسی که در فیزیک مفهوم ماتریس را به کار برد)، اعلام کرد «تنها ابزار ریاضی من در مکانیک کوانتوم که به آن احتیاج دارم، ماتریس است.»

تعریف هر جدول مستطیلی از اعداد حقیقی، شامل تعدادی سطر و ستون، یک ماتریس نامیده می‌شود. هر عدد حقیقی واقع در هر ماتریس را درایه (عنصر) آن ماتریس می‌نامیم.

$$A=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & \sqrt{۲} & -۱ \\ \pi & \frac{۱}{۲} & ۴ & ۰ \\ -۷ & ۰/۲ & ۱۱ & ۹ \end{bmatrix}$$

تذکر۱: *معمولاً ماتریس‌ها را با حروف بزرگ مانند A, B, C و ... نمایش می‌دهیم. اگر ماتریسی مانند A دارای m سطر و n ستون باشد، می‌نویسیم $A_{m\times n}$ و می خوانیم (A ماتریسی از مرتبه m در n است.) برای هر درایه ماتریس دو اندیس در نظر می‌گیریم که اندیس سمت چپ جای سطر و اندیس سمت راست جای ستون آن درایه را مشخص می‌کند، بنابراین a_{ij} یعنی درایه واقع در سطر iام ستون jام ماتریس A. به عنوان مثال در ماتریس A (بالا) داریم: $a_{۱۴}=-۱$, $a_{۲۱}=\pi$, $a_{۳۳}=۱۱$.*

تذکر۲: *در ماتریس $A_{m\times n}$، درایه a_{ij} را درایه عمومی ماتریس A می‌نامیم که در آن $۱\le i\le m$ و $۱\le j\le n$ تغییر می‌کنند. همه درایه‌های ماتریس A را می‌توان توسط درایه عمومی نمایش داد و به اختصار می‌نویسیم: $A=[a_{ij}]$.[2]*

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱j} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲j} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{i۱} & a_{i۲} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m۱} & a_{m۲} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

مسئله ۱: **ماتریس‌های $A=[a_{ij}]_{۳\times ۳}$ با تعریف $a_{ij}=\begin{cases} j-i & : i<j \\ j+i & : i\ge j \end{cases}$ و $B=[i^۲-j]_{۲\times ۳}$ را مشخص کنید.**

پاسخ:

$$A=\begin{bmatrix} ۱+۱ & ۲-۱ & ۳-۱ \\ ۱+۲ & ۲+۲ & ۳-۲ \\ ۱+۳ & ۲+۳ & ۳+۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ & ۱ \\ ۴ & ۵ & ۶ \end{bmatrix}$$

i < j

i ≥ j

$$B=\begin{bmatrix} ۱^۲-۱ & ۱^۲-۲ & ۱^۲-۳ \\ ۲^۲-۱ & ۲^۲-۲ & ۲^۲-۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ & -۲ \\ ۳ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$$

1. Matrix

۲. هر ماتریس ۱×۱ مانند $[a_{۱۱}]$ را با عدد حقیقی $a_{۱۱}$ یکی می‌گیریم.

تست ۱: ماتریس $A=[a_{ij}]_{3\times 3}$ مفروض است. اگر $a_{ij}=\begin{cases}\sin\frac{i\pi}{j} & :i\ge j\\ \cos\frac{j\pi}{i} & :i<j\end{cases}$ باشد، در این صورت مجموع درایه‌های این ماتریس کدام است؟

۱) صفر ۲) -3 ۳) 1 ۴) -1

پاسخ: درایه‌های ماتریس A را محاسبه می‌کنیم. داریم:

سطر اول: $a_{11}=\sin\pi=0$, $a_{12}=\cos 2\pi=1$, $a_{13}=\cos 3\pi=-1$

سطر دوم: $a_{21}=\sin 2\pi=0$, $a_{22}=\sin\pi=0$, $a_{23}=\cos\frac{3\pi}{2}=0$

سطر سوم: $a_{31}=\sin 3\pi=0$, $a_{32}=\sin\frac{3\pi}{2}=-1$, $a_{33}=\sin\pi=0$

بنابراین مجموع درایه‌ها برابر است با -1، پس گزینهٔ ۴ صحیح است.

تذکر۳: *معمولاً برای سادگی، مجموع اعداد حقیقی a_1، a_2، a_3، ... و a_n را با استفاده از نماد $\sum$ (سیگما) به صورت: $\sum_{i=1}^{n} a_i$ می‌نویسیم که در آن a_i جمله عمومی نامیده می‌شود. یعنی $\sum_{i=1}^{n} a_i=a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$. برخی از ویژگی‌های نماد $\sum$ به صورت زیر می‌باشد:*

۱) $\sum_{i=1}^{n} k a_i=k\sum_{i=1}^{n} a_i \qquad (\sum_{i=1}^{n} k=nk)$

۲) $\sum_{i=1}^{n}(a_i+b_i+\cdots+x_i)=\sum_{i=1}^{n} a_i+\sum_{i=1}^{n} b_i+\cdots+\sum_{i=1}^{n} x_i$

۳) $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}=\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}$

تست ۲: اگر A یک ماتریس 10×10 با جمله عمومی $a_{ij}=\frac{1}{ij+1}-\frac{1}{j(i+1)+1}$ باشد، مقدار $\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{10} a_{ij}$ کدام است؟

۱) $\frac{276}{35}$ ۲) $\frac{195}{276}$ ۳) $\frac{275}{36}$ ۴) $\frac{36}{275}$

پاسخ: با توجه به نماد سیگما داریم:

$$\sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{10} a_{ij}=\sum_{j=1}^{2} a_{1j}+a_{2j}+\cdots+a_{10j}=(a_{11}+a_{21}+\cdots+a_{101})+(a_{12}+a_{22}+\cdots+a_{102})$$

$$=(\frac{1}{2}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\cdots+\cancel{\frac{1}{11}}-\frac{1}{12})+(\frac{1}{3}-\cancel{\frac{1}{5}}+\cancel{\frac{1}{5}}-\cancel{\frac{1}{7}}+\cdots+\cancel{\frac{1}{21}}-\frac{1}{23})=(\frac{1}{2}-\frac{1}{12})+(\frac{1}{3}-\frac{1}{23})=\frac{195}{276}$$

انواع ماتریس‌ها

۱- ماتریسی را که فقط دارای یک سطر باشد، ماتریس سطری می‌نامیم.

$A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 0 & 4\end{bmatrix}_{1\times 4}$, $B=[3]_{1\times 1}=3$

۲- ماتریسی را که فقط دارای یک ستون باشد، ماتریس ستونی می‌نامیم.

$A=\begin{bmatrix}-2\\ \pi\\ 0/7\end{bmatrix}_{3\times 1}$, $B=[-4]_{1\times 1}=-4$

۳- ماتریسی که تمام درایه‌های آن صفر باشند، ماتریس صفر می‌نامیم و آن را با نماد $\bar{O}$ نمایش می‌دهیم.

$\bar{O}_{2\times 3}=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

۴- ماتریسی که تعداد سطرها و ستون‌های آن با هم برابر باشند، ماتریس مربعی می‌نامیم.

$C_{3\times 3}=\begin{bmatrix}3&-1&0\\ \sqrt{2}&2&1\\ \pi&\sqrt{3}&0/3\end{bmatrix}$

تذکر۴: *اگر ماتریس A یک ماتریس مربعی $n\times n$ باشد، می‌گوییم ماتریس A، ماتریس مربعی مرتبه n است و می‌نویسیم A_n.*

تذکر۵: *اگر A ماتریس مربعی مرتبه n باشد، درایه‌های $a_{۱۱}$، $a_{۲۲}$، ... و a_{nn} را قطر اصلی ماتریس A می‌گوییم و قطر دیگر ماتریس را قطر فرعی ماتریس A می‌نامیم.*

$$A=\begin{bmatrix} a_{۱۱} & a_{۱۲} & \cdots & a_{۱n} \\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & \cdots & a_{۲n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n۱} & a_{n۲} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

قطر فرعی   قطر اصلی

تذکر۶: *در ماتریس مربعی A، به مجموع درایه‌های قطر اصلی، اثر ماتریس A گفته می‌شود و با نماد tr(A) نمایش داده می‌شود، یعنی:*

$$tr(A)=\sum_{i=۱}^{n} a_{ii}$$

انواع ماتریس‌های مربعی

۱- ماتریس مربعی که تمام درایه‌های غیر واقع بر (خارج از) قطر اصلی آن صفر باشند (درایه‌های واقع بر قطر اصلی می‌توانند صفر باشند یا نباشند)، ماتریس قطری می‌نامیم.

$$A=\begin{bmatrix} -۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix} \quad , \quad C=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix}=\bar{O}$$

۲- به ماتریس قطری که درایه‌های روی قطر اصلی آن با هم برابر باشند، ماتریس اسکالر یا تجانس می‌گوییم.

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۳ \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix} \quad , \quad C=[۴]=۴$$

۳- به ماتریس اسکالری که درایه‌های قطر اصلی آن عدد ۱ باشند، ماتریس واحد (همانی) می‌گوییم و آن را با I نمایش می‌دهیم. اگر این ماتریس از مرتبه n باشد، معمولاً آن را با I_n نمایش می‌دهیم.

$$I_۳=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

۴- به ماتریس مربعی که درایه‌های بالای قطر اصلی آن صفر باشند، یعنی $i<j\,;\,a_{ij}=۰$ (درایه‌های واقع بر قطر اصلی می‌توانند صفر باشند یا نباشند)، ماتریس پایین مثلثی می‌گوییم.

$$A=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۴ & ۲ & ۰ \\ ۵ & ۶ & ۳ \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ & ۰ \\ -۳ & ۰ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} ۰ & ۰ \\ ۴ & ۲ \end{bmatrix}$$

۵- به ماتریس مربعی که درایه‌های پایین قطر اصلی آن صفر باشند، یعنی $i>j\,;\,a_{ij}=۰$ (درایه‌های واقع بر قطر اصلی می‌توانند صفر باشند یا نباشند)، ماتریس بالا مثلثی می‌گوییم.

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۸ \\ ۰ & ۰ & ۹ \end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix} ۰ & -۲ & ۴ \\ ۰ & ۰ & ۹ \\ ۰ & ۰ & ۰ \end{bmatrix} \qquad C=\begin{bmatrix} ۷ & -۳ \\ ۰ & ۰ \end{bmatrix}$$

تذکر۷: *با توجه به تعریف ماتریس پایین مثلثی و بالا مثلثی، می‌توان نتیجه گرفت که ماتریس‌های I_n (ماتریس همانی مرتبه n) و $\bar{O}$ (ماتریس صفر مرتبه n)، هم پایین مثلثی و هم بالا مثلثی هستند.*

نتیجه۱: با توجه به انواع ماتریس‌های مربعی می‌توان نتایج زیر را به دست آورد:

الف) هر ماتریس اسکالر، ماتریسی قطری است ولی هر ماتریس قطری، لزوماً ماتریسی اسکالر نیست.

ب) اگر A_n هم پایین مثلثی و هم بالا مثلثی باشد:
- قطر اصلی همگی صفر باشند ← A_n ماتریس صفر است.
- قطر اصلی همگی صفر نباشند ← A_n ماتریس قطری است.

تست ۳: اگر ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases}۰ & i>j\\ -۱ & i=j\\ ۲i & i<j\end{cases}$ تعریف شده باشد، نوع ماتریس A کدام است؟

۱) قطری ۲) سطری ۳) بالا مثلثی ۴) پایین مثلثی

پاسخ: با توجه به جملهٔ عمومی ماتریس A داریم:

$$A=\begin{bmatrix}-۱ & ۲ & ۲\\ ۰ & -۱ & ۴\\ ۰ & ۰ & -۱\end{bmatrix}$$

بنابراین ماتریس A یک ماتریس بالامثلثی است.

تست ۴: چند مقدار برای k یافت می‌شود که ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ که $a_{ij}=\begin{cases}i+j & i=j\\ \dfrac{k^۲-۴k+۳}{i+j} & i\neq j\end{cases}$ یک ماتریس قطری باشد؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: در ماتریس قطری درایه‌های غیر واقع بر قطر اصلی همگی صفرند، بنابراین داریم:

$$\frac{k^۲-۴k+۳}{i+j}=۰\Rightarrow k^۲-۴k+۳=۰\Rightarrow\begin{cases}k=۱\\ k=۳\end{cases}$$

پس برای k دو مقدار یافت می‌شود.

تساوی بین دو ماتریس

دو ماتریس هم مرتبه $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ و $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ را مساوی می‌گوییم هرگاه درایه‌های آنها نظیر به نظیر با هم برابر باشند، به عبارت دیگر:

$$\forall\, i,j\,;\ a_{ij}=b_{ij}\Leftrightarrow [a_{ij}]=[b_{ij}]$$

مسئله ۲: اگر دو ماتریس $A=\begin{bmatrix}x-y & ۹\\ ۲ & z-۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۳ & x+y\\ ۲ & ۵\end{bmatrix}$ مساوی باشند، حاصل $x+y+z$ را به دست آورید.

پاسخ: با توجه به تساوی دو ماتریس داریم:

$$A=B\Rightarrow\begin{cases}x-y=۳\\ x+y=۹\\ z-۱=۵\end{cases}\Rightarrow x=۶\,,\ y=۳\,,\ z=۶\Rightarrow x+y+z=۱۵$$

تست ۵: از تساوی $\begin{bmatrix}x+۱ & ۱-y\\ ۴ & a^۳+a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۴x+۱\\ ۴ & y+۶\end{bmatrix}$، چند مقدار مثبت برای a وجود دارد؟

۱) ۲ ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) هیچ مقدار

پاسخ: با توجه به تساوی دو ماتریس داریم:

$$x+۱=۲\Rightarrow x=۱$$
$$۴x+۱=۱-y\xrightarrow{x=۱}۵=۱-y\Rightarrow y=-۴$$
$$y+۶=a^۳+a\xrightarrow{y=-۴}a^۳+a-۲=۰\Rightarrow(a^۳-۱)+(a-۱)=۰$$
$$\Rightarrow(a-۱)(a^۲+a+۱)+(a-۱)=۰\Rightarrow(a-۱)(a^۲+a+۲)=۰\Rightarrow\begin{cases}a-۱=۰\\ a^۲+a+۲=۰\end{cases}\Rightarrow a=۱$$

جمع و تفاضل ماتریس‌ها

برای جمع و تفاضل دو ماتریس هم مرتبه A و B کافی است درایه‌های دو ماتریس را نظیر به نظیر با هم جمع یـا از هـم کـم کـنیم کـه حاصـل مجموع یا تفاضل A و B، ماتریسی است مانند C که از همان مرتبه A و B است. به عبارت دیگر:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}\quad,\quad B=[b_{ij}]_{m\times n}\Rightarrow A\pm B=[a_{ij}]\pm[b_{ij}]=[a_{ij}\pm b_{ij}]=C$$

تذکر۸: *توجه شود جمع و تفاضل ماتریس‌ها زمانی امکان‌پذیر است (تعریف می‌شود) که ماتریس‌ها هم‌مرتبه باشند.*

$$\begin{bmatrix}۲&-۱&۳&۲\\ \sqrt{۲}&۵&-۱&۴\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}۰&۱&۴&-۷\\ ۱&۲&۳&-۹\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲+۰&-۱+۱&۳+۴&۲-۷\\ \sqrt{۲}+۱&۵+۲&-۱+۳&۴-۹\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲&۰&۷&-۵\\ ۱+\sqrt{۲}&۷&۲&-۵\end{bmatrix}$$

ضرب یک عدد حقیقی در یک ماتریس

برای ضرب یک عدد حقیقی در ماتریسی مانند A، آن عدد را در تمام درایه‌های ماتریس ضرب می‌کنیم، به عبارت دیگر:

$$A=[a_{ij}]_{m\times n}\ ,\ r\in\mathbb{R}\Rightarrow rA=r[a_{ij}]_{m\times n}=[r\,a_{ij}]_{m\times n}$$

$$\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۱&۲&-۱&۳\\ ۰&-۶&۴&۷\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲}&۱&-\frac{۱}{۲}&\frac{۳}{۲}\\ ۰&-۳&۲&\frac{۷}{۲}\end{bmatrix}$$

تست ۶: اگر $A=[i^۲j]_{۲\times۲}$ و $B=[i+i^۲j]_{۲\times۲}$ باشند، مجموع درایه‌های ماتریس $۲A+B$ کدام است؟

۱) ۴۰ ۲) ۵۱ ۳) ۶۰ ۴) ۷۰

پاسخ:

$$۲A+B=۲[i^۲j]_{۲\times۲}+[i+i^۲j]_{۲\times۲}=[i+۳i^۲j]_{۲\times۲}=C=[c_{ij}]_{۲\times۲}$$

$$c_{۱۱}=۱+۳=۴\ ,\ c_{۱۲}=۱+۶=۷\ ,\ c_{۲۱}=۲+۱۲=۱۴\ ,\ c_{۲۲}=۲+۲۴=۲۶$$

$$۲A+B=\begin{bmatrix}۴&۷\\ ۱۴&۲۶\end{bmatrix}\Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها}=۴+۷+۱۴+۲۶=۵۱$$

مسئله ۳: اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۲}$ و $B=[b_{ij}]_{۳\times۲}$ به صورت زیر تعریف شده باشند؛ ماتریس $۲A-۳B$ را با درایه‌هایش مشخص کنید.

$$a_{ij}=\begin{cases}i^۲-۱ & i=j\\ i-j & i>j\\ j-i & i<j\end{cases}\quad,\quad b_{ij}=\begin{cases}i^۲+۱ & i=j\\ i+j & i>j\\ i-j+۲ & i<j\end{cases}$$

پاسخ: می‌توان ابتدا هر یک از ماتریس‌های A و B را با درایه‌هایشان مشخص کرد و سپس ماتریس $۲A-۳B$ را بـه دسـت آورد، ولـی مـا ابتدا جملهٔ عمومی ماتریس $۲A-۳B$ را به صورت زیر مشخص می‌کنیم و در ادامه درایه‌های این ماتریس را به دست می‌آوریم. بنابراین:

$$۲A-۳B=۲[a_{ij}]-۳[b_{ij}]=[۲a_{ij}-۳b_{ij}]=C=[c_{ij}]$$

$$c_{ij}=\begin{cases}۲i^۲-۲-۳i^۲-۳ & i=j\\ ۲i-۲j-۳i-۳j & i>j\\ ۲j-۲i-۳i+۳j-۶ & i<j\end{cases}\Rightarrow c_{ij}=\begin{cases}-i^۲-۵ & i=j\\ -i-۵j & i>j\\ -۵i+۵j-۶ & i<j\end{cases}\Rightarrow ۲A-۳B=\begin{bmatrix}c_{۱۱}&c_{۱۲}\\ c_{۲۱}&c_{۲۲}\\ c_{۳۱}&c_{۳۲}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۶&-۱\\ -۷&-۹\\ -۸&-۱۳\end{bmatrix}$$

قرینه یک ماتریس

اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ماتریسی دلخواه باشد، قرینه ماتریس A را با $-A$ نمایش داده و از ضرب عدد -۱ در ماتریس A به دست می‌آید. واضح است که: $A+(-A)=\overline{O}$

خواص مهم جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس

جمع ماتریس‌ها و ضرب آنها در اعداد حقیقی از همان قوانین معمولی حساب تبعیت می‌کنند. بنابراین اگر $A=[a_{ij}]_{m\times n}$ ، $B=[b_{ij}]_{m\times n}$ و $C=[c_{ij}]_{m\times n}$ سه ماتریس هم‌مرتبه و r و s دو عدد حقیقی باشند، در این صورت داریم:

الف) $A+B=B+A$ (خاصیت جابه‌جایی جمع)

ب) $A+(B+C)=(A+B)+C$ (خاصیت شرکت‌پذیری جمع)

پ) $A+\bar{O}=\bar{O}+A=A$ (خاصیت عضو خنثی برای ماتریس صفر)

ت) $A+(-A)=(-A)+A=\bar{O}$ (خاصیت عضو قرینه)

ث) $A\pm C=B\pm C \Leftrightarrow A=B$ (خاصیت حذف جمع و تفاضل)

ج) $r(A\pm B)=rA\pm rB$

چ) $(r\pm s)A=rA\pm sA$

ح) $r(sA)=(rs)A$

خ) $rA=rB\,,\ r\neq ۰ \Rightarrow A=B$

د) $A=B\Rightarrow rA=rB$

ذ) $rA=\bar{O}\Rightarrow r=۰$ یا $A=\bar{O}$

همه روابط بالا به سادگی اثبات می‌شوند، برای نمونه روابط (ب)، (ث) و (ج) را ثابت می‌کنیم:

اثبات (ب):

$$\begin{aligned}A+(B+C)&=[a_{ij}]+([b_{ij}]+[c_{ij}])=[a_{ij}]+[b_{ij}+c_{ij}]=[a_{ij}+(b_{ij}+c_{ij})]\\&=[(a_{ij}+b_{ij})+c_{ij}]=[a_{ij}+b_{ij}]+[c_{ij}]=([a_{ij}]+[b_{ij}])+[c_{ij}]=(A+B)+C\end{aligned}$$

اثبات (ث):

$$A\pm C=B\pm C\Leftrightarrow\left[a_{ij}\pm c_{ij}\right]=\left[b_{ij}\pm c_{ij}\right]\Leftrightarrow\left[a_{ij}\right]\pm\left[c_{ij}\right]=\left[b_{ij}\right]\pm\left[c_{ij}\right]\Leftrightarrow\left[a_{ij}\right]=\left[b_{ij}\right]\Leftrightarrow A=B$$

اثبات (ج):

$$r(A\pm B)=r([a_{ij}]\pm[b_{ij}])=r[a_{ij}\pm b_{ij}]=[r(a_{ij}\pm b_{ij})]=[ra_{ij}\pm rb_{ij}]=[r\,a_{ij}]\pm[r\,b_{ij}]=r[a_{ij}]\pm r[b_{ij}]=rA\pm rB$$

تست ۷: اگر A ، B و C سه ماتریس هم‌مرتبه و r و s دو عدد حقیقی باشند، آن‌گاه کدام رابطه زیر صحیح نیست؟

۱) $(A+B)+C=A+(B+C)$ ۲) $r(A+sB)=rA+rsB$

۳) $A-B=B-A$ ۴) $(r+s)A=rA+sA$

پاسخ: با توجه به خواص جمع ماتریس‌ها و ضرب عدد در ماتریس، گزینه‌های ۱، ۲ و ۴ صحیح می‌باشند، ولی گزینهٔ ۳ صحیح نمی‌باشد، زیرا:

$A-B=-(B-A)$

ضرب ماتریس سطری در ماتریس ستونی

اگر A ماتریسی سطری و B ماتریسی ستونی باشد، به‌طوری که تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشد، در این صورت حاصلضرب A در B (با همین ترتیب)، یعنی $A\times B$ (یا AB) تعریف می‌شود و برای ضرب کافی است هر درایه ماتریس A را در درایه نظیرش در ماتریس B ضرب کرده و حاصل این ضرب‌ها را با هم جمع کنیم که در این صورت ماتریسی ۱×۱ یا عدد حقیقی حاصل می‌شود. به عبارت دیگر:

$$[a_{۱۱}\ \ a_{۱۲}\ \ \cdots\ \ a_{۱n}]_{۱\times n}\times\begin{bmatrix}b_{۱۱}\\b_{۲۱}\\\vdots\\b_{n۱}\end{bmatrix}_{n\times ۱}=[a_{۱۱}b_{۱۱}+a_{۱۲}b_{۲۱}+\cdots+a_{۱n}b_{n۱}]=a_{۱۱}b_{۱۱}+a_{۱۲}b_{۲۱}+\cdots+a_{۱n}b_{n۱}$$

$$[-۱\ \ ۲\ \ ۰\ \ ۳\ \ -۵]\times\begin{bmatrix}-۲\\۳\\۷\\-۱\\-۲\end{bmatrix}=(-۱)(-۲)+۲\times۳+۰\times۷+۳\times(-۱)+(-۵)\times(-۲)=۲+۶+۰+(-۳)+۱۰=۱۵$$

ضرب ماتریس‌ها (ضرب ماتریس در ماتریس)

اگر A ماتریسی $m\times p$ و B ماتریسی $p\times n$ باشد (تعداد ستون‌های ماتریس A با تعداد سطرهای ماتریس B برابر باشد)، در این صورت $A\times B$ قابل تعریف بوده و اگر فرض کنیم $A\times B=C$، ماتریس C ماتریسی $m\times n$ است که درایه سطر iام، ستون jام آن یعنی c_{ij} از ضرب سطر iام A در ستون jام B به دست می‌آید، یعنی:

$$c_{ij}=\text{سطر } i\text{ام } A \times \text{ستون } j\text{ام } B$$

$$c_{ij}=\begin{bmatrix} a_{i۱} & a_{i۲} & \cdots & a_{ip}\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} b_{۱j}\\ b_{۲j}\\ \vdots\\ b_{pj}\end{bmatrix}=a_{i۱}b_{۱j}+a_{i۲}b_{۲j}+\cdots+a_{ip}b_{pj}=\sum_{k=۱}^{p}a_{ik}b_{kj}$$

تذکر ۹ *(شرط انجام‌پذیری ضرب دو ماتریس): شرط آن‌که بتوان دو ماتریس $A=[a_{ij}]$ و $B=[b_{ij}]$ را در هم ضرب کرد آن است که تعداد ستون‌های ماتریس اول با تعداد سطرهای ماتریس دوم برابر باشد، یعنی:*

$$A_{m\times p}\times B_{p\times n}=C_{m\times n}$$

مسئله ۴: برای هر حالت $A\times B$ و $B\times A$ را در صورت امکان محاسبه کنید.

الف) $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۴\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۱ & ۲ & ۳\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & -۱\\ -۱ & ۰ & ۱ & -۲\\ ۳ & ۱ & -۱ & ۰\end{bmatrix}$

ب) $A=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰\\ ۲ & -۱ & -۱\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۲\\ -۱ & ۲\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}$

پ) $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix} -۱ & ۰\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}$

پاسخ:

الف) ماتریس A، ۳×۳ و ماتریس B، ۳×۴ می‌باشد، بنابراین $A\times B=C$ تعریف می‌شود که ماتریسی ۳×۴ است، ولی $B\times A$ تعریف نمی‌شود، پس:

$$c_{۱۲}=\text{سطر اول } A\times\text{ستون دوم } B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۴\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۲\\ ۰\\ ۱\end{bmatrix}=۱\times ۲+(-۱)\times(۰)+۴\times ۱=۲+۰+۴=۶$$

$$c_{۳۲}=\text{سطر سوم } A\times\text{ستون دوم } B=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۲\\ ۰\\ ۱\end{bmatrix}=۲+۰+۳=۵$$

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۴\\ ۰ & ۰ & ۰\\ ۱ & ۲ & ۳\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ & -۱\\ -۱ & ۰ & ۱ & -۲\\ ۳ & ۱ & -۱ & ۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱+۱+۱۲ & ۲+۰+۴ & ۳-۱-۴ & -۱+۲+۰\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۱-۲+۹ & ۲+۰+۳ & ۳+۲-۳ & -۱-۴+۰\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۴ & ۶ & -۲ & ۱\\ ۰ & ۰ & ۰ & ۰\\ ۸ & ۵ & ۲ & -۵\end{bmatrix}$$

ب) ماتریس A، ۲×۳ و ماتریس B، ۳×۲ می‌باشد، بنابراین $A\times B$ و $B\times A$ هر دو تعریف می‌شوند که اولی ۲×۲ و دومی ۳×۳ است، پس:

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰\\ ۲ & -۱ & -۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} -۱ & ۲\\ -۱ & ۲\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۰ & ۰\\ ۰ & ۰\end{bmatrix}=\bar{O}$$

$$B\times A=\begin{bmatrix} -۱ & ۲\\ -۱ & ۲\\ -۱ & ۲\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰\\ ۲ & -۱ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۳ & -۱ & -۲\\ ۳ & -۱ & -۲\\ ۳ & -۱ & -۲\end{bmatrix}$$

پ) ماتریس‌های A و B هر دو ۲×۲ می‌باشند، بنابراین $A\times B$ و $B\times A$ هر دو تعریف می‌شوند و هر دو ۲×۲ هستند، پس:

$$A\times B=\begin{bmatrix} ۲ & ۳\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} -۱ & ۰\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۶\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}$$

$$B\times A=\begin{bmatrix} -۱ & ۰\\ ۱ & ۲\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} ۲ & ۳\\ ۰ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۲ & -۳\\ ۲ & ۵\end{bmatrix}$$

تذکر مهم: *گاهی اوقات $A\times B$ تعریف می‌شود ولی $B\times A$ تعریف نمی‌شود (مسئله ۴ قسمت الف)، و در مواردی $A\times B$ و $B\times A$ هر دو تعریف می‌شوند ولی هم‌مرتبه نیستند (مسئله ۴ قسمت ب). اگر A و B هر دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبه باشند $A\times B$ و $B\times A$ هر دو تعریف می‌شوند و هم‌مرتبه نیز می‌باشند ولی در این حالت نیز ممکن است $A\times B\neq B\times A$ باشد (مسئله ۴ قسمت پ). بنابراین در حالت کلی خاصیت جابه‌جایی برای ضرب ماتریس‌ها برقرار نمی‌باشد.*

تست ۸: اگر $A=\begin{bmatrix}-۱ & ۴ & ۱\\ ۴ & ۱ & ۲\\ ۱ & ۲ & ۳\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۳ & ۱ & ۲\\ ۱ & ۵ & -۱\\ ۵ & ۲ & ۵\end{bmatrix}$ و $C=A\times B=[c_{ij}]$ باشند، آن‌گاه $c_{۲۳}$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۹ ۳) ۲۷ ۴) ۵

پاسخ: A و B هر دو از مرتبه ۳ می‌باشند، بنابراین $A\times B$ تعریف شده و از مرتبه ۳ می‌باشد. برای محاسبه $c_{۲۳}$ کافی است سطر دوم ماتریس A را در ستون سوم ماتریس B ضرب کنیم. داریم:

$$c_{۲۳}=\begin{bmatrix}۲ & ۱ & ۴\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۳\\ ۱\\ ۵\end{bmatrix}=۶+۱+۲۰=۲۷$$

تست ۹: اگر $A=[a_{ij}]_{۳\times۲}$، $B=[b_{ij}]_{۴\times۳}$ و $C=[c_{ij}]_{۵\times۴}$ سه ماتریس دلخواه باشند، کدام ضرب زیر انجام‌پذیر (تعریف شده) است؟

۱) $A\times(B\times C)$ ۲) $(C\times B)\times A$ ۳) $C\times A$ ۴) $B\times C$

پاسخ: گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ ۱) $B_{۴\times۳}\times C_{۵\times۴}$ تعریف نمی‌شود، بنابراین گزینهٔ ۱ انجام‌پذیر نیست.

گزینهٔ ۲) $(\underbrace{C_{۵\times۴}\times B_{۴\times۳}}_{D})\times A_{۳\times۲}=D_{۵\times۳}\times A_{۳\times۲}=E_{۵\times۲}$ بنابراین گزینهٔ ۲ انجام‌پذیر است.

گزینهٔ ۳) $C_{۵\times۴}\times A_{۳\times۲}$ تعریف نمی‌شود، بنابراین گزینهٔ ۳ انجام‌پذیر نیست.

گزینهٔ ۴) $B_{۴\times۳}\times C_{۵\times۴}$ تعریف نمی‌شود، بنابراین گزینهٔ ۴ انجام‌پذیر نیست.

خواص عمل ضرب ماتریس‌ها

۱) در حالت کلی ضرب ماتریس‌ها، خاصیت جابه‌جایی ندارد. یعنی تساوی $A\times B=B\times A$ در حالت کلی درست نمی‌باشد.

۲) شرکت‌پذیری: $A\times(B\times C)=(A\times B)\times C$

۳) توزیع‌پذیری (پخشی): $A\times(B\pm C)=(A\times B)\pm(A\times C)$

۴) ماتریس I عضو خنثی عمل ضرب است: $A_{m\times n}\times I_n=I_m\times A_{m\times n}=A_{m\times n}$

۵) فاکتورگیری: برای فاکتورگیری در ماتریس‌ها دقت کنید که عامل فاکتور از یک طرف ضرب شده باشد؛ به عنوان مثال در عبارت $A\times B+B\times C$ نمی‌توان از B فاکتور گرفت، چون B در جمله اول از سمت راست و در جمله دوم از سمت چپ ضرب شده است و ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد. در ضمن در عبارت‌هایی مانند $A\times B-۴A$ می‌توان از A فاکتور گرفت ولی فاکتورگیری به صورت روبه‌رو انجام می‌شود: $A\times B-۴A=A\times(B-۴I)$

۶) قانون حذف برقرار نمی‌باشد: $A\times B=A\times C\not\Rightarrow B=C$

به عنوان مثال اگر $A=\begin{bmatrix}۰ & ۲ & ۱\\ ۰ & ۱ & ۱\\ ۰ & ۴ & -۱\end{bmatrix}$، $B=\begin{bmatrix}۳ & ۲ & ۱\\ -۱ & ۱ & ۱\\ ۲ & ۲ & ۲\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۳ & ۲ & ۱\\ -۱ & ۱ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۱\end{bmatrix}$ باشند، می‌توان بررسی کرد که $A\times B=A\times C$ است ولی واضح است که $B\neq C$ است. (بررسی کنید!)

۷) اگر دو ماتریس برابر باشند، می‌توان طرفین تساوی را از یک سمت در ماتریس دلخواه ضرب کرد (توجه شود که ضرب تعریف شود):

$$B=C\Rightarrow A\times B=A\times C$$

$$B=C\Rightarrow B\times A=C\times A$$

۸) ممکن است ضرب دو ماتریس غیر صفر، ماتریس صفر باشد (به مسئله ۴ قسمت ب مراجعه کنید):

$$A\times B=\bar{O}\not\Rightarrow A=\bar{O} \text{ یا } B=\bar{O}$$

ولی اگر ضرب دو ماتریس A و B تعریف شود، می‌توان گفت:

$$A=\bar{O} \text{ یا } B=\bar{O}\Rightarrow A\times B=\bar{O}$$

۹) $rA=rB\,,\ r\neq ۰\Rightarrow A=B$

۱۰) $(rA)\times(sB)=(rs)(A\times B)\xrightarrow{r=s=-۱}(-A)\times(-B)=A\times B$

۱۱) $A\times(rB)=(rA)\times B=r(A\times B)$

تست ۱۰: مجموع ریشه‌های معادله $\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۲\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x & ۲ & ۱\\ -۱ & -x & ۰\\ ۱ & -۱ & ۱\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x\\ ۲\\ -۱\end{bmatrix}=۰$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۳ ۳) -۴ ۴) -۵

پاسخ: ابتدا ضرب را به ترتیب انجام می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۲\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x & ۲ & ۱\\ -۱ & -x & ۰\\ ۱ & -۱ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x+۳ & x & ۳\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}x+۳ & x & ۳\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ ۲\\ -۱\end{bmatrix}=x(x+۳)+۲x-۳=۰\Rightarrow x^۲+۵x-۳=۰$$

می‌دانیم در معادله درجه دوم مجموع ریشه‌ها برابر با $-\frac{b}{a}$ است، بنابراین:

$$\text{مجموع ریشه‌ها}=\frac{-b}{a}=\frac{-۵}{۱}=-۵$$

تست ۱۱: اگر $A=\begin{bmatrix}x & x\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}y & -۱\\ -۳ & ۲x\end{bmatrix}$ و داشته باشیم $A\times B-B\times A=\bar{O}$ ؛ مقدار $x+y$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: از آن‌جا که $A\times B-B\times A=\bar{O}$ می‌توان نتیجه گرفت $A\times B=B\times A$، بنابراین:

$$A\times B=\begin{bmatrix}x & x\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}y & -۱\\ -۳ & ۲x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xy-۳x & ۲x^۲-x\\ ۳y-۶ & \boxed{۴x-۳}\end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\begin{cases}۴x-۳=x\Rightarrow x=۱\\ ۳y-۶=۳x\Rightarrow y=۳\end{cases}\Rightarrow x+y=۴$$

$$B\times A=\begin{bmatrix}y & -۱\\ -۳ & ۲x\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x & x\\ ۳ & ۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xy-۳ & xy-۲\\ ۳x & \boxed{x}\end{bmatrix}$$

توجه شود که باید $x=۱$ و $y=۳$ تساوی درایه‌های دیگر را نیز برقرار کند (که برقرار می‌کند).

مسئله ۵: ماتریس M مقدار علف، کاهو و کلمی را نشان می‌دهد که هر خرگوش و آهو بـه طـور متوسـط در روز مـی‌خورنـد و ماتریس N تعداد خرگوش و آهوهایی را که گرگ یا شیر به طور متوسط در روز می‌خورند را نشان داده است. در روز هـر شیر به طور غیرمستقیم چقدر کاهو می‌خورد؟

$$M=\begin{array}{c}\\ \\ \\ \end{array}\begin{array}{cl}\begin{bmatrix}۳ & ۲ & ۱\\ ۲ & ۲ & ۳\end{bmatrix} & \begin{array}{l}\text{خرگوش}\\ \text{آهو}\end{array}\\ \begin{array}{ccc}\text{کلم} & \text{کاهو} & \text{علف}\end{array} & \end{array}\qquad N=\begin{array}{cl}\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۵ & ۲\end{bmatrix} & \begin{array}{l}\text{گرگ}\\ \text{شیر}\end{array}\\ \begin{array}{cc}\text{خرگوش} & \text{آهو}\end{array} & \end{array}$$

پاسخ: برای این‌که مشخص کنیم در روز هر شیر به طور غیرمستقیم چقدر کاهو می‌خورد، کافی اسـت مـاتریس $N\times M$ را تشـکیل دهـیم، درایه سطر دوم ستون دوم این ماتریس، جواب موردنظر است.

$$N\times M=\begin{bmatrix}۲ & ۱\\ ۵ & ۲\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}۳ & ۲ & ۱\\ ۲ & ۲ & ۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸ & ۶ & ۵\\ ۱۹ & \boxed{۱۴} & ۱۱\end{bmatrix}$$

توان در ماتریس (به توان رساندن ماتریس)

اگر A یک ماتریس مربعی باشد، آن‌گاه توان‌های صحیح و نامنفی برای آن به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A^0 = I \quad , \quad A^1 = A \quad , \quad A^2 = A \times A \quad , \quad \dots \quad , \quad A^n = A^{n-1} \times A$$

برای محاسبه توان‌های بزرگ ماتریس A، ابتدا توان دوم آن یعنی A^2 را به دست می‌آوریم. معمولاً توان دوم، I یا $-I$ یا $\bar{O}$ یا A یـا ضـریبی از A به دست می‌آید که در این حالت‌ها پیدا کردن توان‌های بالاتر بسیار راحت است. اگر چنین چیزی رخ نداد، A^3، A^4 و ... را به دست می‌آوریم تـا جایی که بتوان توان‌های ماتریس را حدس زد.

تست ۱۲: در صورتی‌که $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $A^5 = kA$ باشند، در این صورت k کدام است؟

۱) 3^3 ۲) 3^4 ۳) 3^5 ۴) 3^6

پاسخ: ابتدا A^2 را محاسبه می‌کنیم، پس:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 3\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^2 = 3A \xrightarrow{\times A^3} A^5 = 3A^4 \Rightarrow A^5 = 3(A^2) \times (A^2) \Rightarrow A^5 = 3(3A) \times (3A)$$

$$\Rightarrow A^5 = 3^3 A^2 \Rightarrow A^5 = 3^3(3A) \Rightarrow A^5 = 3^4 A \Rightarrow k = 3^4$$

مسئله ۶: در صورتی‌که $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه مجموع درایه‌های ماتریس A^6 را به دست آورید.

پاسخ: ابتدا A^2 را محاسبه می‌کنیم، پس:

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

حال A^3 را به دست می‌آوریم:

$$A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3\times 3 & 3\times 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\text{حدس}} A^6 = \begin{bmatrix} 1 & 6\times 3 & 6\times 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{مجموع درایه‌ها} = 1+1+1+18+18 = 39$$

تست ۱۳: اگر A ماتریس مربعی و I ماتریس واحد هم‌مرتبه با آن باشد و $A^2 = A - 2I$، کدام گزینه درست است؟

۱) $A^3 = A - 2I$ ۲) $A^4 = -3A + 2I$

۳) $A^3 = -A + 2I$ ۴) $A^4 = 3A + 2I$

پاسخ: طرفین رابطه $A^2 = A - 2I$ را در A ضرب می‌کنیم، داریم:

$$A^3 = A^2 - 2A \xrightarrow{\times A} A^4 = A^3 - 2A^2 \Rightarrow A^4 = (A^2 - 2A) - 2(A - 2I) \Rightarrow A^4 = A^2 - 4A + 4I$$

$$\Rightarrow A^4 = (A - 2I) - 4A + 4I \Rightarrow A^4 = -3A + 2I$$

مسئله ۷: در صورتی‌که $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}$ باشد، آن‌گاه درایه واقع بر سطر دوم، ستون اول از ماتریس A^3 را بیابید.

پاسخ: می‌دانیم $A^3=A^2\times A$، بنابراین برای یافتن درایه واقع بر سطر دوم، ستون اول ماتریس A^3، کافی است سطر دوم ماتریس A^2 را در ستون اول A ضرب کنیم. ابتدا سطر دوم A^2 را به دست می‌آوریم.

$$\text{سطر دوم } A^2=\begin{bmatrix}0 & -1 & 2\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & -1 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 3 & 4\end{bmatrix}$$

$$\text{درایه سطر دوم، ستون اول } A^3=\begin{bmatrix}4 & 3 & 4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}3\\ 2\\ 3\end{bmatrix}=12+6+12=30$$

چند نکته مهم

۱) اگر دو ماتریس قطری در هم ضرب شوند، حاصل نیز ماتریسی قطری است که درایه‌های قطر اصلی آن از ضرب درایه‌های متناظر قطر اصلی در دو ماتریس اولیه به دست می‌آید. (ضرب ماتریس‌های قطری دارای خاصیت جابه‌جایی است)

$$\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a' & 0 & 0\\ 0 & b' & 0\\ 0 & 0 & c'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a' & 0 & 0\\ 0 & b' & 0\\ 0 & 0 & c'\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}aa' & 0 & 0\\ 0 & bb' & 0\\ 0 & 0 & cc'\end{bmatrix}$$

۲) اگر ماتریس قطری به توان برسد، حاصل نیز ماتریسی قطری است که درایه‌های قطر اصلی آن از به توان رسیدن درایه متناظر قطر اصلی در ماتریس اول به دست می‌آید. یعنی:

$$\begin{bmatrix}a & 0 & 0\\ 0 & b & 0\\ 0 & 0 & c\end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix}a^n & 0 & 0\\ 0 & b^n & 0\\ 0 & 0 & c^n\end{bmatrix}$$

۳) اگر یک ماتریس قطری از سمت چپ، در یک ماتریس مربعی هم‌مرتبه خودش ضرب شود، هر درایه قطر اصلی ماتریس قطری در سطر نظیرش از ماتریس مربعی ضرب می‌شود ولی اگر ماتریس قطری از سمت راست ضرب شود، هر درایه قطر اصلی ماتریس قطری در ستون نظیرش از ماتریس مربعی ضرب می‌شود. به عبارت دیگر:

$$\begin{bmatrix}r_1 & 0 & 0\\ 0 & r_2 & 0\\ 0 & 0 & r_3\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_1a & r_1b & r_1c\\ r_2d & r_2e & r_2f\\ r_3g & r_3h & r_3k\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & k\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}r_1 & 0 & 0\\ 0 & r_2 & 0\\ 0 & 0 & r_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}r_1a & r_2b & r_3c\\ r_1d & r_2e & r_3f\\ r_1g & r_2h & r_3k\end{bmatrix}$$

۴) طبق مورد قبل می‌توان نتیجه گرفت اگر یک ماتریس اسکالر از هر سمتی در یک ماتریس هم‌مرتبه خودش ضرب شود، درایه واقع بر قطر اصلی ماتریس اسکالر در تمام درایه‌های ماتریس دیگر ضرب می‌شود، بنابراین ماتریس اسکالر در ضرب با هر ماتریس هم‌مرتبه خودش، خاصیت جابه‌جایی دارد.

$$\begin{bmatrix}r & 0 & 0\\ 0 & r & 0\\ 0 & 0 & r\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & k\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}r & 0 & 0\\ 0 & r & 0\\ 0 & 0 & r\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}ra & rb & rc\\ rd & re & rf\\ rg & rh & rk\end{bmatrix}$$

۵) اگر A ماتریس مربعی مرتبه n باشد، اگر قطر اصلی و عناصر زیر آن (بالا مثلثی با قطر اصلی صفر) یا قطر اصلی و عناصر بالای آن (پایین مثلثی با قطر اصلی صفر) همگی صفر باشند، در این صورت $A^n=\bar{O}$.

$$A=\begin{bmatrix}0 & 3 & 7\\ 0 & 0 & 11\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\Rightarrow A^3=\bar{O}$$

۶) مجموع، تفاضل و ضرب دو ماتریس بالامثلثی (پایین مثلثی)، یک ماتریس بالامثلثی (پایین مثلثی) است.

۷) اگر **A** یک ماتریس بالامثلثی (پایین‌مثلثی) باشد، بعضی از درایه‌های توان **n**ام این ماتریس قابل محاسبه است. به عنوان مثال درایه‌های روی قطر اصلی به توان **n** می‌رسند و در ضرب دو ماتریس بالامثلثی (پایین‌مثلثی) به صورت زیر عمل می‌شود:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} a^n & \cdots & \cdots \\ 0 & d^n & \cdots \\ 0 & 0 & f^n \end{bmatrix} \quad , \quad \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} a' & b' & c' \\ 0 & d' & e' \\ 0 & 0 & f' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa' & \cdots & \cdots \\ 0 & dd' & \cdots \\ 0 & 0 & ff' \end{bmatrix}$$

۸) از اتحادها در ضرب ماتریس‌ها نمی‌توان استفاده کرد، زیرا ضرب ماتریس‌ها خاصیت جابه‌جایی ندارد، به عنوان مثال:

$$(A+B)^2 \neq A^2 + 2A \times B + B^2$$

زیرا: $(A+B)^2 = (A+B)\times(A+B) = A^2 + A\times B + B\times A + B^2$

ولی اگر دو ماتریس **A** و **B** خاصیت جابه‌جایی داشته باشند، می‌توان از اتحادها استفاده کرد، به عنوان مثال:

$$A\times I = I \times A \Rightarrow \begin{cases} (A+I)^2 = A^2 + 2A + I \\ (A-I)\times(A+I) = A^2 - I \\ (A+I)^3 = A^3 + 3A^2 + 3A + I \end{cases}$$

مسئله ۸: در صورتی‌که $A^2 = A$ و $B = 2A - I$ و $A^3 + B^3 = mA + nI$ باشند، آن‌گاه مقادیر **m** و **n** را بیابید.

پاسخ:

$$A^2 = A \Rightarrow A^3 = A^2 \Rightarrow A^3 = A$$

$$B^3 = (2A - I)^3 = 8A^3 - 3(2A)^2 + 3(2A) - I^3 = 8A - 12A + 6A - I = 2A - I$$

$$A^3 + B^3 = A + 2A - I = 3A - I \Rightarrow \begin{cases} m = 3 \\ n = -1 \end{cases}$$

تست ۱۴: اگر $A^2 = A + I$ باشد، A^5 کدام است؟

۱) $5A + I$ ۲) $5A + 3I$ ۳) $5A + 5I$ ۴) $3A + 3I$

پاسخ:

$$A^2 = A + I \Rightarrow (A^2)^2 = (A+I)^2 \Rightarrow A^4 = A^2 + 2A + I \xrightarrow{A^2 = A+I} A^4 = A + I + 2A + I \Rightarrow A^4 = 3A + 2I$$

$$\xrightarrow{\times A} A^5 = 3A^2 + 2A \Rightarrow A^5 = 3(A+I) + 2A \Rightarrow A^5 = 5A + 3I$$

تست ۱۵: اگر $C = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ باشند، در ماتریس $(A\times C + B\times C)\times(C^2 \times B + C^2 \times A)$ مجموع درایه‌ها کدام است؟

۱) -8 ۲) 8 ۳) -16 ۴) 16

پاسخ:

$$(A\times C + B\times C)\times(C^2\times B + C^2\times A) = (A+B)\times C\times C^2\times(B+A) = (A+B)\times C^3\times(B+A)$$

$$= (A+B)\times(2I)^3\times(B+A) = (A+B)\times 8I\times(B+A) = 8(A+B)^2 = 8\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\times\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = 8\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 16 \\ -8 & -16 \end{bmatrix}$$

مجموع درایه‌ها $= -16$

تست ۱۶: اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $A(A - 2I)^4$ کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۱ ۳) -1 ۴) صفر

پاسخ:

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{قطر اصلی صفر}]{\text{بالا مثلثی با}} (A - 2I)^3 = \bar{O} \Rightarrow (A-2I)^4 = \bar{O}$$

$$\Rightarrow A(A-2I)^4 = \bar{O} \Rightarrow$$ مجموع درایه‌ها $= 0$

پرسش‌های تشریحی

۱. ماتریس‌های زیر را با نوشتن درایه‌هایشان مشخص کنید.

۱) $A = [i - ۲j]_{۳\times۳}$

۲) $B = [i + j^{۲}]_{۲\times۲}$

۳) $C = [ij]_{۳\times۳}$

۴) $D = [i^{۲} + j^{۲}]_{۲\times۳}$

۵) $E = [۲i + ۳j]_{۳\times۳}$

۶) $F = [f_{ij}]_{۳\times۳}\ ;\ f_{ij} = \begin{cases} i+j & i > j \\ ۲ & i = j \\ i-j & i < j \end{cases}$

۲. ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & x+y \\ z & ۱ & a+b \\ y & a+۱ & c^{۲} \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. مقادیر a، b، c، x، y و z را طوری بیابید که:

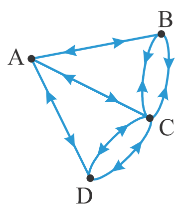
الف) A ماتریس قطری باشد.

ب) A ماتریس اسکالر باشد.

پ) A ماتریس بالامثلثی باشد.

ت) A ماتریس پایین مثلثی باشد.

۳. شکل مقابل چهار شهر A , B , C و D و جاده‌های بین آن‌ها را نشان می‌دهد. منظور از جاده بین دو شهر جاده‌ای است که مستقیماً و بدون واسطه، آن دو شهر را به هم مربوط می‌سازد. مثلاً بین B و C دو جاده بدون واسطه وجود دارد ولی بین B و D جاده‌ای مستقیماً وجود ندارد. ماتریسی بنویسید که تعداد جاده‌های بین شهرها در آن مشخص باشد.



۴. اگر $A = \begin{bmatrix} x+y & ۳ \\ x-y & ۰ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۵ & z-۱ \\ -۳ & ۰ \end{bmatrix}$ و $A = B$ باشند، در این صورت حاصل $۲x - y + z$ را به دست آورید.

۵. عبارات زیر را محاسبه کنید:

الف) $\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -۱ & ۴ & ۸ \\ ۵ & -۳ & ۴ \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۶ \\ ۵ & ۶ & ۷ \end{bmatrix}$

ب) $\begin{bmatrix} ۳ & ۹ \\ ۱ & -۲ \end{bmatrix} + ۲\begin{bmatrix} ۶ & ۰ \\ -۱ & ۵ \end{bmatrix} - ۳\begin{bmatrix} ۲ & -۴ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$

پ) $\begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۶ \\ ۴ & ۲ & ۷ \\ ۰ & ۳ & ۵ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۹ & ۰ & ۳ \\ ۰ & -۱ & ۳ \\ ۴ & ۹ & ۰ \end{bmatrix}$

ت) $\cos\theta\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} + \sin\theta\begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta \\ \cos\theta & \sin\theta \end{bmatrix}$

ث) $\sqrt{۲}\begin{bmatrix} ۳\sqrt{۲} & ۲\sqrt{۲} & ۰ \\ ۰ & ۱ & \sqrt{۲} \end{bmatrix} - \sin ۴۵^\circ\begin{bmatrix} \cos ۳۰^\circ & -\sin ۳۰^\circ & \cos ۴۵^\circ \\ \sin ۳۰^\circ & \cos ۳۰^\circ & \sin ۴۵^\circ \end{bmatrix}$

۶. فرض کنید $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۴ \\ ۵ & ۶ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} -۳ & -۲ \\ ۱ & -۵ \\ ۴ & ۳ \end{bmatrix}$ باشند، ماتریس X را طوری بیابید که $۲A + B - ۳X = \bar{O}$.