

مفاهیم اولیه منطق ریاضی

- منطق ریاضی یا منطق نمادین، دستور زبان ریاضی و مطالعه در ساختار جملات ریاضی است.
- گزاره:** هر جمله خبری درستی یا نادرستی آن مشخص باشد یا در آینده مشخص شود را گویند.
- جملات امری- پرسشی- عاطفی- تعجبی- دعائی جزو گزاره‌ها محسوب نمی‌شوند.
  - یک گزاره یا درست است یا نادرست  $(T, F)$  و دارای دو ارزش نخواهد بود.
  - حدس‌های ریاضی که هنوز درستی یا نادرستی آن‌ها ثابت نشده است، گزاره‌اند.
  - جملات خبری که نتوان درستی آن‌ها را تعیین کرد، گزاره نیستند.

تمرین کدام یک از موارد زیر گزاره‌اند و کدام نیستند؟

- کتاب‌ها را بردارید.
- آیا  $۱۴۰۳$  عددی مرکب است؟
- چه هوای خوبی!
- ای کاش بیشتر درس می‌خواندم!
- تو نیکی می‌کن و در دجله انداز
- مجموع چهار عدد فرد، عددی زوج است.
- عدد  $۲^{۵۰۱} + ۱$  عددی اول است.
- هر عدد زوج بزرگ‌تر از  $۲$  را می‌توان به صورت مجموع دو عدد اول نوشت. (حدس گلدباخ)
- فقط یک عدد اول  $p$  وجود دارد که  $p + ۲$  هم اول باشد.
- سروش قدبلند است.
- کنکور  $۱۴۰۲$  خیلی سخت بود.
- فیزیک درس راحت‌تری نسبت به ریاضی است.

**گزاره‌نما:** هر جمله خبری که شامی یک یا چند متغیر است که با جای‌گذاری متغیرها به گزاره تبدیل می‌شود.

تمرین کدام موارد زیر گزاره‌نما هستند؟

- او یک شاعر است.
- $x$  عددی فرد است.
- توان سوم عددی با خودش جمع شود، برابر  $۲$  است.
- در پرتاب تاس احتمال رخداد پیشامد  $A$  برابر  $\frac{۵}{۶}$  است.
- حاصل جمع دو برابر عدد گویا  $x$  و عدد گنگ  $y$  برابر  $\sqrt{۵} + ۳$  است.

برحسب این‌که گزاره‌ای ارزش درست یا نادرست دارد، در بررسی  $n$  گزاره با هم تعداد  $۲^n$  حالت خواهیم داشت:

$p$
$T$
$F$

$p$	$q$
$T$	$T$
$T$	$F$
$F$	$T$
$F$	$F$

$p$	$q$	$r$
$T$	$T$	$T$
$T$	$T$	$F$
$T$	$F$	$T$
$T$	$F$	$F$
$F$	$T$	$T$
$F$	$T$	$F$
$F$	$F$	$T$
$F$	$F$	$F$



**دامنه متغیر گزاره‌نما:** مجموعه مقادیری که می‌توان به جای متغیرها قرار داد تا گزاره‌نما تبدیل به گزاره شود (چه درست چه نادرست) را گویند. ( $D$ )

**مجموعه جواب گزاره‌نما:** مجموعه مقادیری که می‌توان به جای متغیرها قرار داد تا گزاره‌نما تبدیل به گزاره با ارزش درست شود را گویند. ( $S$ ) واضح است که  $S \subseteq D$

تمرین ۵-۴ مجموعه جواب هر مورد زیر را با توجه به دامنه مشخص کنید:

الف)  $D = \mathbb{R}, x^2 + 4x - 2 = 0$

ب)  $D = \mathbb{Z}, \frac{3x-4}{4} \leq -2$

پ) عدد  $x$  دو واحد از مضرب ۵ بیشتر است. ( $D = \mathbb{Z}$ )

**ترکیب گزاره‌ها (عطفی - فصلی)**

جمله خبری که معنا و مفهوم متضاد و مخالف با گزاره اصلی را دارد، نقیض گزاره می‌گویند و با  $\sim p$  نمایش داده می‌شود.

تمرین ۵-۴ گزاره «۵ عددی اول است» به صورت «۵ عددی اول نیست» نقیض می‌شود.

نکته ۵-۴ جدول لازم برای نقیض کردن گزاره‌ها

نماد یا کلمه	$\geq$	$\leq$	$>$	$<$	$=$	فرد	زوج	گویا
نقیض	$<$	$>$	$\leq$	$\geq$	$\neq$	زوج	فرد	گنگ

اگر دو گزاره  $p$  و  $q$  ارزش یکسان داشته باشند به صورت  $p \equiv q$  نمایش داده می‌شود.  
**گزاره ساده:** گزاره‌ای که از میان اجزاء سازنده و تشکیل دهنده آن نتوان گزاره‌ای خارج کرد.

تمرین ۵-۴ ۳ عددی فرد است.

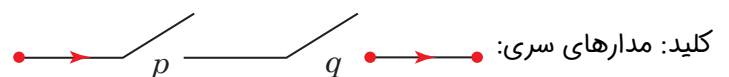
- ترکیب عطفی

- ترکیب فصلی

- ترکیب شرطی

نکته ۵-۴ ترکیب گزاره‌ها به سه شکل اصلی صورت می‌گیرد:

**ترکیب عطفی دو گزاره:** رابطه منطقی با نماد  $\wedge$  عاطف نامیده می‌شود و ترکیب دو گزاره به صورت  $p \wedge q$  نمایش داده می‌شود. زمانی این ترکیب  $T$  ارزیابی می‌شود که هر دو گزاره  $T$  باشند.



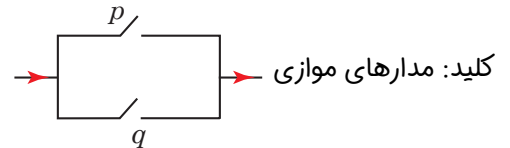
جدول ارزشیابی

$p$	$q$	$p \wedge q$
$T$	$T$	$T$
$T$	$F$	$F$
$F$	$T$	$F$
$F$	$F$	$F$

تمرین ارزش کدام گزاره درست است؟

- (۱) ۳ عددی فرد است و  $\sqrt{5}$  عددی گویا است.
- (۲) خورشید به دور زمین می‌چرخد و شیراز مرکز استان فارس است.
- (۳) ۷ عددی اول است و  $a \in \{a, b, c\}$
- (۴) عدد ۴۹ مربع کامل است و عدد  $8 + 5^9$  عددی اول است.

**ترکیب فصلی دو گزاره:** رابطه منطقی با نماد  $\vee$  فاصل نامیده می‌شود و ترکیب دو گزاره به صورت  $p \vee q$  نمایش داده می‌شود. زمانی این ترکیب  $T$  ارزیابی می‌شود که لاقل یک گزاره  $T$  باشد.



جدول ارزشیابی

$p$	$q$	$p \vee q$
$T$	$T$	$T$
$T$	$F$	$T$
$F$	$T$	$T$
$F$	$F$	$F$

تمرین کدام گزاره مرکب زیر ارزش درست دارد؟

- (۱)  $(5 < 10) \wedge (3 + 2 = 6)$
- (۲)  $(5 > 7) \vee (x^2 + 1 = 0)$
- (۳)  $(3 \neq \frac{27}{9}) \vee (1 \in \{1, 2, 5\})$
- (۴)  $(\sqrt{2} \in \mathbb{R}) \wedge (\{1\} \subseteq \{1, 2, 3\})$

توجه گزاره‌های همیشه درست را با  $T$  و همیشه نادرست را با  $F$  نمایش می‌دهیم. پس بدیهی خواهد بود که:

$\{T \vee q \equiv T\}$	$\{T \wedge q \equiv q\}$	$\{p \wedge \sim p \equiv F\}$
$\{F \wedge q \equiv F\}$	$\{F \vee q \equiv q\}$	$\{p \vee \sim p \equiv T\}$

ویژگی‌های اولیه ترکیب عطفی و فصلی:

(۳) شرکت پذیری

$$\begin{cases} (p \wedge q) \wedge r \equiv \dots\dots\dots \\ (p \vee q) \vee r \equiv \dots\dots\dots \end{cases}$$

(۲) قانون خود توانی

$$\begin{cases} p \wedge p \equiv p \\ p \vee p \equiv p \end{cases}$$

(۱) قانون جابه‌جایی:

$$\begin{cases} p \wedge q \equiv q \wedge p \\ p \vee q \equiv q \vee p \end{cases}$$

(۶) قانون جذب

$$\begin{cases} p \wedge (p \vee q) \equiv \dots\dots\dots \\ p \vee (p \wedge q) \equiv \dots\dots\dots \end{cases}$$

(۵) قانون دمورگان

$$\begin{cases} \sim (p \wedge q) \equiv \dots\dots\dots \\ \sim (p \vee q) \equiv \dots\dots\dots \end{cases}$$

(۴) قانون توزیع پذیری

$$\begin{cases} p \wedge (q \vee r) = \dots\dots\dots \\ p \vee (q \wedge r) \equiv \dots\dots\dots \end{cases}$$

نکته برای هر دو گزاره دلخواه  $p$  و  $q$ ، گزاره مرکب «اگر  $p$  آن‌گاه  $q$ » را ترکیب شرطی گویند و با نماد  $p \Rightarrow q$  نمایش داده می‌شود.

$p$  را مقدم (فرض) و  $q$  را تالی (حکم) می‌نامیم.

جدول ارزشیابی: هنگامی نادرست است که از  $T$ ، ارزش  $F$  را نتیجه بگیریم.

$p$	$q$	$p \Rightarrow q$
$T$	$T$	$T$
$T$	$F$	$F$
$F$	$T$	$T$
$F$	$F$	$T$

ترکیب دو گزاره دلخواه  $p$  و  $q$  به صورت «اگر  $p$  آن گاه  $q$  و برعکس» را ترکیب دوشرطی گویند و با نماد  $p \Leftrightarrow q$  نمایش داده می‌شود. ☆ نکته

این ترکیب دو شرطی هنگامی درست است که  $\leftarrow p \Rightarrow q$  و  $q \Rightarrow p$  هر دو درست باشند.  
 $\leftarrow p$  و  $q$  هم ارزش باشند.

جدول ارزشیابی به صورت زیر است:

$p$	$q$	$p \Leftrightarrow q$
$T$	$T$	$T$
$T$	$F$	$F$
$F$	$T$	$F$
$F$	$F$	$T$

ترکیب شرطی: ☆ نکته

- (۱) نحوه بیان
  - اگر  $p$  آن گاه  $q$
  - شرط کافی برای  $q$  است.
  - شرط لازم برای  $p$  است.
- (۲) اگر یک گزاره شرطی همواره درست باشد، آن را قضیه شرطی یا استلزام منطقی گویند.
- (۳) عکس قضیه شرطی، الزاماً درست نیست.
- (۴) به راحتی می‌توان نشان داد که:  $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$  بنابراین نقیض آن به صورت  $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q) \equiv \sim(p \wedge \sim q)$  است.
- (۵) عکس و نقیض یک گزاره شرطی هم‌ارز با خود گزاره شرطی است:  $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \sim p)$

نکات ترکیب دو شرطی: ☆ نکته

- (۱) نحوه بیان
  - اگر  $p$  آن گاه  $q$  و بالعکس
  - $p$  اگر و تنها اگر  $q$
  - $p$  شرط لازم و کافی برای  $q$  است.

(۲) نقیض ترکیب دو شرطی: کافی است یکی از جملات را نقیض کنیم:

$$\begin{cases} \sim(p \Leftrightarrow q) \equiv (\sim p \Leftrightarrow q) \\ \sim(p \Leftrightarrow q) \equiv (p \Leftrightarrow \sim q) \end{cases}$$

نقیض گزاره‌های زیر را بیان کنید: ☆ تمرین

- (۱) اگر  $n$  عددی اول باشد،  $2^n + 1$  عددی اول است.
- (۲)  $n$  عددی اول است اگر و فقط اگر  $2^n + 1$  عددی اول باشد.

تساوی  $x = y$  چه شرطی برای  $|x| = |y|$  است؟ :: تست

- (۱) لازم و کافی
- (۲) لازم غیرکافی
- (۳) غیرلازم و کافی
- (۴) نه لازم و نه کافی

کدام گزاره نادرست زیر، از نادرستی:  $(p \wedge q) \Rightarrow r$  نتیجه می‌شود؟ :: تست

- (۱)  $(p \vee r) \Leftrightarrow (q \vee r)$
- (۲)  $(p \wedge r) \Leftrightarrow (q \wedge r)$
- (۳)  $(p \wedge r) \Leftrightarrow (q \vee r)$
- (۴)  $(p \Rightarrow r) \Leftrightarrow (q \Rightarrow r)$

گزاره‌ای که خاصیتی را در مورد همه اعضهای یک مجموعه بیان می‌کند، گزاره با سور عمومی یا گزاره کلی نام دارد.  $\forall x: p(x)$  ☆ نکته

تمام مربعات اعداد حقیقی، نامنفی هستند. تمرین

درستی یک گزاره با سور عمومی هنگامی که دامنه متغیر با مجموعه جواب برابر باشد مورد تایید است:

(هیچ مثال نقضی نداشته باشیم)  $(S = D)$

کدام گزاره درست است؟ تست

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R} : x^2 \geq x & \quad (1) \\ \forall x \in \mathbb{R} : \tan x \cdot \cot x = 1 & \quad (3) \\ \forall x \in \mathbb{R} : x(x+1) = 2k & \quad (2) \\ \forall x \in \mathbb{R} : \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1 & \quad (4) \end{aligned}$$

گزاره‌ای که خاصیتی را در مورد بعضی از عضوهای یک مجموعه بیان می‌کند، سور وجودی یا گزاره جزئی نام دارد. نکته

به‌ازای برخی مقادیر  $x$  معادله  $x^2 - 3x + 2 = 0$  جواب دارد. تمرین

درستی یک گزاره با سور وجودی موقعی که حداقل یک عضو دامنه متغیر در مجموعه جواب باشد، مورد تاثیر است.

(لااقل یک مثال درست داشته باشیم.)  $(S \subseteq D)$

ارزش کدام مورد نادرست است؟ تست

$$\begin{aligned} \exists x \in \mathbb{N} ; 3x^2 + 5x + 2 = 0 & \quad (1) \\ \exists x \in \mathbb{Z} ; |x| < 1 & \quad (3) \\ \exists x \in \mathbb{Z} ; x^3 + 2x - 3 = 0 & \quad (2) \\ \exists x \in P ; x = 2k (k \in \mathbb{Z}) & \quad (4) \end{aligned}$$

اگر گزاره نهایبی دو متغیری داشته باشیم باید از سورهای دوگانه استفاده کرد. نکته

به‌طور کلی چهار حالت اصلی خواهیم داشت:

- ۱)  $\forall x \forall y ; p(x, y)$
- ۲)  $\exists x \exists y ; p(x, y)$
- ۳)  $\forall x \exists y ; p(x, y)$
- ۴)  $\exists x \forall y ; p(x, y)$

دقت کنید تعویض جای گزاره‌های با سور دوگانه مجاز نیست.

کدام گزینه با توجه به دامنه متغیر  $D$ ، ارزش گزاره نادرست است؟ تست

$$\begin{aligned} \forall x \in D \forall y \in D ; x + y = 12 \text{ و } D = \{1, 3\} & \quad (1) \\ \forall x \in D \exists y \in D ; x + y = 0 \text{ و } D = \{0, 1, -1\} & \quad (3) \\ \exists x \in D \exists y \in D ; x^2 + y^2 = 1 \text{ و } D = \{1, 2\} & \quad (2) \\ \exists x \in D \forall y \in D ; x + y \leq 4 \text{ و } D = \{1, 2, 3\} & \quad (4) \end{aligned}$$

نقیض گزاره‌های سوری به‌صورت زیر مطرح می‌شود: نکته

- ۱)  $\sim (\forall x ; p(x)) \equiv \exists x ; \sim p(x)$
- ۲)  $\sim (\exists x ; p(x)) \equiv \forall x ; \sim p(x)$
- ۳)  $\sim (\forall x \forall y ; p(x, y)) \equiv \exists x \exists y ; \sim p(x, y)$
- ۴)  $\sim (\exists x \exists y ; p(x, y)) \equiv \forall x \forall y ; \sim p(x, y)$
- ۵)  $\sim (\forall x \exists y ; p(x, y)) \equiv \exists x \forall y ; \sim p(x, y)$
- ۶)  $\sim (\exists x \forall y ; p(x, y)) \equiv \forall x \exists y ; \sim p(x, y)$

تمرین نقیض گزاره‌های سوری زیر را بنویسید.

$$(۱) \exists x \in \mathbb{R} \exists y \in \mathbb{R} ; x^2 > y$$

$$(۲) \forall x \in \mathbb{N} \exists y \in \mathbb{R} ; x = \sqrt{y}$$

$$(۳) \forall n \in \mathbb{N} \exists a \in \mathbb{R} ; ۴ < (a+1)^2 \leq ۲۵$$