جدول ارزش‌گذاری برای ترکیب شرطی دو گزاره دلخواه q و p به صورت زیر است:
توجه کنید که ترکیب شرطی دو گزاره تنها زمانی نادرست است که گزاره اول درست و گزاره دوم نادرست باشد.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

برای تفهیم بهتر جدول فوق از یک مثال ساده استفاده می‌کنیم:

اگر $\underbrace{\text{هزینه برگزاری جشن نیمه شعبان توسط دانش‌آموزان دبیرستان تامین شود}}_{p}$ آن‌گاه $\underbrace{\text{مدرسه جشن را برگزار می‌کند}}_{q}$

سطر اول جدول: اگر هزینه جشن توسط دانش‌آموزان تأمین شود مدرسه جشن را برگزار می‌کند یعنی کار **درستی** اتفاق افتاده است.
سطر دوم جدول: اگر هزینه جشن توسط دانش‌آموزان تأمین شود ولی مدرسه جشن را برگزار نکند کار **نادرستی** اتفاق افتاده است.
سطر سوم جدول: اگر هزینه جشن توسط دانش‌آموزان تأمین نشود ولی مدرسه جشن را برگزار کند (هزینه جشن را معلمین مدرسه تأمین کرده‌اند.) کار **درستی** اتفاق افتاده است.
سطر چهارم جدول: اگر هزینه جشن توسط دانش‌آموزان تأمین نشود و مدرسه هم جشن را برگزار نکند کار **درستی** اتفاق افتاده است.

نکته اگر در ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ »، گزاره اول (مقدم) نادرست باشد، درستی یا نادرستی گزاره دوم (تالی) مهم نخواهد بود و ارزش گزاره شرطی درست خواهد بود. در جدول ارزش‌گذاری ترکیب شرطی دو گزاره فوق، دو سطر آخر به انتفای مقدم (نفی مقدم) درست هستند.

مثال ۱۹ *ارزش گزاره‌های مرکب زیر را مشخص کنید.*

الف) اگر $6 = 3^2$ باشد آن‌گاه ۵ عددی اول است. *ب) اگر $-20 \geq -12$ آن‌گاه ۳ مربع کامل است.*

پاسخ:

الف) اگر $\underbrace{\text{۶=۳}^{\text{۲}}\text{ باشد}}_{\text{ن}}$ آن‌گاه $\underbrace{\text{۵ عددی اول است}}_{\text{د}}$ ← به انتفای مقدم ارزش گزاره مرکب درست است

ب) اگر $\underbrace{-20 \geq -12}_{\text{د}}$ آن‌گاه $\underbrace{\text{۳ مربع کامل است}}_{\text{ن}}$ ← ارزش گزاره مرکب نادرست است

نکته مهم دو هم‌ارزی مفید زیر را به خاطر بسپارید:

$$\begin{cases} 1)\ p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q \\ 2)\ p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p \end{cases}$$

مثال ۲۰ *با استفاده جدول ارزش‌گذاری هر دو مورد فوق را ثابت کنید.*

پاسخ:

$1)\ p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

p	q	$\sim p$	$p \Rightarrow q$	$\sim p \vee q$
د	د	ن	د	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د

$2)\ p \Rightarrow q \equiv \sim q \Rightarrow \sim p$

گزاره « $q \Rightarrow p$ » عکس ترکیب شرطی « $p \Rightarrow q$ » و گزاره $\sim q \Rightarrow \sim p$ عکس نقیض ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ است.

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	ن	د	ن	ن
ن	د	د	ن	د	د
ن	ن	د	د	د	د

نکته به تعاریف زیر توجه کنید:

توضیحات	فرمول ریاضی	
$k \in \mathbb{Z}$	$2k \pm 1$	اعداد فرد
$k \in \mathbb{Z}$	$2k$	اعداد زوج
$k \in \mathbb{Z}$	nk	مضارب عدد n

نکته در اثبات بسیاری از مسائل مهم از عکس نقیض استفاده می‌کنیم به طوری که به جای اثبات ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$ از $\sim q$ شروع می‌کنیم و به $\sim p$ می‌رسیم یعنی $\sim q \Rightarrow \sim p$ را ثابت می‌کنیم چون هر گزاره شرطی با عکس نقیض خود هم‌ارز است پس درستی گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ اثبات می‌شود.

مثال ۲۱ *ثابت کنید اگر $n \in \mathbb{Z}$ و n^2 عددی زوج باشد آن‌گاه n نیز زوج است.*

پاسخ: عکس نقیض گزاره فوق به صورت «اگر n زوج نباشد (فرد باشد) آن‌گاه n^2 نیز زوج نیست (فرد است)» است. حالا به جای قضیه صورت سؤال عکس نقیض آن را ثابت می‌کنیم.

$$n = 2k+1 \xrightarrow[\text{توان ۲ می‌رسانیم}]{\text{طرفین را به}} n^2 = (2k+1)^2 \Rightarrow n^2 = 4k^2 + 1 + 4k$$

$$\Rightarrow n^2 = \underbrace{4k^2 + 4k}_{*} + 1 \xrightarrow[\text{از ۲ فاکتور می‌گیریم}]{\text{در عبارت } *} n^2 = 2\underbrace{(2k^2 + 2k)}_{k'} + 1 \rightarrow n^2 = 2k' + 1$$

به این رسیدیم که n^2 نیز فرد است پس عکس نقیض گزاره را ثابت کردیم یعنی به درستی قضیه شرطی رسیدیم.

مثال ۲۲ *ثابت کنید اگر $n \in \mathbb{Z}$ و n^2 مضرب ۳ باشد n نیز مضرب ۳ است.* *(تمرین کتاب درسی)*

پاسخ: عکس نقیض گزاره شرطی را ثابت می‌کنیم.

عکس نقیض: اگر n مضرب ۳ نباشد آن‌گاه n^2 نیز مضرب ۳ نیست.

$$n = 3k+1 \xrightarrow[\text{توان ۲ می‌رسانیم}]{\text{طرفین را به}} n^2 = (3k+1)^2 \Rightarrow n^2 = \underbrace{9k^2 + 6k}_{*} + 1$$

$$\xrightarrow[\text{فاکتور می‌گیریم}]{\text{از ۳ در عبارت } *} n^2 = 3\underbrace{(3k^2 + 2k)}_{k'} + 1 \Rightarrow n^2 = 3k' + 1$$

پس n^2 نیز مضرب ۳ نیست.

می‌توانستیم به جای $3k+1$، حکم را برای $3k+2$ و $3k+4$ و... اثبات کنیم ما به خاطر راحتی $3k+1$ را بررسی کردیم.

نکته نقیض گزاره شرطی به صورت زیر است:

$$\sim (p \Rightarrow q) \xlongequal{p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q} \sim(\sim p \vee q) \xlongequal[\text{دمورگان}]{\text{طبق قاعده}} p \wedge \sim q$$

پس $\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$

نکته دو قانون زیر همواره درست است. (کاربرد آن‌ها در مباحث بعدی خواهد آمد.)

نام قاعده	قاعده	ردیف
حذف عاطف	$(p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$ $(p \wedge q \Rightarrow q) \equiv T$	۱
ادخال فاصل	$(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$ $(q \Rightarrow p \vee q) \equiv T$	۲

مثال ۳۳ با استفاده از جدول ارزش‌گذاری، گزاره‌های زیر را ثابت کنید. *(کار در کلاس کتاب درسی)*

الف) $(p \Rightarrow p \vee q) \equiv T$ (ادخال فاصل) ب) $(p \wedge q \Rightarrow p) \equiv T$ (حذف عاطف)

پاسخ: الف)

چون ستون مربوط به گزاره $p \Rightarrow p \vee q$ همواره درست است پس با گزاره T هم‌ارز است.

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow (p \vee q)$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	ن	د

ب)

p	q	$p \wedge q$	$p \wedge q \Rightarrow p$
د	د	د	د
د	ن	ن	د
ن	د	ن	د
ن	ن	ن	د

مثال ۳۴ نقیض گزاره $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ را به دست آورید.

پاسخ:

$$\sim[\overbrace{(p \Rightarrow q) \Rightarrow q}^{\overbrace{(p\Rightarrow q)}^{-p\vee q}\wedge\sim q}] \equiv (\sim p \vee q) \wedge \sim q \xlongequal[\text{شبه حذب}]{\text{طبق قاعده}} \sim q \wedge \sim p \equiv \sim (p \vee q)$$

مثال ۳۵ اگر p و q دوگزاره دلخواه باشند، کدام‌یک از گزاره‌های زیر همواره **نادرست** است؟ *(دبیرستان علامه حلی ـ دی ۹۹)*

۱) $p \vee (p \wedge \sim q)$ ۲) $\sim p \Rightarrow (p \vee q)$ ۳) $\sim (\sim p \Rightarrow q) \wedge p$ ۴) $(p \wedge q) \Rightarrow p$

پاسخ: گزینه «۳»

گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

گزینه «۱»: پس همواره نادرست نیست. $p \vee (p \wedge \sim q) \xlongequal{\text{قاعده جذب}} p$

گزینه «۲»: پس همواره نادرست نیست. $\sim p \Rightarrow (p \vee q) \xlongequal{p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q} p \vee (p \vee q) \equiv p \vee q$

گزینه «۳»: $\sim (\sim p \Rightarrow q) \wedge p \equiv \sim (p \vee q) \wedge p \equiv (\sim p \wedge \sim q) \wedge p \equiv (\sim p \wedge p) \wedge \sim q \equiv F \wedge \sim q \equiv F$

گزینه «۴»: قاعده حذف عاطف است که همواره درست است. $(p \wedge q) \Rightarrow p \equiv T$

ترکیب دو شرطی دو گزاره

هر گاه p و q دو گزاره باشند، گزاره مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را به صورت « $p \Leftrightarrow q$ » می‌نویسیم و آن را ترکیب دو شرطی p و q می‌نامیم. گزاره دو شرطی « $p \Leftrightarrow q$ » را به صورت‌های زیر می‌خوانیم.

۱. اگر p آن‌گاه q و برعکس.

۲. p اگر و تنها اگر q

۳. p شرط لازم و کافی برای q است.

نکته

با یک مثال راحت شرط لازم و کافی را بررسی می‌کنیم؛ «اگر نور خورشید به من برخورد کند آنگاه خورشید در آسمان است.» را در نظر بگیرید. فرض کنید شما داخل اتاقی هستید، برای اینکه نور خورشید به شما برسد، خورشید شرط لازم است برای رسیدن نور خورشید به شما، ولی شرط کافی نیست چرا که ممکن است خورشید در آسمان باشد ولی نور آن به شما برخورد نکند یعنی شما پشت دیواری ایستاده باشید. پس گزاره شرطی فوق نمی‌تواند یک گزاره دو شرطی هم باشد.

جدول ارزش‌گذاری ترکیب دو شرطی دو گزاره دلخواه q و p به صورت زیر است:
توجه کنید که گزاره دو شرطی $(p \Leftrightarrow q)$ زمانی درست است که هر دو گزاره q و p درست یا هر دو گزاره نادرست باشند به عبارت دیگر زمانی که $p \equiv q$ باشد.

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

نکته نقیض گزاره دو شرطی به صورت زیر است:

$$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \begin{cases} p \Leftrightarrow \sim q \\ \sim p \Leftrightarrow q \end{cases}$$

یعنی دو روش برای نقیض گزاره دو شرطی وجود دارد:
روش اول: $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv p \Leftrightarrow \sim q$
یعنی گزاره اول را عیناً می‌نویسیم و رابط دو شرطی را قرار می‌دهیم و گزاره دوم را نقض می‌کنیم.
روش دوم: $\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$ یعنی گزاره اول را نقض می‌کنیم و رابط دو شرطی را قرار داده و گزاره دوم را می‌نویسیم.

مثال ۳۶ *ارزش گزاره‌های دو شرطی زیر را مشخص کنید.*
الف) اگر ۲ عددی فرد باشد آن‌گاه ۵ عددی زوج است و برعکس.
ب) $۲ \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow$ مجموع دو عدد $\sqrt{۷}-۲$ و $\sqrt{۷}+۲$ گویا باشد.
پ) شرط لازم و کافی برای آن‌که نقطه‌ای واقع بر عمودمنصف یک پاره‌خط باشد، آن است که فاصله آن نقطه تا دو سر پاره‌خط برابر باشد. *(کتاب درسی)*

پاسخ:
الف) $\underbrace{\text{۲ عددی فرد است}}_{\text{ن}}$ اگر و تنها اگر $\underbrace{\text{۵ عددی زوج باشد}}_{\text{ن}}$ ← ارزش گزاره مرکب درست است

ب) $\underbrace{۲ \in \mathbb{Z}}_{\text{د}}$ اگر و تنها اگر $\underbrace{\text{مجموع دو عدد } \sqrt{۷}-۲ \text{ و } \sqrt{۷}+۲ \text{ گویا باشد}}_{\text{د}}$ ← ارزش گزاره مرکب درست است

پ) ارزش گزاره مرکب درست است.

نکته اگر ارزش هر یک از جملات گزاره دو شرطی به وضوح مشخص نبود از هم‌ارزی زیر استفاده می‌کنیم:

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

به عنوان مثال برای مشخص کردن ارزش گزاره «دو عدد مساوی هستند اگر و تنها اگر مربع‌هایشان هم با هم برابر باشد.» ابتدا ارزش گزاره شرطی « $\underbrace{\text{اگر دو عدد مساوی باشند}}_{\text{p}}$ آن‌گاه $\underbrace{\text{مربع هایشان برابر خواهد بود}}_{\text{q}}$ » را مشخص می‌کنیم.

برای مشخص کردن ارزش گزاره شرطی مذکور خواهیم داشت:

$$x, y \in \mathbb{R} \ , \ x = y \Rightarrow x^۲ = y^۲$$

پس ارزش گزاره شرطی مذکور درست است.
حالا ارزش گزاره شرطی «اگر مربع‌های دو عدد با هم برابر باشند آن‌گاه دو عدد با هم مساوی‌اند.» را مشخص می‌کنیم.

$$x, y \in \mathbb{R} \ , \ x^۲ = y^۲ \Rightarrow x = y$$

که این گزاره شرطی همواره درست نیست، چراکه اگر $x=-۱$ و $y=۱$ باشد $x^۲ = y^۲$ است ولی $x \neq y$ است. پس به طور کلی ارزش گزاره دو شرطی «دو عدد مساوی هستند اگر و تنها اگر مربع‌هایشان با هم برابر باشد» نادرست است.

$$p \Leftrightarrow q \equiv \underbrace{(p \Rightarrow q)}_{\text{د}} \wedge \underbrace{(q \Rightarrow p)}_{\text{ن}}$$

مثال ۳۷ *نقیض گزاره‌های مرکب زیر را به دست آورید.*
الف) ۳ عددی فرد است اگر و تنها اگر $۳^۲ = ۹$ باشد.
ب) اگر $۱۰ = ۳ + ۴$ باشد آن‌گاه $۳ > ۲$.

پاسخ:
الف) **روش اول:** ۳ عددی فرد است اگر و تنها اگر $۳^۲ = ۹$ نباشد.
روش دوم: ۳ عددی فرد نیست اگر و تنها اگر $۳^۲ = ۹$ باشد.
ب) $(۲ \geq ۳) \wedge (۴+۳=۱۰)$

مثال۲۸) با استفاده از قوانین ترکیب عطفی و فصلی و بدون استفاده از جدول، حاصل هر یک از عبارات زیر را بنویسید.

الف) $(\sim p \vee T) \wedge (F \vee \sim p) \equiv$

ب) $\sim (p \vee \sim p) \wedge \sim (q \wedge \sim q) \equiv$

پاسخ:

الف) $(\sim p \vee T) \wedge (F \vee \sim p) \overset{\text{قاعده همانی}}{\equiv} T \wedge \sim p \overset{\text{همانی}}{\equiv} \sim p$

ب) $\sim (p \vee \sim p) \wedge \sim (q \wedge \sim q) \underset{\text{خودنمایی}}{\overset{\text{قاعده}}{\equiv}} \sim (T) \wedge \sim (F) \equiv F \wedge T \equiv F$

مثال۲۹) بدون استفاده از جدول ارزش‌گذاری هم‌ارزی‌های زیر را ثابت کنید.

الف) $[\sim p \Rightarrow \sim (p \vee q)] \equiv \sim (\sim p \wedge q)$ (دبیرستان فرزانگان ـ دی ۱۴۰۰)

ب) $[p \Rightarrow (q \wedge (r \Rightarrow q))] \equiv \sim p \vee q$ (دبیرستان علامه حلی ـ دی ۹۹)

پاسخ:

الف) $[\sim p \Rightarrow \sim (p \wedge q)] \equiv \sim (\sim p) \vee \sim (p \vee q)$

$\equiv p \vee (\sim p \wedge \sim q)$

$\overset{\text{شبه‌جذب}}{\equiv} p \vee \sim q \equiv \sim(\sim p \wedge q)$

ب) $p \Rightarrow (q \wedge (r \Rightarrow q)) \equiv \sim p \vee [q \wedge (r \Rightarrow q)]$

$\equiv \sim p \vee [q \wedge (\sim r \vee q)]$

$\overset{\text{جذب}}{\equiv} \sim p \vee q$

مثال۳۰) گزاره $(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q)$ هم‌ارز با کدام گزاره است؟ (کنکور سراسری انسانی ۹۹)

۱) $\sim p$ ۲) p ۳) q ۴) $\sim q$

پاسخ: گزینه «۱»

$(p \Rightarrow q) \wedge (p \Rightarrow \sim q) \equiv (\sim p \vee q) \wedge (\sim p \vee \sim q)$

$\overset{\text{فاکتورگیری از } \sim p \vee}{\equiv} \sim p \vee (q \wedge \sim q)$

$\overset{\text{خودنمایی}}{\equiv} \sim p \vee F$

$\equiv \sim p$

سورها

عبارت‌های «به ازای برخی مقادیر» و «به ازای همه مقادیر» به سور معروف هستند. سور در لغت کلمه‌ای عربی است که به معنای حصار و دیوار شهر است.

سورها در ریاضی به دو دسته تقسیم می‌شوند:

سور عمومی : $\forall x$: به‌ازای هر x

سور وجودی : $\exists x$: به‌ازای بعضی (برخی) مقادیر x

سورها قبل از گزاره‌نماها قرار می‌گیرند و بدین وسیله گزاره‌هایی با ارزش درست یا نادرست ایجاد می‌کنند. به عنوان مثال $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ x^2 \geq 0$ که گزاره‌نمای $x^2 \geq 0$ با قرار گرفتن سور عمومی $\forall x \in \mathbb{R}$ به گزاره‌ای با ارزش درست تبدیل شده است.

نکته

برای تعیین ارزش درستی یا نادرستی سورهای عمومی و وجودی به صورت زیر عمل می‌کنیم:

سور عمومی $(\forall)$: اگر برای تمام اعداد دامنه درست باشد، ارزش گزاره سوری درست است بنابراین کافی است برای یک مقدار نادرست باشد که در این صورت ارزش گزاره نادرست است. یعنی در این حالت کافی است بتوانیم یک مثال نقض پیدا کنیم تا ارزش گزاره سوری نادرست باشد.

سور وجودی $(\exists)$: اگر به ازای یک مقدار درست باشد ارزش گزاره درست است و در غیر این صورت نادرست است.

مثال۳۱) معادل هر یک از گزاره‌های زیر، یک عبارت ریاضی به کمک نمادهای $\forall$ و $\exists$ بنویسید و ارزش آن‌ها را تعیین کنید.

الف) هر عدد حقیقی بزرگ‌تر از صفر است.

ب) مربع برخی از اعداد حقیقی از خودش کوچک‌تر است.

پ) همه اعداد حسابی، طبیعی هستند.

ت) مکعب بعضی از اعداد حقیقی با سه برابر همان عدد برابر است.

پاسخ:

الف) $\forall x \in \mathbb{R} : \quad x > 0$

برای به دست آوردن ارزش، چون سور عمومی است پس به دنبال مثال نقض می‌گردیم.

مثال نقض $x = -2$ که $x \not> 0$ پس گزاره سوری نادرست است.

ب) $\exists x \in \mathbb{R} : \quad x^2 < x$

برای به دست آوردن ارزش گزاره سوری، چون سوری وجودی است پس کافی است به ازای یک مقدار درست باشد تا ارزش آن درست شود.

$$x = \frac{1}{2} \Rightarrow (\frac{1}{2})^2 < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$$

چون به ازای $x = \frac{1}{2}$ گزاره درست است پس ارزش گزاره سوری درست است.

پ) $\forall x \in \mathbb{W} \quad : x \in \mathbb{N}$

$x = 0 \Rightarrow 0 \in \mathbb{W} \quad , \ 0 \notin \mathbb{N}$

چون سور عمومی است برای به دست آوردن ارزش آن کافی است یک مثال نقض بزنیم.

پس چون یک مثال نقض یافتیم، ارزش گزاره نادرست است.

ت) $\exists x \in \mathbb{R} : \quad x^3 = 3x$

چون به ازای $x = 0$ گزاره برقرار است پس گزاره سوری درست است.

نقیض گزاره‌ها سوری

برای نقض کردن گزاره‌های سوری دو مرحله زیر را انجام می‌دهیم:

۱. سور وجودی را به سور عمومی و برعکس تبدیل می‌کنیم.

۲. فعل گزاره را نفی می‌کنیم. (گزاره را نقض می‌کنیم.)

مثال ۳۲ *ارزش گزاره‌های سوری زیر را مشخص کرده و سپس نقیض آن‌ها را بنویسید.* *(دبیرستان رشد ـ دی ۱۴۰۰)*

الف) $\forall x \in \mathbb{R} \quad : x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$

ب) $\exists x \in \mathbb{R} \quad : x^2 \geq x$

پ) $[\forall x , y \in \mathbb{Z} \quad : x > y \Rightarrow x^2 > y^2] \Leftrightarrow [\exists x \in \mathbb{Q} : x + \frac{1}{x} = -2]$

پاسخ:

الف) $\forall x \in \mathbb{R} \quad : \underbrace{x > 0}_{p} \Rightarrow \underbrace{x^2 > 0}_{q}$

برای نوشتن نقیض گزاره باید گزاره شرطی $p \Rightarrow q$ را نقض کرده و $\forall$ را به $\exists$ تبدیل کنیم.

نقیض گزاره سوری برابر خواهد بود با: $\exists x \in \mathbb{R} \ : \ x > 0 \ \wedge \ x^2 \leq 0$

پس ارزش این گزاره سوری درست است.

ب) $\exists x \in \mathbb{R} \quad : x^2 \geq x$

چون سور وجودی است و به ازای $x = 1$ و $x = 3$ و $x = -2$ گزاره برقرار است پس گزاره سوری دارای ارزش درست است. حالا نقیض گزاره را می‌نویسیم:

$\forall x \in \mathbb{R} \quad : \quad x^2 < x$

پ) $\underbrace{[\forall x , y \in \mathbb{Z} \quad : x > y \Rightarrow x^2 > y^2]}_{p} \Leftrightarrow \underbrace{[\exists x \in \mathbb{Q} : x + \frac{1}{x} = -2]}_{q}$

برای یافتن ارزش گزاره سوری فوق باید ارزش گزاره p و ارزش گزاره q را به دست آورید اگر $p \equiv q$ باشد آن‌گاه ارزش گزاره درست خواهد بود در غیر این صورت ارزش آن نادرست است.

یافتن ارزش گزاره p: چون سور عمومی است پس کافی است یک مثال نقض بیاوریم تا ارزش گزاره نادرست شود.

مثال نقض: $x = 1 \ , \ y = -2$

پس ارزش گزاره p نادرست است.

ارزش گزاره q درست است چون اگر $x = -1$ باشد عبارت برقرار است. (حواسمان به سور وجودی است.) پس ارزش گزاره دو شرطی فوق نادرست است چون p گزاره‌ای با ارزش نادرست و q گزاره‌ای با ارزش درست است. یعنی $p \not\equiv q$.

نقیض گزاره سوری فوق به صورت زیر است:

روش اول: $[\forall x \ , \ y \in \mathbb{Z} \quad : \quad x > y \Rightarrow x^2 > y^2] \Leftrightarrow [\forall x \in \mathbb{Q} \quad : \ x + \frac{1}{x} \neq -2]$

روش دوم: $[\exists x , y \in \mathbb{Z} \quad : \quad x > y \ \wedge \ (x^2 \leq y^2)] \Leftrightarrow [\exists x \in \mathbb{Q} \quad : \ x + \frac{1}{x} = -2]$

۱. درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر را تعیین کنید.

الف) برای ۴ گزاره s و r و q و p جدول ارزش‌گذاری دارای ۱۶ ردیف است. درست ☐ نادرست ☐

ب) عبارت « $x^{۲}+۱=-۳$ » یک گزاره با ارزش درست است. درست ☐ نادرست ☐

پ) ساده شده عبارت $(\sim p \vee q) \wedge (p \vee (p \wedge q))$ برابر $p \wedge q$ است. درست ☐ نادرست ☐

ت) مجموعه جواب گزاره‌نمای $\frac{|x|}{x}=-۱$ برابر $\mathbb{Z}^{-}$ است. درست ☐ نادرست ☐

۲. دامنه متغیر و مجموعه جواب گزاره‌نماهای زیر را مشخص کنید. (دبیرستان رشد نو ـ دی ۱۴۰۰)

الف) $x^{۲} \leq ۹$

ب) $\frac{۱}{x-۱} \leq ۲$

پ) $\{n(n+۱)=۰ \mid n \in \mathbb{W}\}$

۳. ارزش گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف) ابوالوفا بوزجانی ریاضی‌دان است یا هندسه شاخه‌ای از ریاضیات است.

ب) معادله $\frac{x+۱}{۲x-۴}=\frac{۲x-۴}{x+۱}$ دو ریشه قابل قبول دارد و نمودار $x=۲$ خطی عمودی است.

پ) اگر $f=\{(۱,۶),(۶,۱)\}$ یک تابع باشد آنگاه $\{۰,۱,۲,۳\} \subseteq \mathbb{N}$.

ت) (معادله $۲x^{۲}+۳x+۱=۰$، دو ریشه حقیقی متمایز دارد.) $\Leftrightarrow$ (دامنه تابع $y=\frac{۲x+۵}{x^{۲}+۱}$ برابر $\mathbb{R}$ است.)

ث) (اگر ۴ مربع کامل باشد) آن‌گاه (حافظ شاعر است و خیام ریاضی‌دان نیست.) (دبیرستان رشد نو ـ دی ۱۴۰۰)

ج) هیچ‌کدام از اعداد گنگ، گویا نیستند.

چ) عدد صحیح مثبتی وجود دارد مانند x به طوری که $۱-۲x>۳$.

۴. نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) عبارت $(x^{۳}-۲۷)$ قابل تجزیه نیست یا $\sqrt{۵}$ عددی گنگ است.

ب) خورشید به دور زمین می‌چرخد و تهران پایتخت ایران است.

پ) اگر a زوج باشد آن‌گاه $a+۱$ فرد است.

ت) اگر $a \in \{b\}$ آن‌گاه $a=b$ و برعکس.

۵. ثابت کنید هر گاه n عددی طبیعی و $۵n+۳$ عددی زوج باشد، آن‌گاه n عددی فرد است.

۶. با استفاده از جدول ارزش‌گذاری نشان دهید که: (تمرین کتاب درسی)

الف) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$

ب) $\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$

۷. با استفاده از قوانین ترکیب گزاره‌ها (بدون استفاده از جدول ارزش‌گذاری) حاصل هر یک از هم‌ارزی‌های زیر را به دست آورید.

الف) $(p \Rightarrow q) \vee (\sim q \wedge p) \equiv$

ب) $(\sim p \wedge (\sim q \wedge r)) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r) \equiv$ (کنکور سراسری ریاضی ـ دی ۱۴۰۱)

پ) $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim p) \equiv$

ت) $(\sim p \Rightarrow \sim q) \wedge (p \vee q) \equiv$ (کنکور خارج کشور ریاضی ۹۹)