

فصل پنجم: (تابع)

درسنامه

درس ۱ (مفهوم تابع و بازنمایی‌های آن)

فرض کنید علی به ورزش فوتبال، رضا به ورزش والیبال و محمد به ورزش بسکتبال علاقه دارند. اگر مجموعه‌های A و B را به صورت زیر در نظر بگیریم، به هر عضو A دقیقاً یک عضو B نسبت داده شده است. به عبارت دیگر رابطه گفته شده یک تابع از مجموعه A به مجموعه B را تعریف می‌کند.

$$A = \{\text{محمد، رضا، علی}\}$$

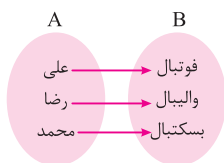
$$B = \{\text{بسکتبال، والیبال، فوتبال}\}$$

تابع

یک تابع از مجموعه A به مجموعه B، رابطه‌ای بین این دو مجموعه است که در آن به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده می‌شود.

نمایش یک تابع با استفاده از نمودار پیکانی

می‌توان تابع گفته شده را به صورت زیر هم نمایش داد.

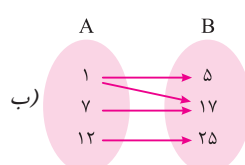
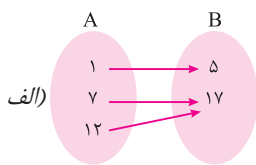


گفتار

همانگونه که گفته شد یک تابع از مجموعه A به مجموعه B، به هر عضو از مجموعه A دقیقاً یک عضو از مجموعه B را نسبت می‌دهد. اما می‌تواند عضوهای متفاوت مجموعه A را به یک عضو از B نسبت دهد.

مثال ۱

کدام یک از نمودارهای پیکانی زیر مشخص کننده یک تابع از مجموعه A به مجموعه B می‌باشد.



پاسخ: الف) رابطه نشان داده شده در قسمت الف یک تابع است زیرا به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از B نسبت داده شده است.

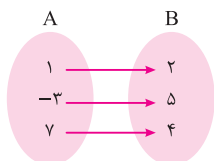
ب) رابطه نشان داده شده تابع نیست زیرا به یک عضو از A دو عضو از B نسبت داده شده است. به عدد ۱ از مجموعه A دو عضو ۵ و ۱۷ از مجموعه B نسبت داده شده است.

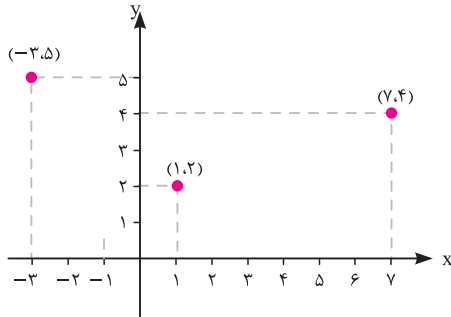
نمایش یک تابع به صورت زوج مرتب و نمودار مختصاتی

در سال‌های قبل یک نقطه به طول x و عرض y را در دستگاه مختصات به صورت (x, y) نمایش می‌دادیم. در این دستگاه نقاط (x, y) و (y, x) با یکدیگر تفاوت داشتند. به زوج (x, y) یک زوج مرتب می‌گوییم. x مؤلفه اول این زوج و y مؤلفه دوم آن است.

مثال

نمایش پیکانی یک تابع از مجموعه A به مجموعه B به صورت زیر است. این تابع را به صورت زوج‌های مرتب نمایش دهید و نمودار مختصاتی آن را رسم کنید.





پاسخ: نمایش زوج مرتبی تابع داده شده که آن را با حرف دلخواه f نمایش می‌دهیم به صورت مقابل است.

$$f = \{(1, 2), (-3, 5), (7, 4)\}$$

دقت کنید که زوج‌های مرتب نوشته شده مؤلفه‌های اول را از مجموعه A و مؤلفه‌های دوم را از مجموعه B اختیار می‌کنند. برای نمایش مختصاتی این تابع، زوج‌های مرتب را در دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم.

گفتنی

یک رابطه به صورت زوج مرتب، زمانی نشان دهنده یک تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی مؤلفه‌های اول یکسان نداشته باشند.

مثال ۲

کدام یک از رابطه‌های زیر یک تابع است.

الف) $f = \{(3, 5), (1, 7), (2, 12)\}$

ب) $g = \{(13, 15), (-5, 10), (-5, 15)\}$

پاسخ: رابطه f نشان دهنده یک تابع است چون هیچ یک از زوج‌های نشان داده شده مؤلفه‌های اول برابر ندارند. اما رابطه g تابع نیست زیرا دو زوج متمایز $(-5, 10)$ و $(-5, 15)$ مؤلفه‌های اول برابر دارند.

گفتنی

می‌توان گفت یک رابطه به صورت زوج مرتب زمانی نشان دهنده یک تابع است که مؤلفه اول همه زوج‌ها متفاوت باشد یا اگر زوج‌ها مؤلفه‌های اول یکسان داشتند، مؤلفه‌های دوم آنها نیز یکسان باشد. (زوج مرتب تکراری باشند).

مثال ۳

$f = \{(1, a-1), (2, 3b), (1, 10a), (2, 9)\}$

رابطه f یک تابع است. مقادیر a و b را به دست آورید.

پاسخ: چون رابطه f یک تابع است پس زوج‌های مرتب متمایز آن نباید مؤلفه‌های اول یکسان داشته باشند ولی اگر دو زوج با مؤلفه اول یکسان داشته باشیم باید مؤلفه دوم آنها نیز برابر باشند.

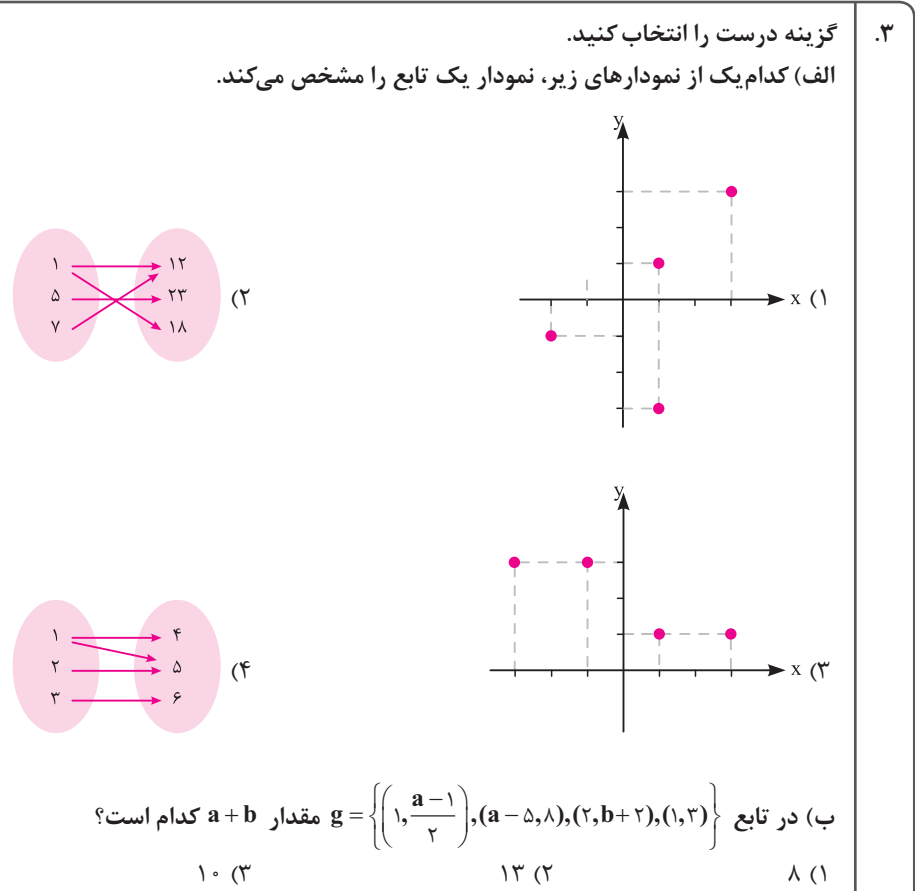
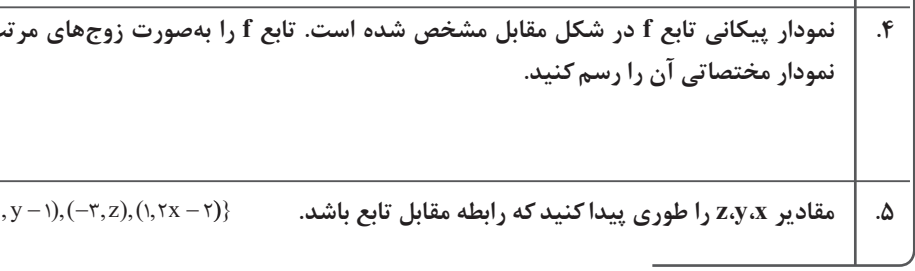
$$\begin{cases} (1, a-1) \\ (1, 10a) \end{cases} \Rightarrow a-1 = 10a \Rightarrow 10a - a = -1 \Rightarrow 9a = -1 \Rightarrow a = -\frac{1}{9}$$

$$\begin{cases} (2, 3b) \\ (2, 9) \end{cases} \Rightarrow 3b = 9 \Rightarrow b = \frac{9}{3} = 3$$

سؤالات امتحانی درس اول

۵

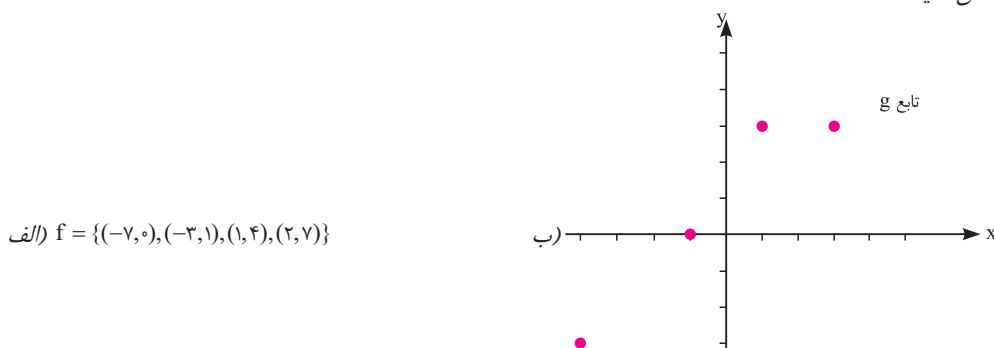
۱.	درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) رابطه‌ای که به هر عدد مثبت ریشه دوم آن را نسبت می‌دهد یک تابع است. ب) رابطه $A = \{(1, 3), (2, 3), (-3, 3)\}$ یک تابع است.	درست <input type="checkbox"/> نادرست <input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست <input type="checkbox"/>
۲.	جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. الف) در تابع $f = \{(1, 7), (1, a^2)\}$ مقدار a می‌باشد. ب) در تابع $g = \{(1, y), (1, 2x), (1, 3y-1)\}$ ، $x+y$ برابر با است.	

<p>۳. گزینه درست را انتخاب کنید. الف) کدام یک از نمودارهای زیر، نمودار یک تابع را مشخص می‌کند.</p> 	<p>ب) در تابع $g = \left\{ \left(1, \frac{a-1}{2} \right), (a-5, 8), (2, b+2), (1, 3) \right\}$ مقدار $a+b$ کدام است؟</p> <p>۸ (۱) ۱۳ (۲) ۱۰ (۳) ۵ (۴)</p>
<p>۴. نمودار پیکانی تابع f در شکل مقابل مشخص شده است. تابع f را به صورت زوج‌های مرتب بنویسید و نمودار مختصاتی آن را رسم کنید.</p> 	<p>۵. مقادیر z, y, x را طوری پیدا کنید که رابطه مقابل تابع باشد.</p> $f = \{(-x^2 + 1, 1), (5, 2), (z^2 - 1, 3), (1, 2), (z + 4, y - 1), (-3, z), (1, 2x - 2)\}$

درس ۲ (دامنه و برد تابع)

در نمایش یک تابع به صورت زوج‌های مرتب، مجموعه همه مؤلفه‌های اول را دامنه تابع و مجموعه همه مؤلفه‌های دوم را برد تابع می‌گوییم. همچنین در نمایش مختصاتی یک تابع، مجموعه شامل طول نقطه‌ها را دامنه تابع و مجموعه شامل عرض نقطه‌ها را برد تابع می‌گوییم. معمولاً دامنه تابعی مانند f را با D_f و برد تابع f را با R_f نمایش می‌دهیم.

مثال دامنه و برد توابع زیر را مشخص کنید.



پاسخ: الف) مجموعه مؤلفه‌های اول دامنه تابع و مجموعه مؤلفه‌های دوم برد تابع می‌باشند:

$$D_f = \{-7, -3, 1, 2\}$$

$$R_f = \{0, 1, 4, 7\}$$

$$D_f = \{-4, -1, 1, 3\}, \quad R_f = \{-3, 0, 3\}$$

ب) طول نقاط، تابع دامنه و عرض نقاط برد تابع می‌باشد.

نمایش جبری تابع

رابطه بین دامنه و برد یک تابع یا به عبارتی رابطه بین طول و عرض یک تابع را نمایش جبری تابع می‌گویند.

برای مثال تابع f را به گونه‌ای در نظر بگیرید که هر عدد طبیعی را به مربع آن نسبت دهد. نمایش زوج مرتبی این تابع را می‌توان به صورت زیر نشان داد.

$$f = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), \dots\}$$

همانطور که می‌دانیم مؤلفه‌های اول دامنه یا طول نقاط و مؤلفه‌های دوم برد یا عرض نقاط می‌باشند اگر طول نقاط را با x و عرض آنها را با $f(x)$ نشان دهیم، نمایش جبری تابع به صورت زیر می‌باشد.

که در این نمایش جبری، x یا همان دامنه، اعداد طبیعی می‌باشد.

مثال ۵ اگر دامنه تابع با نمایش جبری $f(x) = 2x^2 - 1$ مجموعه $D_f = \{-1, \sqrt{3}, 5\}$ باشد. برد این تابع را به دست آورید.

پاسخ: کافی است مقادیر مختلف دامنه را به جای x در نمایش جبری تابع جایگذاری کنیم تا مقادیر برد تابع را به‌زای آنها به دست آوریم:

$$f(x) = 2x^2 - 1$$

$$x = -1 \Rightarrow f(-1) = 2(-1)^2 - 1 = 2 - 1 = 1$$

$$x = \sqrt{3} \Rightarrow f(\sqrt{3}) = 2(\sqrt{3})^2 - 1 = 6 - 1 = 5$$

$$x = 5 \Rightarrow f(5) = 2(5)^2 - 1 = 50 - 1 = 49$$

$$f \text{ برد} \rightarrow R_f = \{1, 5, 49\}$$

تابع خطی

هر تابعی که بتوان آن را به شکل $f(x) = ax + b$ نمایش داد یک تابع خطی نامیده می‌شود.

مثال ۶ تابع خطی $y = 3x - 1$ را با دامنه/اعداد حقیقی رسم کنید.

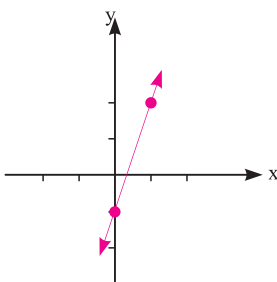
پاسخ: چون نمایش این تابع به صورت یک خط است و برای رسم یک خط به دو نقطه از خط احتیاج داریم و

همچنین می‌دانیم که دامنه تابع اعداد حقیقی است، پس کافی است دو عضو دلخواه از دامنه را انتخاب و به‌زای آنها

y یا همان برد تابع را به دست آوریم:

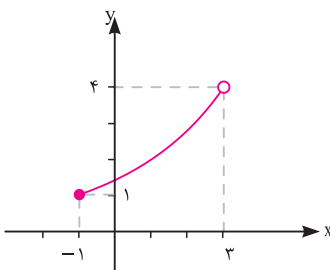
$$x = 0 \Rightarrow y = (3(0) - 1) = -1$$

$$x = 1 \Rightarrow y = (3(1) - 1) = 2$$

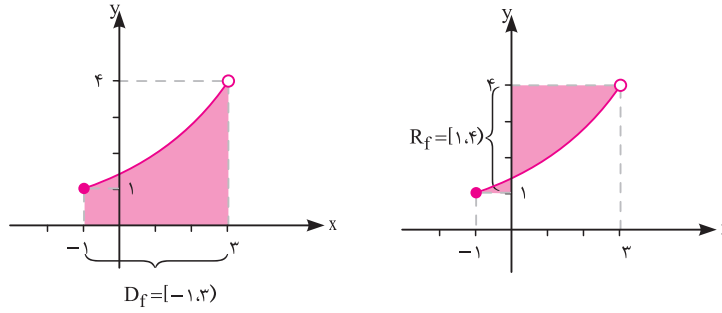


می‌توان دامنه و برد یک تابع را به راحتی از روی نمودار تابع مشخص کرد. کافی است برای پیدا کردن دامنه، نقاط تابع را روی محور x تصویر کرد و برای پیدا کردن برد نقاط تابع را روی محور y تصویر نمود.

مثال ۷ دامنه و برد تابع زیر را مشخص کنید.



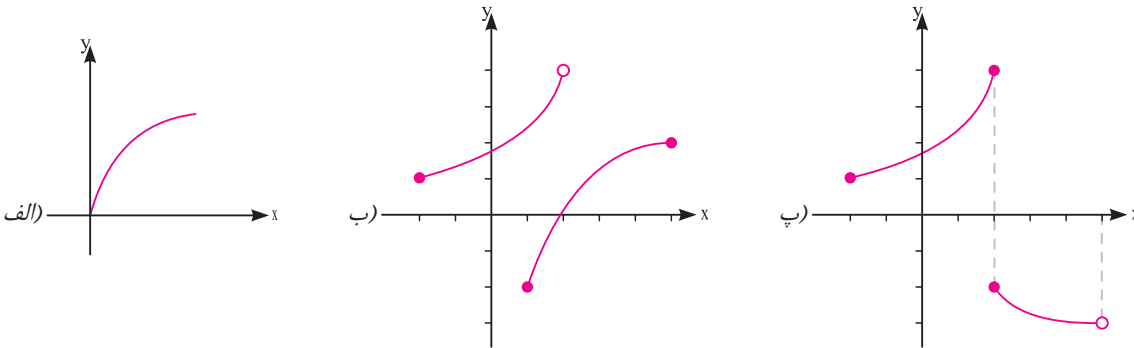
پاسخ: اگر تک تک نقاط تابع را روی محور X و محور Y تصویر کنیم دامنه و برد تابع دو بازه زیر به دست می آیند.



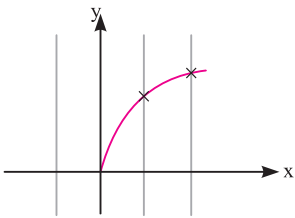
با توجه به تعریف تابع، نمودار یک رابطه زمانی می تواند نمودار تابع باشد که هر خطی موازی محور عرض ها نمودار را حداکثر در یک نقطه قطع کند.

کلیته

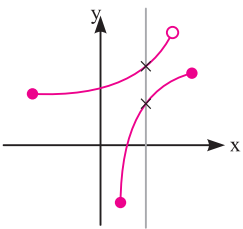
مثال ۸ کدام یک از نمودارهای زیر نمودار یک تابع است.



پاسخ: الف) هر خطی موازی محور Y (عرض) نمودار داده شده را حداکثر در یک نقطه قطع می کند. پس نمودار، نشان دهنده یک تابع می باشد.

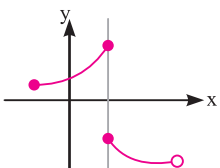


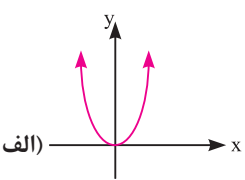
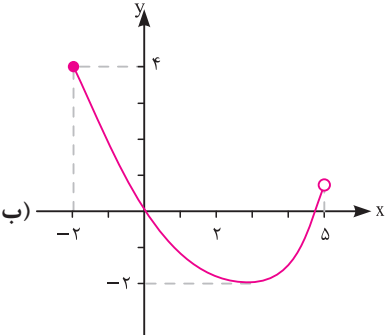
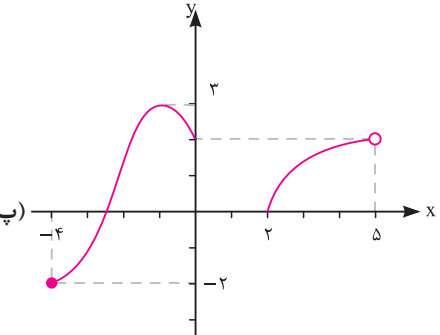
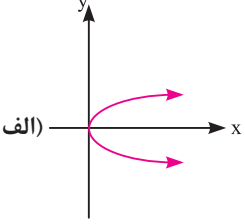
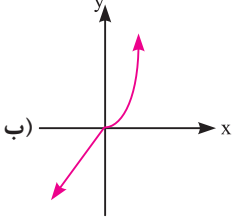
ب) نمودار داده شده، نمودار یک تابع نمی باشد چون خط نشان داده شده که موازی محور Y ها می باشد نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کرده است.



پ) باز هم نمودار داده شده مشخص کننده یک تابع نیست چون

حداقل یک خط موازی محور Y وجود دارد که نمودار تابع را در بیش از یک نقطه قطع کند:



<p>درستی یا نادرستی عبارات زیر را مشخص کنید. الف) مجموعه برد تابع $g = \{(1, 2a-1), (2, 3), (1, 5)\}$ دارای سه عضو است. ب) تابعی که هر عدد را به دو برابر آن منهای ۵ نسبت دهد یک تابع خطی است.</p> <p>درست <input type="checkbox"/> نادرست <input type="checkbox"/> درست <input type="checkbox"/> نادرست <input type="checkbox"/></p>	<p>۶.</p>
<p>جاهای خالی را با عبارات مناسب پر کنید. الف) برد تابع $f(x) = \sqrt{x}$ با دامنه $D_f = \{0, 2, 8\}$ برابر با مجموعه است. ب) مقدار $f(1) + f(-2)$ در تابعی با نمایش جبری $f(x) = -x^2 + 1$ برابر با است.</p>	<p>۷.</p>
<p>گزینه درست را انتخاب کنید. الف) تابع $f(x) = (a-4)x^2 + 2ax + b$ تابعی خطی است که $(3, -1)$ یکی از نقاط آن می باشد. $a + b$ کدام است. -۲۳ (۱) -۱۹ (۲) -۲۱ (۳) -۲۵ (۴) ب) در دامنه تابع $f(x) = 3x - 5$ با برد $R_f = \{0, -5, 8\}$ کدامیک از اعداد زیر وجود ندارد؟ ۰ (۴) $\frac{13}{3}$ (۳) $\frac{10}{3}$ (۲) $\frac{5}{3}$ (۱)</p>	<p>۸.</p>
<p>دامنه و برد توابع زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) </p> <p>ب) </p> <p>پ) </p>	<p>۹.</p>
<p>الف) </p> <p>ب) </p>	<p>۱۰. کدام یک از نمودارهای زیر، نمودار یک تابع است.</p>
<p>۱۱. نمودار تابعی را رسم کنید که دامنه آن بازه $[-1, 4]$ و برد آن بازه $[-5, 5]$ باشد.</p>	<p>۱۱.</p>