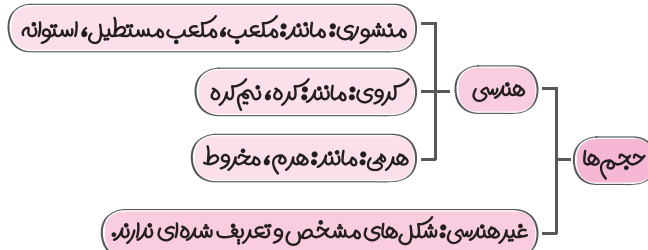


فصل ششم: سطح و حجم

درس نهم

حجم‌های هندسی

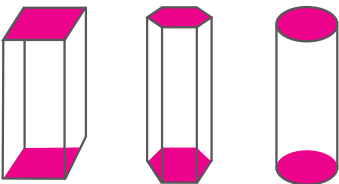
۱- حجم‌ها:



تذکره بعضی از حجم‌های هندسی ترکیبی از منشورها، کره‌ها و هرم‌ها هستند.

۲- حجم‌های منشوری:

تمام حجم‌های منشوری، حجم‌هایی هستند که بین دو صفحه موازی قرار می‌گیرند.



۳- اجزای منشورها:

۱. قاعده: به دو سطح موازی که حجم‌های منشوری بین آن‌ها قرار می‌گیرند، قاعده می‌گویند.
۲. وجه‌های جانبی: به سطح‌های اطراف قاعده‌ها و وجه‌های جانبی گویند.
۳. وجه: به تمام قاعده‌ها و وجه‌های جانبی، وجه گویند.
۴. یال: به محل برخورد سطح‌ها یال گویند.
۵. رأس: به نقطه برخورد هر سه سطح، رأس گویند.

مثال در مورد مکعب مقابل به سؤالات زیر پاسخ دهید:

الف. چند قاعده دارد؟ آن‌ها را نام ببرید:

۲ قاعده دارد. EGCD , ABFH

ب. چند وجه جانبی دارد؟ آن‌ها را نام ببرید:

۴ وجه جانبی دارد. BCDH , DHEF , AFEG , ABCG

پ. چند وجه دارد؟

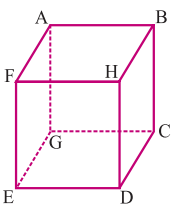
۶ وجه دارد. $2 + 4 = 6$

ت. چند یال دارد؟ آن‌ها را نام ببرید؟

۱۲ یال دارد.

ث. چند رأس دارد؟ آن‌ها را نام ببرید.

۸ رأس دارد.



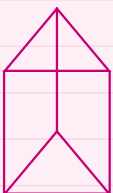
AB, BH, HF, FA

GC, CD, DE, EG

AG, BC, HD, FE

A, B, C, D, E, F, G, H

تمرین



۱. الف. حجم چه نام دارد؟

ب. چند وجه جانبی دارد؟

پ. چند یال دارد؟

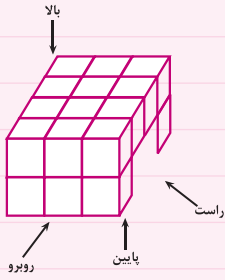
ت. چند رأس دارد؟

۲. الف. اگر یک استوانه را موازی با قاعده‌هایش برش بزنیم، سطح مقطع آن به چه شکلی دیده می‌شود؟

ب. یک استوانه از دید بالا چه شکلی است؟

پ. اگر یک مکعب را روی یک استوانه طوری قرار دهیم که رأس‌های مکعب روی محیط قاعده استوانه قرار گیرد، این حجم هندسی از بالا به چه شکلی دیده می‌شود؟ آن را رسم کنید.

۳. حجم مقابل را از ۴ جهت نگاه می‌کنیم این حجم از ۴ طرف به چه شکلی دیده می‌شود؟



محاسبه حجم‌های منشوری

۴- رابطه ریاضی به دست آوردن حجم منشورها:

برای به دست آوردن حجم هر منشوری کفایت از رابطه مقابل استفاده کنیم:

$V = s \cdot h \Rightarrow$ ارتفاع \times مساحت قاعده = حجم منشور

$$V = s \cdot h$$

$$V = (10 \times 10 \times 3) \times 50$$

$$V = 300 \times 50 = 15000 \text{ cm}^3$$

مثال حجم استوانه‌ای به شعاع قاعده ۱۰ سانتی‌متر و ارتفاع ۵۰ سانتی‌متر را حساب کنید. ($\pi \approx 3$)

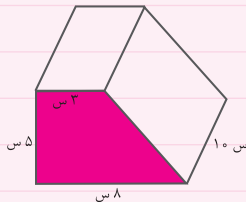
تمرین

۴. حجم مکعبی به ضلع ۲۰ سانتی‌متر چند سانتی‌متر مکعب است؟

۵. حجم مکعب مستطیلی به طول ۳۰ سانتی‌متر، عرض ۲۰ سانتی‌متر و ارتفاع ۱۵ سانتی‌متر را حساب کنید.

۶. حجم استوانه‌ای به قطر قاعده ۲۰۰ سانتی‌متر و ارتفاع ۵۰۰ سانتی‌متر را حساب کنید. ($\pi \approx 3$)

۷. حجم منشور مقابل را حساب کنید.



۸. حجم یک منشور سه پهلو که قاعده آن مثلث قائم‌الزاویه‌ای به اضلاع ۳ و ۴ و ۵ می‌باشد را اگر ارتفاع منشور ۱۰ باشد حساب کنید.

۹. در کارتنی به شکل مکعب مستطیل به طول و عرض و ارتفاع به ترتیب ۷۲ و ۴۵ و ۲۱ سانتی‌متر چند جعبه به شکل مکعب مستطیل و به ابعاد ۲۴ و ۱۵ و ۷ سانتی‌متر جای می‌گیرد؟

مساحت جانبی و کل

۵- رابطه ریاضی به دست آوردن مساحت جانبی منشورها:

به مجموع مساحت‌های هر یک از وجه‌های جانبی هر منشوری مساحت جانبی آن منشور گویند که برای محاسبه آن کفایت از رابطه زیر استفاده کنیم:

$S = p \cdot h$ ارتفاع \times محیط قاعده = مساحت جانبی منشور

$$S = p \cdot h$$

مثال مساحت جانبی استوانه‌ای به شعاع قاعده‌ای یا سانتی‌متر و ارتفاع ۵۰ سانتی‌متر را حساب کنید. ($\pi \approx 3$)

$$S = (2 \times 10 \times 3) \times 50 = 60 \times 50 = 3000 \text{ cm}^2$$

۶- رابطه ریاضی برای به دست آوردن مساحت کل منشورها:

برای به دست آوردن مساحت کل هر منشوری کفایت که مساحت جانبی آن را با مساحت ۲ تا قاعده منشور جمع کنیم:

مساحت کل $S_{\text{کل}} = S_{\text{جانبی}} + 2 \times$ مساحت قاعده $\times 2$ مساحت جانبی = مساحت کل

$$S_{\text{کل}} = S_{\text{جانبی}} + 2S_{\text{قاعده}}$$

مثال مساحت کل استوانه‌ای به شعاع قاعده ۱۰ سانتی‌متر و ارتفاع ۵۰ سانتی‌متر را حساب کنید. ($\pi \approx 3$)

$$S_{\text{کل}} = ph + 2S_{\text{قاعده}}$$

$$S_{\text{کل}} = (2 \times 10 \times 3) \times 50 + 2 \times (10 \times 10 \times 3)$$

$$S_{\text{کل}} = 60 \times 50 + 2 \times 300 = 3000 + 600 = 3600 \text{ cm}^2$$

تمرین

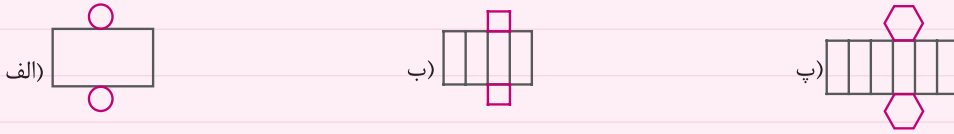
۱۰. حوضی به طول ۳ متر، عرض ۲ متر و ارتفاع ۱ متر داریم.

اگر بخواهیم بدنه‌های داخلی این حوض را رنگ کنیم، سطحی که باید رنگ شود چند متر مربع می‌باشد؟

۱۱. می‌خواهیم بدنه، کف و سقف منبع آبی به شکل استوانه را رنگ کنیم، اگر هر سانتی‌متر مربع چند آن نیاز به ۱۵/۰ کیلوگرم رنگ داشته

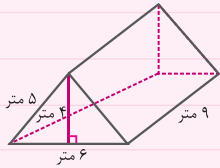
باشد با توجه به اینکه شعاع قاعده این منبع ۵۰ سانتی‌متر و ارتفاع ۱۰۰ سانتی‌متر است به چند کیلوگرم رنگ نیاز داریم؟ ($\pi \approx 3$)

۱۲. هر کدام از تصویرهای زیر، گسترده چه حجم هندسی می‌باشد؟



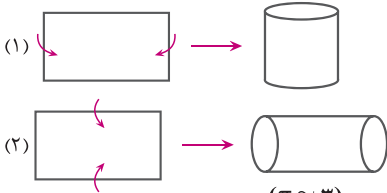
۱۳. یک چادر مسافرتی بزرگ مطابق شکل مقابل موجود است. چند متر مربع پارچه برای ساخت آن به کار

رفته است؟



حجم و سطح

۷- ساخت استوانه به کمک کاغذ مستطیل شکل:



با توجه به شکل‌های (۱) و (۲) اگر یک کاغذ مستطیل شکل را لوله کنیم، به شکل استوانه در می‌آید، همانطور که ملاحظه می‌کنید در هر دو حالت مساحت جانبی استوانه‌ها برابر است چون برابر با مساحت کاغذ مستطیل شکل است. اما حجم حالت (۱) از حجم حالت (۲) بیشتر است.

مثال در شکل‌های بالا اگر طول مستطیل ۱۲ و عرض آن ۶ باشد، حجم استوانه‌ها را در هر دو حالت به دست آورید: ($\pi \approx 3$)

(۱) = عرض مستطیل = ارتفاع استوانه: حجم (۱)

(۲) = طول مستطیل = ارتفاع استوانه: حجم (۲)

۱۲ = طول مستطیل = محیط قاعده استوانه

۶ = عرض مستطیل = محیط قاعده استوانه

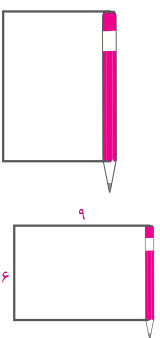
۳ = شعاع قاعده \Rightarrow ۴ = قطر قاعده \Rightarrow ۱۲ = ۳ × قطر قاعده

۲ = شعاع قاعده \Rightarrow ۴ = قطر قاعده \Rightarrow ۶ = ۳ × قطر قاعده

$V_{(1)} = S.h = 12 \times 6 \times 12 = 864$

$V_{(2)} = S.h = 6 \times 6 \times 6 = 216$

۸- ساخت استوانه از طریق دوران مستطیل:



با حرکت یک سطح در فضا، حجم ساخته می‌شود. حال اگر این سطح، مستطیل باشد، حجم حاصل یک استوانه است. به طور مثال اگر مطابق شکل مقابل کاغذی را دور مدادی بچسبانیم و آن را بچرخانیم، با چرخاندن مستطیل یک استوانه پدید می‌آید.

مثال یک کاغذ مستطیل شکل به طول ۹ و عرض ۶ را حول عرض آن دوران می‌دهیم. حجم

$V = S.h$

جسم حاصل را بیابید. ($\pi \approx 3$)

$V = 9 \times 9 \times 3 \times 6 = 1458$

تمرین

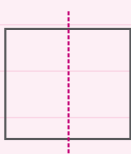
۱۴. یک کاغذ مستطیل شکل را به طول ۱۸ و عرض ۱۲ طوری لوله می‌کنیم که عرض‌های آن بهم بچسبند و یک استوانه ایجاد شود. ($\pi \approx 3$)

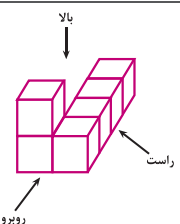
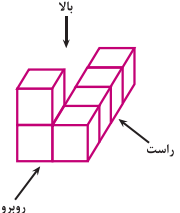
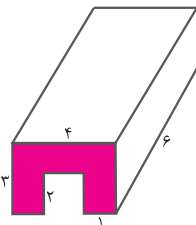
الف. حجم استوانه را حساب کنید. ب. مساحت جانبی استوانه را حساب کنید.

۱۵. یک کاغذ مستطیل شکل به طول ۸ و عرض ۵ را حول طول آن دوران می‌دهیم. حجم جسم حاصل را بیابید.

۱۶. شکل مقابل، مربعی به ضلع ۲۰ سانتی‌متر می‌باشد اگر آن را مطابق شکل حول خط چین که از وسط اضلاع آن عبور

کرده است. دوران دهیم، حجم جسم حاصل را بیابید. ($\pi \approx 3$)



۱	<p>درستی یا نادرستی هر یک از جملات زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف. استوانه یک حجم منشوری است.</p> <p>ب. حجم مکعبی به ضلع ۱ سانتی‌متر، ۱ سانتی‌متر مربع است.</p> <p>پ. برای ساختن مکعبی به ضلع ۲ سانتی‌متر، ۲۴ سانتی‌متر مربع مقوا لازم است.</p> <p>ت. از دوران مستطیل در فضا حجم ساخته می‌شود.</p> <p>درست <input type="checkbox"/> نادرست <input type="checkbox"/></p> <p>درست <input type="checkbox"/> نادرست <input type="checkbox"/></p> <p>درست <input type="checkbox"/> نادرست <input type="checkbox"/></p> <p>درست <input type="checkbox"/> نادرست <input type="checkbox"/></p>
۱	<p>جملات زیر را با کلمات یا اعداد مناسب کامل کنید.</p> <p>الف. حجم‌های بین دو سطح موازی قرار می‌گیرند.</p> <p>ب. مکعب مستطیل دارای یال می‌باشد.</p> <p>پ. گستردهٔ یک استوانه شامل یک مستطیل و دو است.</p> <p>ت. اگر یک استوانه را طوری برش بزنیم که دو قاعدهٔ آن را قطع کند، مقطع آن به شکل دیده می‌شود.</p>
۱	<p>در سؤالات چهار گزینه‌ای زیر گزینهٔ صحیح را مشخص کنید.</p> <p>الف. حجم مقابل ترکیبی از کدام حجم‌ها می‌باشد؟</p> <p>(۱) منشوری - کره (۲) کره - هرمی (۳) هرمی - منشوری (۴) کره - استوانه</p> <p>ب. منبعی آبی به شکل استوانه است که شعاع قاعدهٔ آن نیم متر و ارتفاعش ۲ متر است. این منبع چند لیتر آب می‌گیرد؟ ($\pi \approx 3$)</p> <p>(۱) ۱/۵ (۲) ۱۵۰ (۳) ۱۵۰۰ (۴) ۱۵۰۰۰</p> <p>پ. برای ساخت مکعبی به ضلع ۳۰ سانتی‌متر چند سانتی‌متر مربع مقوا لازم داریم؟</p> <p>(۱) ۲۷۰۰ (۲) ۹۰۰ (۳) ۵۴۰۰ (۴) ۳۶۰۰</p> <p>ت. ارتفاع یک منشور را ۴ برابر کرده‌ایم، حجم آن چند برابر می‌شود؟</p> <p>(۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸</p>
۰/۷۵	<p>تصویر از بالا، روبه‌رو و راست حجم مقابل را رسم کنید؟</p> 
۱	<p>حجم منشور مقابل را حساب کنید.</p> 
۱	<p>در حوضی به طول ۳ متر و عرض ۲ متر به اندازهٔ ۳۶ متر مکعب آب ریخته‌ایم. ارتفاع آب در این حوض چند متر بالا آمده است؟</p>
۰/۷۵	<p>ستونی به شکل منشور ۵ پهلوست که هر ضلع آن ۴ متر و ارتفاع آن ۳ متر است، می‌خواهیم بدنهٔ خالی این ستون را کاشی کاری کنیم، چند متر مربع کاشی لازم داریم؟</p>
۱/۵	<p>شکل مقابل گستردهٔ یک مکعب می‌باشد، با توجه به آن موارد زیر را به دست آورید.</p> <p>الف) حجم مکعب مستطیل</p> <p>ب) مساحت کل مکعب مستطیل</p> 
۱	<p>یک مقوا به طول و عرض ۱۲ و ۸ سانتی‌متر را به شکل استوانه به ارتفاع ۸ سانتی‌متر درآوردیم. حجم این استوانه را حساب کنید. ($\pi \approx 3$)</p>
۱	<p>در مکعب مستطیلی به طول و عرض و ارتفاع ۲۴ و ۱۸ و ۱۵ سانتی‌متر چند مکعب به ضلع ۳ سانتی‌متر جای می‌گیرد؟</p>