فصل دوم: (قضیه تالس، تشابه و کاربردهای آن)

درس‌نامه

درس ۱ (نسبت و تناسب در هندسه)

نسبت: کسر $\frac{a}{b}$ $(b \neq ۰)$ که در آن a و b دو عدد حقیقی می‌باشند، نسبت a به b نامیده می‌شود.

تناسب: برابری دو نسبت را تناسب می‌گویند. مثلاً $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$، $(b, d \neq ۰)$ یک تناسب است که در آن a و d را طرفین و b و c را وسطین می‌نامند.

تذکر اگر a و b کمیت‌های فیزیکی باشند، در این صورت در بیان نسبت $\frac{a}{b}$ واحد اندازه‌گیری a و b باید یکی باشد، اگر یکی نباشد آن‌ها را به یک واحد تبدیل می‌کنیم. مثلاً اگر طول یک استخر ۲۰ متر و عرض آن ۴۰۰ سانتی‌متر باشد، چون ۲۰ متر برابر ۲۰۰۰ سانتی‌متر است. نسبت طول به عرض استخر $\frac{a}{b} = \frac{۲۰۰۰}{۴۰۰} = ۵$ می‌باشد.

مثال ۱ *در یک مثلث متساوی‌الساقین نسبت اندازهٔ زاویهٔ رأس به یکی از زوایای مجاور قاعده ۲ به ۵ است. اندازهٔ کوچک‌ترین زاویهٔ مثلث را محاسبه کنید.*

پاسخ: اندازهٔ زاویهٔ رأس را $۲x$ می‌گیریم، در این صورت اندازهٔ زاویه‌های مجاور به قاعده $۵x$ می‌شود. از طرفی مجموع زوایای هر مثلث $۱۸۰°$ است، در نتیجه:

$$۲x + ۵x + ۵x = ۱۸۰° \Rightarrow ۱۲x = ۱۸۰° \Rightarrow x = ۱۵°$$

بنابراین اندازهٔ کوچک‌ترین زاویه $۲x = ۳۰°$ است.

خواص اصلی تناسب

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \xrightarrow{\text{با فرض } bd \neq ۰ \text{، آن را در دو طرف تناسب ضرب می‌کنیم.}} \frac{a}{b}(bd) = \frac{c}{d}(bd) \Rightarrow ad = bc$$

پس از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ همواره نتیجه می‌شود $ad = bc$ که آن را طرفین وسطین کردن می‌نامند.

مثال ۲ *x را از تناسب* $\frac{x + ۶y + ۱۱}{۳} = \frac{x + ۲y + ۴}{۱}$ *به دست آورید.*

پاسخ: با طرفین وسطین کردن تناسب داده شده داریم:

$$۳x + ۶y + ۱۲ = x + ۶y + ۱۱ \Rightarrow ۲x = -۱ \Rightarrow x = -\frac{۱}{۲}$$

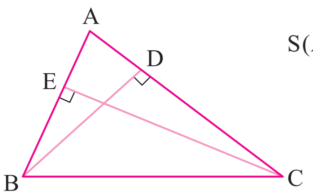
مثال ۳ *اگر* $\frac{m}{n} = \frac{۲}{۳}$ *و* $\frac{x}{y} = \frac{۳}{۴}$*، آن‌گاه حاصل* $\frac{mx - ۲ny}{ny + ۳mx}$ *را بیابید.*

پاسخ: صورت و مخرج کسر را بر ny تقسیم می‌کنیم. داریم:

$$\frac{mx - ۲ny}{ny + ۳mx} = \frac{\frac{m}{n} \times \frac{x}{y} - ۲}{۱ + ۳ \times \frac{m}{n} \times \frac{x}{y}} = \frac{\frac{۲}{۳} \times \frac{۳}{۴} - ۲}{۱ + ۳ \times \frac{۲}{۳} \times \frac{۳}{۴}} = \frac{\frac{۱}{۲} - ۲}{۱ + \frac{۳}{۲}} = \frac{-\frac{۳}{۲}}{\frac{۵}{۲}} = \frac{-۳}{۵}$$

رابطهٔ بین نسبت ارتفاع‌ها و قاعده‌های نظیر

مثلث ABC را با ارتفاع‌های CE و BD در نظر بگیرید، داریم:



$$S(ABC) = \frac{۱}{۲}CE.\,AB = \frac{۱}{۲}BD.\,AC \Rightarrow \frac{CE}{BD} = \frac{AC}{AB}$$

یعنی در هر مثلث، نسبت دو ارتفاع مثلث با نسبت عکس قاعده‌های نظیر آن‌ها متناسب است.

به طور کلی اگر اندازهٔ اضلاع مثلث ABC به صورت $AB = c$، $AC = b$ و $BC = a$ و h_c، h_b و h_a ارتفاع‌های نظیر این اضلاع باشند، داریم:

$$\frac{h_a}{h_c} = \frac{c}{a}, \frac{h_b}{h_c} = \frac{c}{b}, \frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}$$

$$a \geq b \geq c \Leftrightarrow h_a \leq h_b \leq h_c$$

نتیجه: کوتاه‌ترین ارتفاع در مثلث، نظیر بلندترین ضلع است و به عکس.

مثال٤ *اندازهٔ ارتفاع‌های مثلثی ۳، ۴ و ۵ است. نسبت مجموع دو ضلع بزرگ‌تر به کوچک‌ترین ضلع مثلث را بیابید.*

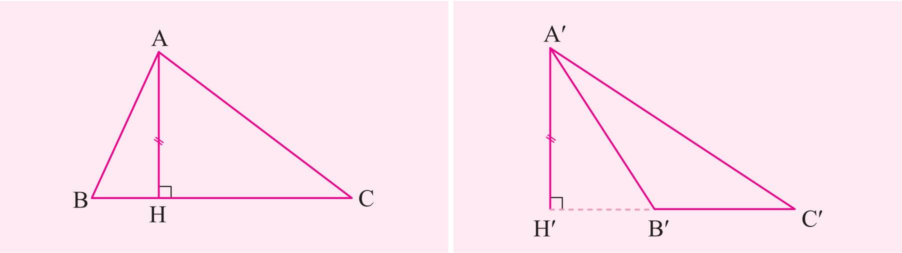
پاسخ: فرض کنیم $h_a = ۳$ ، $h_b = ۴$ و $h_c = ۵$، در نتیجه $a > b > c$ و داریم:

$$\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{h_c}{h_a} + \frac{h_c}{h_b} = \frac{۵}{۳} + \frac{۵}{۴} = \frac{۳۵}{۱۲}$$

نسبت مساحت‌های دو مثلث هم ارتفاع

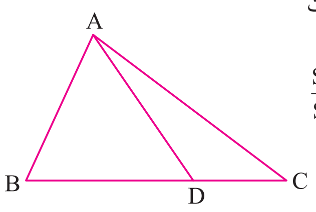
هرگاه اندازهٔ ارتفاع‌های دو مثلث برابر باشند، نسبت مساحت‌های آن‌ها برابر نسبت اندازهٔ قاعده‌هایی است که این ارتفاع‌ها بر آن‌ها وارد شده‌اند.

$$\frac{S(A'B'C')}{S(ABC)} = \frac{\frac{۱}{۲}A'H'.B'C'}{\frac{۱}{۲}AH.BC} = \frac{B'C'}{BC}$$



نتیجه ۱: اگر دو مثلث در یک رأس مشترک بوده و ضلع‌های مقابل به این رأس‌ها روی یک خط باشند، آن‌گاه نسبت مساحت‌های دو مثلث برابر نسبت‌های اندازه‌های آن دو ضلع است.

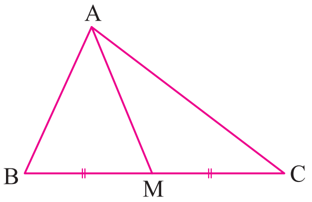
$$\frac{S(ACD)}{S(ABC)} = \frac{CD}{BC} , \frac{S(ABD)}{S(ABC)} = \frac{BD}{BC} , \frac{S(ACD)}{S(ABD)} = \frac{CD}{BD}$$



مثال٥ *ثابت کنید میانهٔ هر مثلث آن را به دو مثلث هم مساحت تقسیم می‌کند (دو مثلث هم مساحت را معادل می‌گویند).*

پاسخ: در مثلث ABC مطابق شکل فرض کنیم AM میانه باشد، دو مثلث AMC و AMB در رأس A هم ارتفاعند، لذا:

$$\frac{S(ABM)}{S(AMC)} = \frac{BM}{MC} = ۱ \Rightarrow S(ABM) = S(AMC)$$

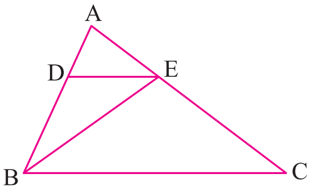


مثال٦ در مثلث ABC نقاط D و E به ترتیب روی اضلاع AB و AC قرار دارند. ثابت کنید:

$$\frac{S(ADE)}{S(ABC)} = \frac{AD.AE}{AB.AC}$$

پاسخ: در مثلث ABC مطابق شکل B را به E وصل می‌کنیم (یا C را به D) دو مثلث ADE و ABE در رأس E هم ارتفاع هستند، پس داریم:

$$\frac{S(ADE)}{S(ABE)} = \frac{AD}{AB}$$



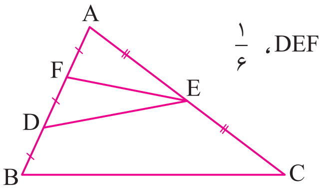
هم‌چنین دو مثلث ABE و ABC در رأس B هم ارتفاعند، پس می‌توان نوشت:

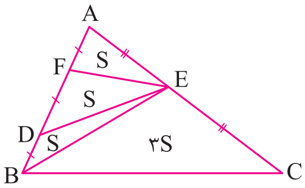
$$\frac{S(ABE)}{S(ABC)} = \frac{AE}{AC}$$

دو تناسب فوق را در هم ضرب می‌کنیم:

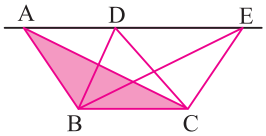
$$\frac{S(ADE)}{S(ABE)} \times \frac{S(ABE)}{S(ABC)} = \frac{AD}{AB} \times \frac{AE}{AC} \Rightarrow \frac{S(ADE)}{S(ABC)} = \frac{AD \times AE}{AB \times AC}$$

مثال٧ در مثلث ABC مطابق شکل E وسط AC و $AF = DF = BD$ می‌باشد. ثابت کنید مساحت مثلث DEF، $\frac{۱}{۶}$ مساحت مثلث ABC است.





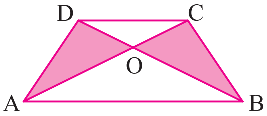
پاسخ: B را به E وصل می‌کنیم، فرض کنیم مساحت مثلث DEF، برابر S باشد، چون EF میانهٔ مثلث ADE و DE میانهٔ مثلث BEF است، پس مساحت هر دو مثلث AEF و BED برابر S است.
هم‌چنین BE میانهٔ مثلث ABC است، پس مساحت دو مثلث BEC و ABE برابرند، لذا $S(BEC) = ۳S$ و $S(ABC) = ۶S$ و در نتیجه مساحت مثلث DEF برابر $\frac{۱}{۶}$ مساحت مثلث ABC است.



نتیجه ۲: اگر چند مثلث قاعدهٔ مشترکی داشته باشند و رأس‌های روبه‌رو به قاعده در آن‌ها، روی خطی موازی این قاعده باشند، آن‌گاه این مثلث‌ها هم مساحت هستند.

$S(ABC) = S(BDC) = S(BEC) = ...$

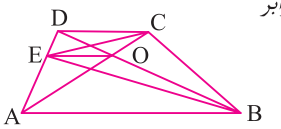
مثال ۸ *در ذوزنقهٔ ABCD مطابق شکل دو قطر BD و AC رسم شده‌اند. ثابت کنید* $S(AOD) = S(BOC)$



پاسخ: دو مثلث ABD و ABC دارای قاعدهٔ مشترک AB هستند و رأس سوم آن‌ها D و C روی خطی موازی قاعدهٔ AB قرار دارند، پس مساحت این دو مثلث برابرند (ارتفاع وارد بر قاعدهٔ AB همان ارتفاع ذوزنقه است.)

$S(ABD) = S(ABC) \Rightarrow S(AOD) + S(AOB) = S(AOB) + S(BOC) \Rightarrow S(AOD) = S(BOC)$

مثال ۹ *در ذوزنقهٔ مقابل، O نقطهٔ تلاقی قطرها و OE موازی قاعده‌ها است. ثابت کنید مساحت چهارضلعی BOEC برابر مساحت مثلث AOD و مساحت مثلث BOC است.*



پاسخ: دو مثلث AOE و BOE در قاعدهٔ OE مشترکند و رأس سوم آن‌ها A و B روی خطی موازی قاعدهٔ OE قرار دارد، پس $S(AOE) = S(BOE)$، با استدلال مشابه داریم $S(DOE) = S(COE)$، بنابراین می‌توان نوشت:

$S(BOEC) = S(BOE) + S(COE) = S(AOE) + S(DOE) = S(AOD)$

از طرفی در مثال قبل ثابت کردیم $S(AOD) = S(BOC)$، پس:

$S(BOEC) = S(AOD) = S(BOC)$

خواص نسبت و تناسب

۱. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$ (طرفین وسطین)

۲. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{d}{b} = \frac{c}{a}$ (تعویض طرفین)

۳. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ (تعویض وسطین)

۴. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ (معکوس کردن)

۵. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{b} = \frac{d+c}{d}$ (ترکیب در صورت)

۶. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d}$ (تفضیل در صورت)

۷. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a+b} = \frac{c}{c+d}$ (ترکیب در مخرج)

۸. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{a-b} = \frac{c}{c-d}$ (تفضیل در مخرج)

۹. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$ (ترکیب در صورت و تفضیل در مخرج)

۱۰. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a+c}{b+d}$

ویژگی (۱۰) به صورت مقابل قابل تعمیم است:

$$\frac{a_۱}{b_۱} = \frac{a_۲}{b_۲} = ... = \frac{a_n}{b_n} \Rightarrow \frac{a_۱}{b_۱} = \frac{a_۲}{b_۲} = ... = \frac{a_n}{b_n} = \frac{a_۱ + a_۲ + ... + a_n}{b_۱ + b_۲ + ... + b_n}$$

۱۱. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a-c}{b-d}$

مثال ۱۰ *با استفاده از خواص تناسب معادلهٔ* $\frac{۶-x}{۳} = \frac{x}{۷}$ *را حل کنید.*

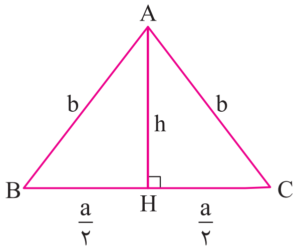
پاسخ: می‌توانیم از طرفین وسطین کردن استفاده کنیم، اما استفاده از خاصیت (۱۰) بهتر می‌باشد.

$$\frac{۶-x}{۳} = \frac{x}{۷} = \frac{۶-x+x}{۳+۷} = \frac{۶}{۱۰} \Rightarrow \frac{x}{۷} = \frac{۶}{۱۰} \Rightarrow x = \frac{۴۲}{۱۰} = ۴/۲$$

واسطهٔ هندسی دو عدد حقیقی هم علامت

اگر طرفین یا وسطین یک تناسب دو عدد برابر باشد، یعنی $\frac{b}{c}=\frac{a}{b}$ یا $\frac{c}{b}=\frac{b}{a}$ با طرفین وسطین کردن تناسب نتیجه می‌شود که $b^۲=ac$، در این صورت عدد b را واسطهٔ هندسی دو عدد a و c می‌نامیم.

مثال ۱۱) در یک مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع وارد بر قاعده، واسطهٔ هندسی بین ساق و قاعدهٔ مثلث است. نسبت قاعده به ساق را به دست آورید.



پاسخ: بنا به فرض داریم $h^۲=ab$، از طرفی بنا به قضیهٔ فیثاغورس داریم:

$$h^۲+\frac{a^۲}{۴}=b^۲ \Rightarrow ab+\frac{a^۲}{۴}=b^۲ \xrightarrow{\frac{a}{b}=k} bk\times b+\frac{b^۲k^۲}{۴}=b^۲$$

طرفین تساوی اخیر را به $b^۲$ تقسیم می‌کنیم داریم:

$$k+\frac{k^۲}{۴}=۱\Rightarrow k^۲+۴k-۴=۰\Rightarrow k=\frac{-۴\pm\sqrt{۱۶-(-۱۶)}}{۲}=-۲\pm۲\sqrt{۲}\xrightarrow{k>۰}k=۲\sqrt{۲}-۲$$

۲ سؤالات امتحانی درس اول

۱. اگر $\frac{c}{۶}=\frac{b}{۲}=\frac{a}{۳}$ و $a+۲b+c=۲۶$، آن‌گاه مقادیر a، b و c را به دست آورید.

۲. اگر $\frac{z}{۴}=\frac{y}{۳}=\frac{x}{۲}$، آن‌گاه حاصل $\frac{x+۲y-z}{x-y+۳z}$ را بیابید.

۳. اندازهٔ زوایای مثلثی به نسبت اعداد ۳، ۴ و ۵ است، زاویهٔ بین دو نیمساز داخلی زوایای بزرگ‌تر را بیابید.

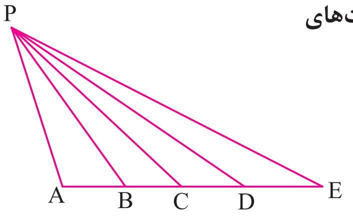
۴. اگر $\frac{x}{y}=\frac{۴x^۲+۱۵}{۵y^۲+۱۲}$ و $۴x\neq۵y$ باشد، واسطهٔ هندسی دو عدد مثبت x و y را حساب کنید.

۵. نقاط M و N بر پاره‌خط AB به طول a چنان قرار دارند که $\frac{۳}{۵}=\frac{BN}{AN}=\frac{AM}{MB}$، اندازهٔ پاره‌خط MN را برحسب a به دست آورید.

۶. یک ذوزنقه مفروض است:
الف) ثابت کنید قطر آن، ذوزنقه را به دو مثلث تقسیم می‌کند که نسبت مساحت آن‌ها برابر نسبت قاعده‌های ذوزنقه است.
ب) اگر اندازهٔ قاعده‌های ذوزنقه ۴/۸ و ۱۹/۲ باشد، نسبت فواصل دو رأس ذوزنقه را از یک قطر آن به دست آورید .

۷. اگر $\frac{z}{۴}=\frac{y}{۳}=\frac{x}{۲}$ و $\sqrt{x+۳}=z-y$، آن‌گاه مقادیر x، y و z را حساب کنید .

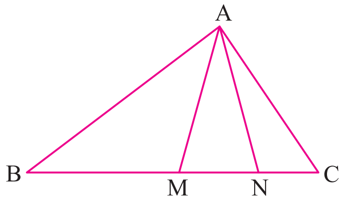
۸. مساحت مثلث APE در شکل روبه‌رو ۱۲ است. اگر $AB=BC=CD=DE$، آن‌گاه مجموع مساحت‌های همهٔ مثلث‌های موجود در شکل را محاسبه کنید.



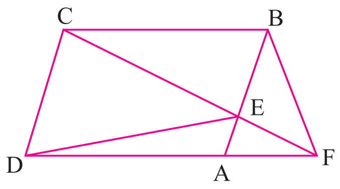
۹. اگر در مثلث ABC داشته باشیم $\frac{h_c}{۲۰}=\frac{h_b}{۱۵}=\frac{h_a}{۱۲}$ و $\frac{\sin\widehat{C}}{p}=\frac{\sin\widehat{B}}{n}=\frac{\sin\widehat{A}}{m}$، آن‌گاه مقادیر صحیح m، n و p را محاسبه کنید. (m، n و p دو به دو نسبت به هم اولند.)

۱۰. ساق یک مثلث متساوی‌الساقین واسطهٔ هندسی ارتفاع وارد بر قاعده و قاعدهٔ آن می‌باشد، نسبت محیط مثلث به این ارتفاع را بیابید.

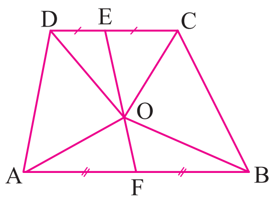
۱۱. در مثلث ABC، طول ضلع AB دو برابر طول ضلع AC است. نقطهٔ M وسط ضلع BC است و نقطهٔ N روی BC چنان است که $BN=۴CN$، نسبت فاصلهٔ M از ضلع AB به فاصلهٔ N تا ضلع AC را بیابید.



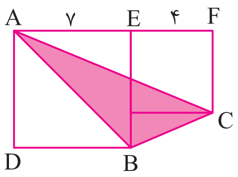
۱۲. در متوازی‌الاضلاع ABCD مطابق شکل نقطهٔ E روی ضلع AB قرار دارد و امتداد CE، امتداد ضلع AD را در F قطع کرده است، ثابت کنید $S(ADE)=S(BEF)$



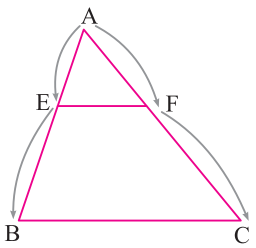
۱۳. در ذوزنقهٔ ABCD مطابق شکل نقطهٔ O روی پاره‌خط واصل وسط قاعده‌ها قرار دارد، ثابت کنید $S(AOD)=S(BOC)$



۱۴. در شکل مقابل دو مربع به ضلع‌های ۴ و ۷ کنار هم قرار گرفته‌اند. مساحت مثلث ABC را محاسبه کنید.



درس ۲ (قضیه تالس)



قضیهٔ تالس: اگر خطی با یک ضلع مثلث موازی باشد و دو ضلع دیگر را قطع کند، نسبت پاره‌خط‌هایی که روی یک ضلع پدید می‌آورد با نسبت پاره‌خط‌هایی که روی ضلع دیگر ایجاد می‌کند، برابر است.

$$EF\|BC \Rightarrow \frac{AE}{BE}=\frac{AF}{CF}$$

(اثبات در تمرین‌ها)

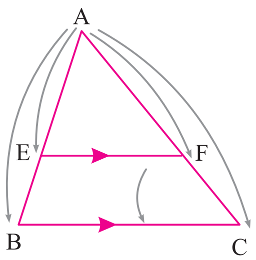
نتیجه ۱: به کمک خواص تناسب، قضیهٔ تالس به صورت‌های زیر هم نوشته می‌شود:

$$\frac{AE}{BE}=\frac{AF}{CF}\xrightarrow{\text{ترکیب در مخرج}}\frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}\ (\text{جزء به کل})\xrightarrow{\text{معکوس کردن}}\frac{AB}{AE}=\frac{AC}{AF}\ (\text{کل به جزء})$$

$$\frac{AE}{BE}=\frac{AF}{CF}\xrightarrow{\text{ترکیب در صورت}}\frac{AB}{BE}=\frac{AC}{CF}\ (\text{کل به جزء})\xrightarrow{\text{معکوس کردن}}\frac{BE}{AB}=\frac{CF}{AC}\ (\text{جزء به کل})$$

نتیجه ۲: (نتیجهٔ اساسی در قضیهٔ تالس)

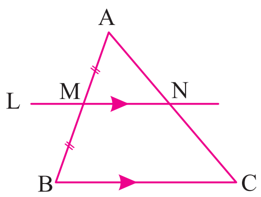
خطی که موازی یک ضلع مثلث دو ضلع دیگر را قطع کند، مثلثی ایجاد می‌کند که اضلاعش متناظراً با اضلاع مثلث مفروض متناسب‌اند.



$$EF \| BC \Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{AF}{AC}=\frac{EF}{BC}$$

مثال ۱۲ *ثابت کنید خطی که از وسط یک ضلع مثلث موازی ضلع سوم آن رسم شود، از وسط ضلع مقابل می‌گذرد و پاره‌خط حاصل، نصف ضلع سوم است.*

پاسخ: به کمک قضیهٔ تالس داریم:



$$\frac{AM}{MB}=\frac{AN}{NC}\Rightarrow ۱=\frac{AN}{NC}\Rightarrow AN=NC$$