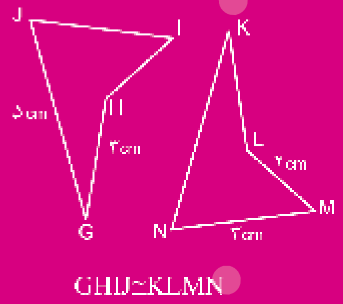
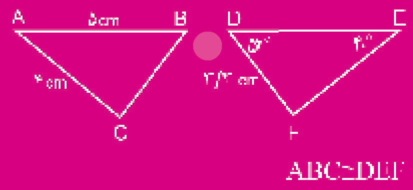
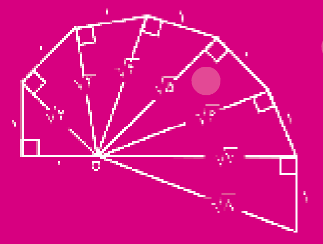


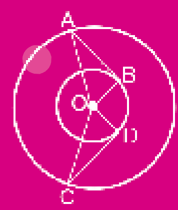


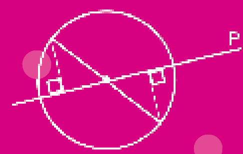


به همین ترتیب، ساختن مثلث‌های قائم‌الزاویه را ادامه می‌دهیم تا $\sqrt{10}$ ساخته شود.

واحد ۶
مثلث

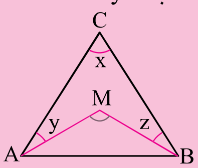
- اجزای مثلث
- رابطهٔ فیثاغورس
- هم‌نهشتی چندضلعی‌ها
- هم‌نهشتی مثلث‌ها

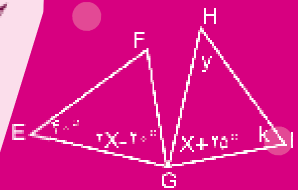


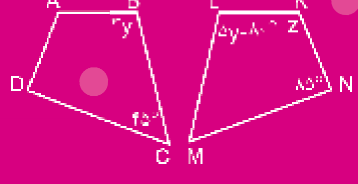


در شکل زیر، D نقطه‌ای دلخواه در داخل مثلث ABC و x، y، z، w اندازهٔ زاویه‌های مشخص‌شده برحسب درجه هستند.

چرا مقدار x بر حسب y، z و w برابر است با $w-y-z$ ؟







پیش‌آزمون

۱. سه پاره‌خط به طول‌های $۴x-۴$، $x+۷$ و $۶x$ اضلاع مثلثی هستند. مقادیر x به کدام صورت است؟

۱) $\frac{۱۱}{۹}\le x<۳$ ۲) $\frac{۵}{۳}<x<۳$ ۳) $۲<x<۳$ ۴) $\frac{۱۱}{۹}<x<۴$

۲. اندازهٔ سه زاویهٔ مثلثی با اعداد ۵، ۴ و ۱ متناسب هستند. این مثلث از کدام نوع زیر است؟

۱) متساوی‌الاضلاع ۲) متساوی‌الساقین ۳) قائم‌الزاویه ۴) منفرجه‌الزاویه

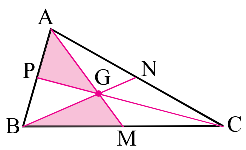
۳. نسبت زاویه‌های حادّهٔ مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۲ به ۳ است. اگر BM و CM به ترتیب نیمساز زاویه‌های خارجی B و C باشند، زاویهٔ M که از برخورد این دو نیمساز به دست می‌آید کدام است؟

۱) ۶۰° ۲) ۴۵° ۳) ۳۰° ۴) ۷۵°

۴. اگر اضلاع مثلثی ۵، ۶ و ۱۰ باشند، محل تلاقی سه ارتفاع مثلث کجا قرار دارد؟

۱) داخل مثلث ۲) در رأس مقابل به ضلع کوچک‌تر
۳) خارج مثلث ۴) روی ضلع بزرگ‌تر

۵. در شکل زیر AM، BN و CP سه میانهٔ مثلث ABC هستند. اگر مساحت مثلث ABC برابر $۳۶cm^۲$ باشد، مساحت قسمت رنگی چقدر است؟



۱) $۱۲cm^۲$ ۲) $۱۸cm^۲$
۳) $۱۶cm^۲$ ۴) $۲۱cm^۲$

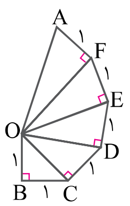
۶. در هر مثلث دلخواه مانند مثلث ABC اندازهٔ میانهٔ AM:

۱) از محیط مثلث کوچک‌تر است. ۲) از ضلع BC کوچک‌تر است.
۳) از مجموع اندازه‌های ضلع‌های AB و AC کوچک‌تر است. ۴) گزینه‌های «۱» و «۳» صحیح هستند.

۷. در صفحهٔ یک مثلث، چند نقطه وجود دارد که فاصله‌اش از هر سه رأس مثلث، به یک اندازه است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

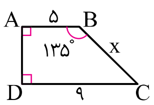
۸. درشکل روبه‌رو، طول پاره‌خط A کدام است؟



(آزمون ورودی)

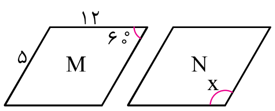
۱) $۱۲cm^۲$ ۲) $۱۸cm^۲$
۳) $۱۶cm^۲$ ۴) $۲۱cm^۲$

۹. در شکل روبه‌رو مقدار x کدام است؟



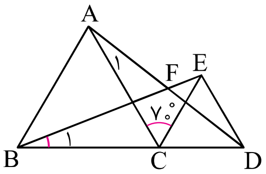
۱) ۴ ۲) $۴\sqrt{۲}$
۳) ۸ ۴) ۵

۱۰. متوازی‌الاضلاع‌های M و N هم‌نهشت هستند. محیط متوازی‌الاضلاع N چند سانتی‌متر و اندازه زاویهٔ x چند درجه است؟



۱) $۳۶cm$ و ۶۰° ۲) $۶۰cm$ و ۶۰°
۳) $۳۴cm$ و ۱۲۰° ۴) $۶۰cm$ و ۱۲۰°

۱۱. در شکل زیر $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{ECD}$ متساوی‌الاضلاع هستند. زاویه $A\hat{F}B$ چند درجه است؟ (آزمون ورودی)



۱) ۴۰° ۲) ۴۵°

۳) ۵۰° ۴) ۶۰°

۱۲. دو مثلث قائم‌الزاویه در کدام دو حالت با هم هم‌نهشت می‌شوند؟ (المپیاد ریاضی)

۱) دو مثلث، یک زاویهٔ تند مساوی داشته باشند.

۲) دو زاویهٔ حادّه (تند) از مثلثی با دو زاویهٔ حادّه (تند) از مثلث دیگر برابر باشد.

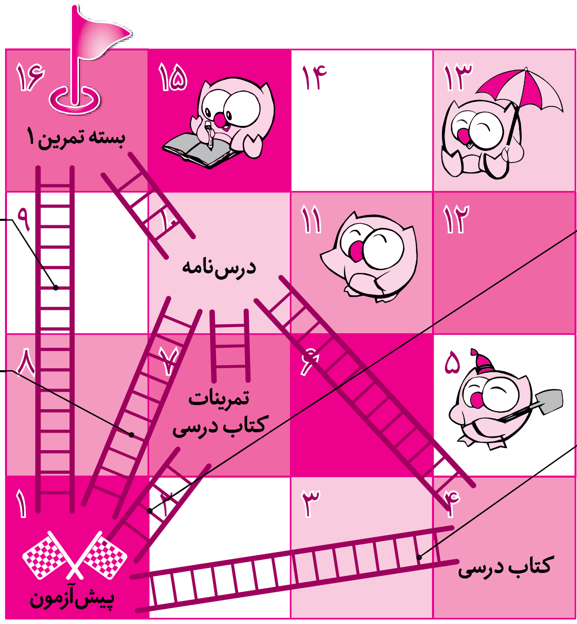
۳) وتر و یک زاویهٔ حاده (تند) از مثلثی با وتر و یک زاویهٔ حاده (تند) از مثلث دیگر برابر باشند.

۴) یک ضلع زاویهٔ قائمه از مثلثی با یک ضلع زاویهٔ قائمه از مثلث دیگر برابر باشند.

۱. ۱ ۲ ۳ ۴	۴. ۱ ۲ ۳ ۴	۷. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۰. ۱ ۲ ۳ ۴
۲. ۱ ۲ ۳ ۴	۵. ۱ ۲ ۳ ۴	۸. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۱. ۱ ۲ ۳ ۴
۳. ۱ ۲ ۳ ۴	۶. ۱ ۲ ۳ ۴	۹. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۲. ۱ ۲ ۳ ۴

توجه: حالا با توجه به تعداد سؤالاتی که پاسخ صحیح داده‌اید، از یکی از نردبان‌های نشان داده شده در نقشه بالا بروید تا به خانه بعدی برسید و به مطالعه عنوان آمده در آن خانه بپردازید.

نقشه راه دانش‌آموز



- در صورتی که به **۸ یا ۹ سؤال** پاسخ صحیح داده‌اید، ابتدا **تمرینات کتاب درسی خود را مجدداً حل کرده** و سپس **درس‌نامه را مطالعه کنید** و بعد از آن اجازه دارید وارد **بستهٔ تمرین ۱** شوید.
- در صورتی که به **کم‌تر از ۸ سؤال** پاسخ صحیح داده‌اید، ابتدا **کتاب درسی خود را مجدداً مطالعه کرده** و سپس **درس‌نامه را مطالعه کنید** و پس از آن اجازه دارید وارد **بستهٔ تمرین ۱** شوید.
- در صورتی که به **همهٔ سؤالات** به طور صحیح پاسخ داده‌اید، **نیازی به مطالعهٔ درس‌نامه ندارید** و می‌توانید وارد **بستهٔ تمرین ۱** شوید.
- در صورتی که به **حداقل ۱۰ سؤال** پاسخ صحیح داده‌اید، **پس از مطالعهٔ درس‌نامه** اجازه دارید وارد **بستهٔ تمرین ۱** شوید.

شناسنامه سؤالات پیش‌آزمون

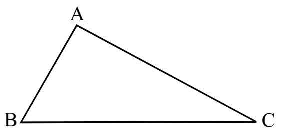
شماره سؤال	عنوان زیرموضوع	سطح سؤال	پاسخ
۱	اجزای مثلث		۱
۲	اجزای مثلث		۳
۳	اجزای مثلث		۲
۴	اجزای مثلث		۳
۵	اجزای مثلث		۱
۶	اجزای مثلث		۴
۷	اجزای مثلث		۲
۸	رابطهٔ فیثاغورس		۳
۹	رابطهٔ فیثاغورس		۲
۱۰	هم‌نهشتی چندضلعی‌ها		۳
۱۱	هم‌نهشتی مثلث‌ها		۴
۱۲	هم‌نهشتی مثلث‌ها		۳

درس‌نامه

مثلث

اگر سه نقطهٔ غیرواقع بر یک خط راست را دو به دو به هم وصل کنیم، مثلث ایجاد می‌شود.

اجزای اصلی مثلث



سه نقطهٔ A، B و C را رأس‌های مثلث و سه پاره‌خط $\overline{AB}$، $\overline{AC}$ و $\overline{BC}$ را ضلع‌های مثلث می‌گویند.

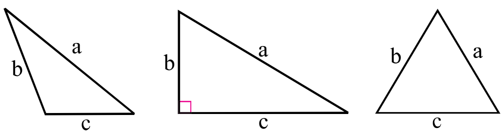
تشخیص نوع مثلث

۱. اگر سه ضلع مثلث را داشته باشیم می‌توانیم از نظر زاویه نوع مثلث را مشخص کنیم. فرض می‌کنیم سه ضلع مثلثی برابر a، b و c باشند $(a>b>c)$:

الف. اگر $b^۲+c^۲ < a^۲$ باشد، آن‌گاه یک زاویهٔ مثلث باز است.

ب. اگر $a^۲=b^۲+c^۲$ باشد، آن‌گاه یک زاویهٔ مثلث قائمه است.

پ. اگر $a^۲<b^۲+c^۲$ باشد، آن‌گاه هر سه زاویهٔ مثلث تند است.



(الف) (ب) (پ)

مثال: اندازهٔ سه ضلع مثلثی برابر ۳، ۵ و ۷ سانتی‌متر است. زاویه‌های مثلث از چه نوعی هستند؟

پاسخ: $۷>۵>۳ \Rightarrow ۷^۲>۵^۲+۳^۲ \Rightarrow ۴۹>۲۵+۹ \Rightarrow ۴۹>۳۴ \Rightarrow$ یک زاویهٔ مثلث باز و دو زاویهٔ دیگر آن تند هستند.

نکته: در هر مثلث، ضلع روبه‌روی زاویهٔ بزرگ‌تر، از ضلع روبه‌روی زاویهٔ کوچک‌تر، بزرگ‌تر است و بالعکس. (این عبارت به «قضیهٔ لولا» معروف است.)

نکته: در هر مثلث هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر مثلث کوچک‌تر و از تفاضل آن‌ها بزرگ‌تر است. (قضیهٔ حمار یا رابطهٔ مثلثی)

۱. سه پاره‌خط به طول‌های $۴x-۴$، $x+۷$ و $۶x$، اضلاع مثلثی هستند. مقادیر x به کدام صورت است؟

۱) $\frac{۱۱}{۹}\le x<۳$ ۲) $\frac{۵}{۳}<x<۳$ ۳) $۲<x<۳$ ۴) $\frac{۱۱}{۹}<x<۴$

پاسخ: گزینهٔ «۱» طبق رابطهٔ مثلثی در نکتهٔ قبل داریم: $۴x-۴<(x+۷)+۶x \Rightarrow x>-\frac{۱۱}{۳}$

با توجه به این که طول یک پاره‌خط همواره باید مثبت باشد در حالت‌های دیگر رابطهٔ مثلثی داریم:

$$۶x<(۴x-۴)+(x+۷) \Rightarrow x<۳ , x+۷<(۴x-۴)+۶x \Rightarrow x>\frac{۱۱}{۹} \Rightarrow \frac{۱۱}{۹}\le x<۳$$

۲. اگر نسبت سه زاویهٔ مثلث را داشته باشیم، می‌توانیم نوع مثلث را مشخص کنیم:

الف. اگر هر سه نسبت با هم برابر باشند، مثلث متساوی‌الاضلاع است.

ب. اگر فقط دو تا از نسبت‌ها با هم برابر باشند، مثلث متساوی‌الساقین است.

پ. اگر بزرگ‌ترین نسبت با مجموع دو نسبت دیگر برابر باشد، مثلث قائم‌الزاویه است.

ت. اگر بزرگ‌ترین نسبت، بزرگ‌تر از مجموع دو نسبت دیگر باشد، مثلث دارای یک زاویه باز است.

ث. اگر بزرگ‌ترین نسبت، کوچک‌تر از مجموع دو نسبت دیگر باشد، مثلث دارای سه زاویهٔ تند است.

۲. اندازهٔ سه زاویهٔ مثلثی با اعداد ۵، ۴ و ۱ متناسب هستند. این مثلث از کدام نوع زیر است؟

۱) متساوی‌الاضلاع ۲) متساوی‌الساقین ۳) قائم‌الزاویه ۴) منفرجه‌الزاویه

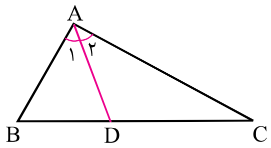
پاسخ: گزینهٔ «۳» با توجه به نکات بالا قسمت «پ» چون $۵=۴+۱$ پس مثلث قائم‌الزاویه است.

اجزای فرعی مثلث

ارتفاع، نیمساز، میانه و عمود منصف اجزای فرعی مثلث هستند.

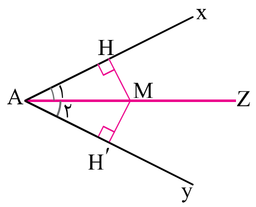
نیمساز: پاره‌خطی است که زاویهٔ مثلث را نصف می‌کند و به ضلع مقابل آن محدود باشد.

مثال:



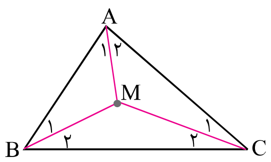
$\widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲ \Rightarrow$ $\overline{AD}$ نیمساز $\widehat{A}$ است

نکته: ۱. هر نقطه روی نیمساز یک زاویه، از دو ضلع زاویه به یک فاصله است.



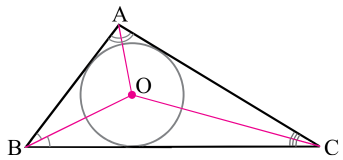
$\widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲ \Rightarrow$ AZ نیمساز $\widehat{A}$ است $\Rightarrow \overline{MH} = \overline{MH'}$

۲. در هر مثلث سه نیمساز در یک نقطه هم‌رأس هستند یعنی هر سه نیمساز از یک نقطه می‌گذرند.

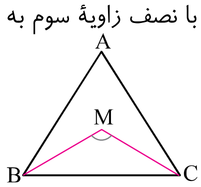


$\widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲ \, , \, \widehat{B}_۱ = \widehat{B}_۲ \, , \, \widehat{C}_۱ = \widehat{C}_۲$

۳. مرکز دایرهٔ محاطی (محاصره‌شده) در هر مثلث، نقطه برخورد نیمسازهای آن مثلث است.

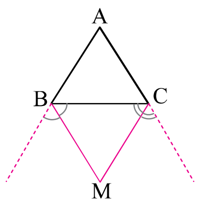


۴. در مثلث ABC، اگر نیمساز دو زاویهٔ داخلی را رسم کنیم، زاویهٔ به‌وجودآمده از برخورد این دو نیمساز، برابر با نصف زاویهٔ سوم به اضافهٔ ۹۰° است. یعنی:



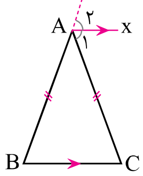
$$\widehat{M} = ۹۰^\circ + \frac{\widehat{A}}{۲}$$

۵. در مثلث ABC، زاویهٔ بین دو نیمساز خارجی برابر است با:



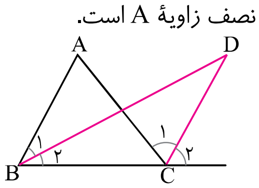
$$\widehat{M} = ۹۰^\circ - \frac{\widehat{A}}{۲}$$

۶. در هر مثلث متساوی‌الساقین، نیمساز زاویهٔ خارجی در رأس مثلث، با قاعدهٔ آن موازی است.



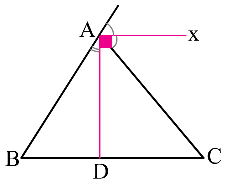
$$\left.\begin{array}{l} \overline{AB} = \overline{AC} \\ \widehat{A}_۱ = \widehat{A}_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow Ax \parallel \overline{BC}$$

۷. در هر مثلث مانند $\overset{\triangle}{ABC}$، زاویهٔ بین نیمسازهای زاویهٔ داخلی B با نیمساز زاویهٔ خارجی C همواره برابر نصف زاویهٔ A است.



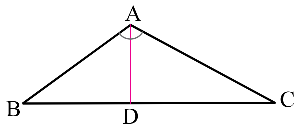
$$\left.\begin{array}{l} \widehat{B}_۱ = \widehat{B}_۲ \\ \widehat{C}_۱ = \widehat{C}_۲ \end{array}\right\} \Rightarrow \widehat{D} = \frac{\widehat{A}}{۲}$$

۸. نیمساز داخلی و خارجی هر زاویه، در رأس زاویه بر هم عمودند.



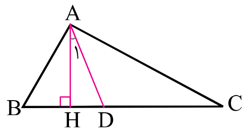
$$\left.\begin{array}{l}\overline{AD}\ \text{نیمساز داخلی}\ \widehat{A}\\ \overline{Ax}\ \text{نیمساز خارجی}\ \widehat{A}\end{array}\right\} \Rightarrow x\widehat{A}D = 90^\circ$$

۹. نیمساز هر زاویهٔ مثلث، روی ضلع مقابلش پاره‌خط‌های متناسب به وجود می‌آورد.



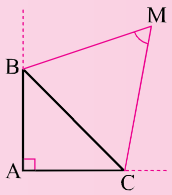
$$\frac{\overline{BD}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}$$

در هر مثلث مانند $\overset{\Delta}{ABC}$، زاویهٔ بین ارتفاع و نیمساز نظیر رأس A، برابر با نصف اختلاف دو زاویهٔ دیگر است.



AH ارتفاع و AD نیمساز $\widehat{A}$ است پس داریم: $\widehat{A}_1 = \dfrac{\widehat{B} - \widehat{C}}{2}$

۳. نسبت زاویه‌های حادّهٔ مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۲ به ۳ است. اگر BM و CM به ترتیب نیمساز زاویه‌های خارجی B و C باشند، زاویه M که از برخورد این دو نیمساز به دست می‌آید کدام است؟



۱) 60° ۲) 45°

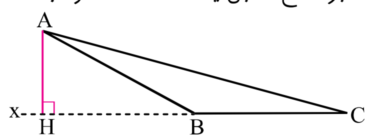
۳) 30° ۴) 75°

پاسخ: گزینهٔ «۲» طبق قسمت «۵» نکات گفته‌شده، اندازهٔ زاویهٔ حاصل از برخورد زاویه‌های خارجی مثلث برابر است با:

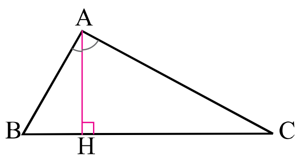
$$\widehat{M} = 90^\circ - \frac{\widehat{A}}{2} \xrightarrow{\widehat{A}=90} 90^\circ - \frac{90^\circ}{2} = 45^\circ$$

ارتفاع: پاره‌خطی است که از رأس مثلث بر ضلع مقابل یا امتداد آن عمود باشد.

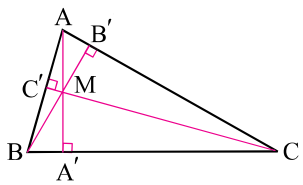
مثال: $\overline{AH} \perp xC$



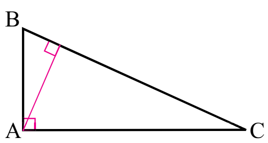
$\overline{AH} \perp \overline{BC}$



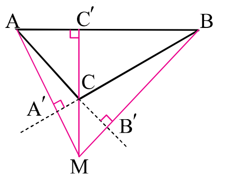
نکته: ۱. ارتفاع‌های مثلث در یک نقطه هم‌رأس هستند. یعنی هر سه ارتفاع از یک نقطه می‌گذرند.



۲. در هر مثلث که دارای سه زاویهٔ تند باشد، نقطهٔ برخورد ارتفاع‌ها داخل مثلث قرار می‌گیرد.



۳. در هر مثلث که دارای زاویهٔ قائمه باشد، نقطهٔ برخورد ارتفاع‌ها روی رأس قائم قرار می‌گیرد.



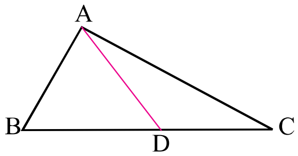
۴. در هر مثلث که دارای زاویهٔ باز باشد، نقطهٔ برخورد ارتفاع‌ها، خارج از مثلث قرار می‌گیرد.

۴. اگر اضلاع مثلثی ۵، ۶ و ۱۰ باشند، محل تلاقی سه ارتفاع مثلث کجا قرار دارد؟

۱) داخل مثلث ۲) در رأس مقابل به ضلع کوچک‌تر

۳) خارج مثلث ۴) روی ضلع بزرگ‌تر

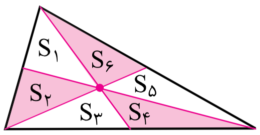
پاسخ: گزینهٔ «۳» چون که $۵^۲ + ۶^۲ < ۱۰^۲$ است پس این مثلث یک زاویه باز دارد، درنتیجه نقطه برخورد ارتفاع‌ها خارج مثلث است.



میانه: پاره‌خطی است که رأس مثلث را به وسط ضلع مقابل آن وصل می‌کند.

مثال: $\overline{BD} = \overline{CD} \Rightarrow$ $\overline{AD}$ میانهٔ ضلع $\overline{BC}$

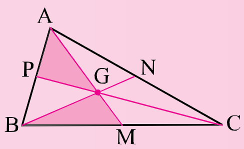
توجه: میانهٔ نظیر رأس A را با m_a نیز نمایش می‌دهند.



نکته: میانه‌ها، مثلث را به ۶ مثلث کوچک‌تر با مساحت‌های مساوی تقسیم می‌کنند، پس داریم:

$$S_۱ = S_۲ = S_۳ = S_۴ = S_۵ = S_۶$$

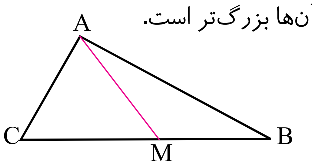
۵. درشکل زیر AM و BN و CP سه میانهٔ مثلث ABC هستند. اگر مساحت مثلث ABC برابر $۳۶cm^۲$ باشد، مساحت قسمت رنگی چقدر است؟



۱) $۱۲cm^۲$ ۲) $۱۸cm^۲$

۳) $۱۶cm^۲$ ۴) $۲۱cm^۲$

پاسخ: گزینهٔ «۱» میانه‌ها، مثلث را به ۶ مثلث کوچک‌تر با مساحت‌های مساوی تقسیم می‌کنند. پس مساحت قسمت رنگی $\frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$ مساحت کل مثلث است درنتیجه: قسمت رنگی $S = \frac{۱}{۳} \times ۳۶ = ۱۲cm^۲$



نکته: ۱. در هر مثلث، هر میانه از نصف مجموع دو ضلع هم رأس آن کوچک‌تر و از نصف تفاضل آن‌ها بزرگ‌تر است.

۲. در هر مثلث، هر میانه از محیط مثلث کوچک‌تر است.

$$\frac{\overline{AB} - \overline{AC}}{۲} < \overline{AM} < \frac{\overline{AB} + \overline{AC}}{۲}$$

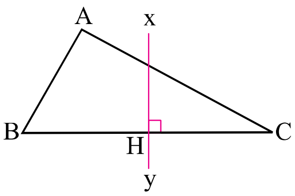
۶. مثال: در هر مثلث دلخواه مانند مثلث ABC اندازهٔ میانهٔ AM:

۱) از محیط مثلث کوچک‌تر است. ۲) از ضلع BC کوچک‌تر است.

۳) از مجموع اندازه‌های ضلع‌های AB و AC کوچک‌تر است. ۴) گزینه‌های «۱» و «۳» صحیح هستند.

پاسخ: گزینهٔ «۴»

عمودمنصف: عمودمنصف هر ضلع مثلث خطی است که از وسط آن بگذرد و بر آن عمود باشد.



مثال: $\left.\begin{matrix} \overline{BH} = \overline{CH} \\ xy \perp \overline{BC} \end{matrix}\right\} \Rightarrow$ xy عمودمنصف $\overline{BC}$ است

نکته: فاصلهٔ هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر پاره‌خط به یک اندازه است.

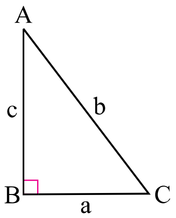
نکته: در هر مثلث، فاصلهٔ نقطهٔ برخورد عمودمنصف‌های سه ضلع تا هر رأس مثلث برابر است.

۷. در صفحه یک مثلث، چند نقطه وجود دارد که فاصله‌اش از هر سه رأس مثلث، به یک اندازه است؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۳ ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینهٔ «۲» با توجه به نکته قبل فقط فاصلهٔ نقطهٔ برخورد عمودمنصف‌های سه ضلع از هر سه رأس مثلث به یک اندازه است.

مثلث قائم‌الزاویه



مثلثی که دارای یک زاویه ۹۰° باشد را قائم‌الزاویه گوییم.

نامگذاری اضلاع مثلث

الف. اضلاع مثلث را می‌توان با ابتدا و انتهای پاره‌خط‌ها نامگذاری کرد.

اضلاع مثلث روبه‌رو: $\overline{AB}$، $\overline{BC}$ و $\overline{AC}$

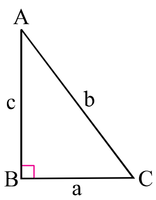
ب. اضلاع مثلث را می‌توان با حروف کوچک زاویه مقابلش نامگذاری کرد.

اضلاع مثلث روبه‌رو: a، b و c

وتر در مثلث قائم‌الزاویه: در مثلث قائم‌الزاویه، ضلع مقابل به زاویه قائمه را وتر می‌گویند.

مثال: در مثلث بالا وتر برابر ضلع $\overline{BC}$ یا b است.

رابطهٔ فیثاغورس



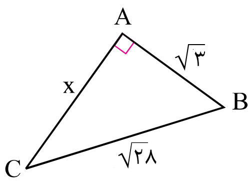
در هر مثلث قائم‌الزاویه، مجذور وتر با مجموع دو ضلع دیگر آن برابر است. $\overline{AC}^۲ = \overline{BC}^۲ + \overline{AC}^۲ \Rightarrow b^۲ = a^۲ + c^۲$

نکته: اعداد طبیعی a، b و c که می‌توانند ضلع‌های مثلث قائم‌الزاویه باشند را اعداد فیثاغورسی می‌نامند.

مثال: (۲۵ و ۲۰ و ۱۵) ، (۱۳ و ۱۲ و ۵)، (۱۰ و ۸ و ۶) و (۵ و ۴ و ۳) اعداد فیثاغورسی هستند.

نکته: اگر اطلاعات سؤال کافی باشد، با استفاده از معادله، می‌توان ضلع مجهول مثلث قائم‌الزاویه را به دست آورد.

مثال: در شکل روبه‌رو مقدار x را به دست آورید.

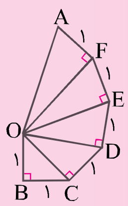


پاسخ: با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس داریم:

$$\overline{BC}^۲ = \overline{AC}^۲ + \overline{AB}^۲ \Rightarrow (\sqrt{۲۸})^۲ = x^۲ + (\sqrt{۳})^۲ \Rightarrow x^۲ = ۲۸ - ۳ \Rightarrow x = \sqrt{۲۵} = ۵$$

نکته: اگر یک عدد رادیکالی به توان دو برسد، رادیکال آن حذف می‌شود.

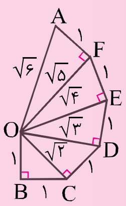
۸. درشکل زیر، طول پاره‌خط A کدام است؟



۱) $۱۲cm^۲$ ۲) $۱۸cm^۲$

۳) $۱۶cm^۲$ ۴) $۲۱cm^۲$

پاسخ: گزینهٔ «۳» اگر از کوچک‌ترین مثلث شروع کنیم و رابطهٔ فیثاغورس را بکار ببریم، داریم:



$$\overset{\Delta}{OBC}: \overline{OC}^۲ = ۱^۲ + ۱^۲ = ۲ \Rightarrow \overline{OC} = \sqrt{۲}$$

$$\overset{\Delta}{OCD}: \overline{OD}^۲ = (\sqrt{۲})^۲ + ۱^۲ = ۲ + ۱ = ۳ \Rightarrow \overline{OD} = \sqrt{۳}$$

$$\overset{\Delta}{ODE}: \overline{OE}^۲ = (\sqrt{۳})^۲ + ۱^۲ = ۳ + ۱ = ۴ \Rightarrow \overline{OE} = \sqrt{۴} = ۲$$

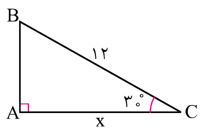
$$\overset{\Delta}{OEF}: \overline{OF}^۲ = (۲)^۲ + ۱^۲ = ۵ \Rightarrow \overline{OF} = \sqrt{۵}$$

$$\overset{\Delta}{OFA}: \overline{OA}^۲ = (\sqrt{۵})^۲ + ۱^۲ = ۶ \Rightarrow \overline{OA} = \sqrt{۶}$$

نکته: در هر مثلث قائم‌الزاویه: ۱. ضلع روبه‌رو به زاویه ۳۰° نصف وتر است.

۲. ضلع روبه‌رو به زاویهٔ ۴۵°، $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ وتر است. ۳. ضلع روبه‌رو به زاویه ۶۰°، $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ وتر است.

مثال: در مثلث روبه‌رو مقدار x را به دست آورید.

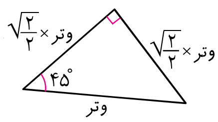


پاسخ:

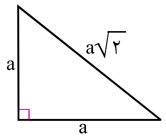
$$\overline{AB}=\frac{۱}{۲}\overline{BC} \Rightarrow \overline{AB}=\frac{۱}{۲}\times ۱۲=۶$$

$$\overline{AC}^۲=\overline{BC}^۲-\overline{AB}^۲ \Rightarrow x^۲=۱۲^۲-۶^۲=۱۴۴-۳۶ \Rightarrow x=\sqrt{۱۰۸}$$

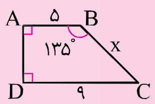
نکته: مثلث قائم‌الزاویه‌ای که یک زاویه ۴۵° داشته باشد، متساوی‌الساقین است.



نتیجه: اندازهٔ وتر در هر مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین به اندازهٔ a، برابر با $a\times\sqrt{۲}$ است.



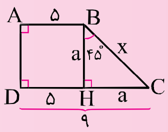
۹. در شکل زیر مقدار x کدام است؟ (آزمون ورودی)



۱) ۴ ۲) $۴\sqrt{۲}$

۳) ۸ ۴) ۵

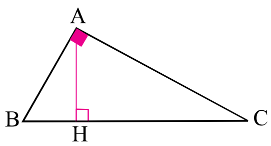
پاسخ: گزینهٔ «۲» باتوجه به این‌که در مثلث قائم‌الزاویه ضلع روبه‌رو به زاویه ۴۵°، $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ وتر است داریم:



$$a=۹-۵=۴$$

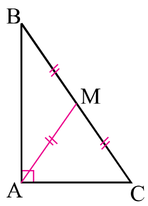
$$\overset{\triangle}{HCB}: \frac{\sqrt{۲}}{۲}x=a \Rightarrow x=۴\times\frac{۲}{\sqrt{۲}}=\frac{۸}{\sqrt{۲}} \Rightarrow \frac{۸\times\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}}=\frac{۸\sqrt{۲}}{۲}=۴\sqrt{۲}$$

نکته: در مثلث قائم‌الزاویه ABC داریم:

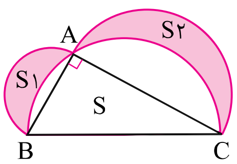


۱) $\overline{AH}=\frac{\overline{AB}\times\overline{AC}}{\overline{BC}}$ ۲) $\overline{AH}^۲=\overline{BH}\times\overline{CH}$ ۳) $\overline{AB}^۲=\overline{BH}\times\overline{BC}$ $\overline{AC}^۲=\overline{CH}\times\overline{BC}$

نکته: در هر مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر، نصف وتر است. $\overline{AM}=\overline{BM}=\overline{CM}$

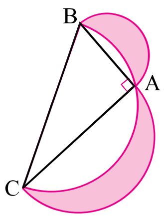


هلالین بقراط



اگر در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC کمان‌هایی به قطر ضلع‌های $\overline{BC}$، $\overline{AB}$ و $\overline{AC}$ زده شود، هلال‌هایی به مساحت‌های $S_۱$ و $S_۲$ به وجود می‌آید که مجموع مساحت این دو هلال با مساحت قائم‌الزاویه ABC برابر است یعنی: $S=S_۱+S_۲$

مثال: اضلاع مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC در شکل زیر ۱۵، ۲۵ و ۲۰ سانتی‌متر است. دو نیم‌دایره به قطرهای اضلاع مثلث، مطابق شکل زیر رسم شده‌اند. مساحت ناحیهٔ رنگی چقدر است؟



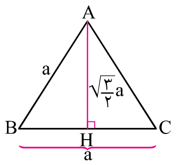
پاسخ:

$$S_{\overset{\triangle}{ABC}}=\frac{۲۰\times ۱۵}{۲}=۱۵۰cm^۲ \Rightarrow S_۱+S_۲=۱۵۰cm^۲$$

مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع

مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر است با:

$$S=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}a\times a}{۲}=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}$$



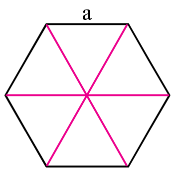
مثال: **مساحت مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع $۱۲cm^{۲}$ را به دست آورید.**

پاسخ: $\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}=\frac{\sqrt{۳}\times ۱۲\times ۱۲}{۴}=۳۶\sqrt{۳}\,cm^{۲}$

مساحت شش‌ضلعی منتظم

هر شش‌ضلعی منتظم از ۶ مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل شده است. اگر طول ضلع آن را a درنظر بگیریم، مساحت آن برابر است با:

$$S=۶\times\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^{۲}$$

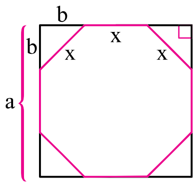


مثال: **مساحت شش‌ضلعی منتظمی به ضلع $۸cm$ را به دست آورید.**

پاسخ: $S=\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}a^{۲}\Rightarrow S=\frac{۳\sqrt{۳}\times\overset{۴}{\cancel{۸}}\times ۸}{\underset{۱}{\cancel{۲}}}=۹۶\sqrt{۳}\,cm^{۲}$

مساحت هشت‌ضلعی منتظم

برای محاسبهٔ مساحت هشت‌ضلعی منتظم، مانند شکل زیر یک هشت‌ضلعی به ضلع x روی محیط مربعی به ضلع a رسم می‌کنیم. با کمک رابطهٔ فیثاغورس برای محاسبهٔ ضلع مثلث‌های قائم‌الزاویه ایجادشده داریم:



$$x^{۲}=b^{۲}+b^{۲}=۲b^{۲}\Rightarrow\frac{x^{۲}}{۲}=b^{۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}x$$

از طرفی رابطه‌های مقابل برقرارند: $a=(\sqrt{۲}+۱)x$ یا $x=(\sqrt{۲}-۱)a$

حال داریم: مساحت هشت‌ضلعی منتظم = مساحت مربع −۴(مساحت مثلث قائم‌الزاویه)

$$S_{\text{مثلث}}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}x\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}x\times\frac{۱}{۲}=\frac{x^{۲}}{۴}$$

$$S_{\text{مربع}}=(x+۲(\frac{\sqrt{۲}x}{۲}))^{۲}=(x+\sqrt{۲}x)^{۲}=x^{۲}+۲\sqrt{۲}x^{۲}+۲x^{۲}$$

$$S_{\text{هشت‌ضلعی}}=x^{۲}+۲\sqrt{۲}x^{۲}+۲x^{۲}-۴(\frac{x^{۲}}{۴})=x^{۲}+۲\sqrt{۲}x^{۲}+۲x^{۲}-x^{۲}=۲\sqrt{۲}x^{۲}+۲x^{۲}=۲x^{۲}(۱+\sqrt{۲})$$

مثال: **یک هشت‌ضلعی منتظم به ضلع $۷cm$ داخل مربعی محاط شده است. طول ضلع مربع و مساحت هشت‌ضلعی را به دست آورید.**

پاسخ: ضلع مربع : $a=(\sqrt{۲}+۱)x\Rightarrow a=(\sqrt{۲}+۱)۷=۷\sqrt{۲}+۷$

مساحت هشت‌ضلعی : $S=۲x^{۲}(۱+\sqrt{۲})\Rightarrow S=۲\times ۷^{۲}(۱+\sqrt{۲})=۲\times ۴۹(۱+\sqrt{۲})=۹۸(۱+\sqrt{۲})=۹۸+۹۸\sqrt{۲}$

محیط

۱. محیط هر مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین به اندازهٔ ضلع قائم a برابر است با: $p=۲a+\sqrt{۲}a=(۲+\sqrt{۲})a$

مثال: **محیط مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی به ضلع قائمهٔ $۵\sqrt{۲}$ را به دست آورید.**

پاسخ: $p=(۲+\sqrt{۲})a\Rightarrow p=(۲+\sqrt{۲})۵\sqrt{۲}=۱۰\sqrt{۲}+۵\times\sqrt{۲}\times\sqrt{۲}=۱۰\sqrt{۲}+۵\times ۲=۱۰\sqrt{۱۰}+۱۰$

۲. محیط هر مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی با وتری به طول x برابر است با: $p=۲\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}x+x=x+\sqrt{۲}x=(۱+\sqrt{۲})x$

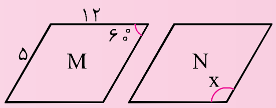
مثال: **محیط مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقینی با وتری به اندازهٔ $\sqrt{۱۸}$ سانتی‌متر را به دست آورید.**

پاسخ: $p=(۱+\sqrt{۲})x=(۱+\sqrt{۲})\times\sqrt{۱۸}=\sqrt{۱۸}+\sqrt{۳۶}=\sqrt{۱۸}+۶$

شکل‌های هم‌نهشت

اگر بتوانیم شکلی را با یک یا چند تبدیل هندسی (تقارن، دوران و انتقال) طوری بر شکل دیگر منطبق کنیم که کاملاً یکدیگر را بپوشانند، می‌توانیم بگوییم که این دو شکل هم‌نهشت هستند.

۱۰. متوازی‌الاضلاع‌های M و N هم‌نهشت هستند. محیط متوازی‌الاضلاع N چند سانتی‌متر و اندازهٔ زاویهٔ x چند درجه است؟



۱) ۶۰° و ۳۶cm ۲) ۶۰° و ۶۰cm

۳) ۱۲۰° و ۳۴cm ۴) ۱۲۰° و ۶۰cm

پاسخ: گزینهٔ «۳» چون دو چهارضلعی M و N هم‌نهشت هستند، پس تمام اجزای متناظر آن‌ها و در نتیجه محیط دو چهارضلعی برابر است. پس داریم: $P_M = P_N = ۲(۱۲+۵) = ۳۴\,cm$

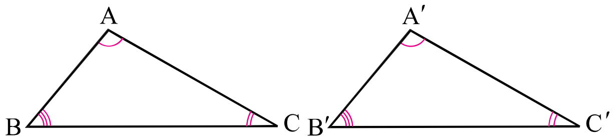
و با توجه به این که در متوازی‌الاضلاع دو زاویهٔ مجاور مکمل‌اند داریم: $x + ۶۰^\circ = ۱۸۰^\circ \Rightarrow x = ۱۲۰^\circ$

هم‌نهشتی مثلث‌ها

در دو مثلث هم‌نهشت ضلع‌های نظیر و زاویه‌های نظیر با هم برابرند.

$\hat{A} = \hat{A'}$ $\hat{B} = \hat{B'}$ $\hat{C} = \hat{C'}$

$\overline{AB} = \overline{A'B'}$ $\overline{AC} = \overline{A'C'}$ $\overline{BC} = \overline{B'C'}$



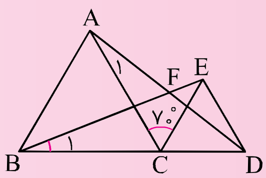
دو مثلث بنا به سه حالت با هم هم‌نهشت می‌شوند:

۱. اگر دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها از مثلثی، با دو ضلع و زاویهٔ بین آن‌ها از مثلثی دیگر مساوی باشند، آن دو مثلث با هم هم‌نهشت هستند. (ض ز ض)

۲. اگر دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از مثلثی، با دو زاویه و ضلع بین آن‌ها از مثلثی دیگر مساوی باشند، آن دو مثلث هم‌نهشت هستند. (ز ض ز)

۳. اگر سه ضلع از مثلثی با سه ضلع از مثلث دیگر مساوی باشند، آن دو مثلث هم‌نهشت هستند. (ض ض ض)

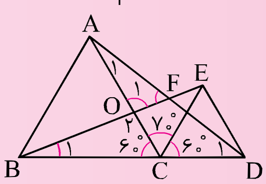
۱۱. درشکل زیر $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{ECD}$ متساوی‌الاضلاع هستند. زاویه $A\hat{F}B$ چند درجه است؟



۱) ۴۰° ۲) ۴۵°

۳) ۵۰° ۴) ۶۰°

پاسخ: گزینهٔ «۴» از آن‌جا که دو مثلث $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{ECD}$ متساوی‌الاضلاع هستند و با توجه به شکل مقابل داریم:



$$\left.\begin{array}{l}\overline{DC} = \overline{EC}\\ \overline{AC} = \overline{BC}\\ B\hat{C}E = D\hat{C}A = ۱۲۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ACD} \cong \overset{\Delta}{ECB} \Rightarrow \hat{B}_۱ = \hat{A}_۱ \quad (*)$$

با توجه به این‌که دو زاویه $\hat{O}_۲$ و $\hat{O}_۱$ در مثلث $\overset{\Delta}{AOF}$ و $\overset{\Delta}{COB}$ برابرند و رابطهٔ (*) داریم: $A\hat{F}B = \hat{C} = ۶۰^\circ$

دو مثلث قائم‌الزاویه بنا به دو حالت با هم، هم‌نهشت می‌شوند:

۱. اگر وتر و یک زاویه تند از مثلثی قائم‌الزاویه با وتر و یک زاویهٔ تند از مثلث قائم‌الزاویهٔ دیگری مساوی باشند، آن دو مثلث با هم، هم‌نهشت هستند. (و ز)

۲. اگر وتر و یک ضلع از مثلثی قائم‌الزاویه با وتر و یک ضلع از مثلث قائم‌الزاویه دیگر مساوی باشند، آن دو مثلث با هم، هم‌نهشت هستند. (و ض)

۱۲. دو مثلث قائم‌الزاویه در کدام دو حالت با هم، هم‌نهشت می‌شوند؟

۱) دو مثلث، یک زاویه تند مساوی داشته باشند.

۲) دو زاویهٔ حاده (تند) از مثلثی با دو زاویهٔ حاده (تند) از مثلث دیگر برابر باشد.

۳) وتر و یک زاویهٔ حاده (تند) از مثلثی با وتر و یک زاویهٔ حاده (تند) از مثلث دیگر برابر باشند.

۴) یک ضلع زاویهٔ قائمه از مثلثی با یک ضلع زاویهٔ قائمه از مثلث دیگر برابر باشند.

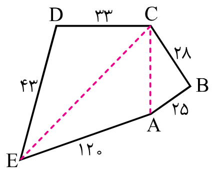
پاسخ: گزینهٔ «۳»

بسته تمرین ۱

۱. با کدام تعداد چوب‌کبریت یکسان و بدون شکستن آن‌ها، نمی‌توان مثلث ساخت؟ (کانگورو ۲۰۰۸)

۱) ۷ ۲) ۶ ۳) ۵ ۴) ۴

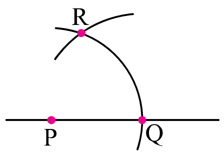
۲. دربارهٔ پنج‌ضلعی ABCDE می‌دانیم $\overline{AE}=۱۲۰$، $\overline{DE}=۴۳$، $\overline{CD}=۳۳$، $\overline{BC}=۲۸$ و $\overline{AB}=۲۵$. برای طول پاره‌خط‌های AC و CE کدام مقادیر قابل قبول است؟ (المپیاد ریاضی)



۱) ۴۰ و ۷۰ ۲) ۵۰ و ۷۵

۳) ۵۵ و ۷۵ ۴) ۵۰ و ۷۰

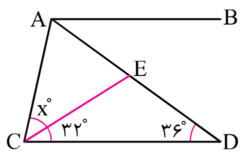
۳. در شکل زیر کمانی به مرکز P رسم شده است. طوری که خط را در نقطهٔ Q قطع کند. پس از آن کمان دیگری با همان شعاع از Q رسم شده است، طوری که کمان اول را در R قطع کند. اندازهٔ زاویهٔ PRQ چقدر است؟



۱) ۳۰° ۲) ۴۵°

۳) ۶۰° ۴) ۷۵°

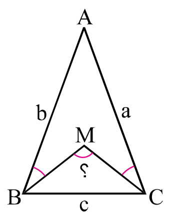
۴. درشکل زیر اگر $\overline{CA}=\overline{CE}$ باشد، اندازهٔ x چقدر است؟ (مسابقات جهانی IMC)



۱) ۴۸ ۲) ۴۷

۳) ۴۶ ۴) ۴۴

۵. مثلث ABC متساوی‌الساقین و زاویه‌های $A\hat{B}M$ و $M\hat{C}B$ با هم برابر هستند. اگر $\hat{A}=۲۲^\circ$ باشد، آن‌گاه اندازهٔ زاویهٔ $B\hat{M}C$ کدام است؟ (المپیاد ریاضی)



۱) ۱۵۸° ۲) ۹۰°

۳) ۱۲۰° ۴) ۱۰۱°

۶. در مثلث ABC، اگر $\overline{AB}=\overline{AC}=۳$ و $\hat{B}=۷۵^\circ$ باشد، آن‌گاه طول ارتفاع وارد بر AC کدام است؟ (آزمون ورودی)

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\sqrt{۳}$ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) ۱

۷. در مثلث ABC میانه‌های AD و CE یک‌دیگر را در M قطع می‌کنند. وسط AE را N می‌نامیم. اگر مساحت مثلث $\overset{\Delta}{MNE}$، k برابر مساحت مثلث ABC باشد، k برابر است با:

۱) $\frac{۱}{۶}$ ۲) $\frac{۱}{۸}$ ۳) $\frac{۱}{۹}$ ۴) $\frac{۱}{۱۲}$

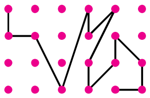
۸. محل برخورد عمودمنصف‌ها در مثلث: (مسابقات علمی)

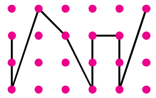
۱) روی بزرگ‌ترین ضلع است. ۲) داخل مثلث است. ۳) خارج مثلث است ۴) هر سه مورد امکان‌پذیر است

۹. چند مثلث قائم‌الزاویه وجود دارد که اندازهٔ وتر و اندازهٔ یک ضلع زاویه قائمه آن، هر دو اعدادی اول باشند؟ (تیزهوشان)

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۴ ۴) بی‌شمار

۱۰. اگرفاصلهٔ هر دو نقطه مجاور افقی و عمودی یک باشد، کدام گزینه در مورد «طول مسیر شکل الف» برابر A و «طول مسیر شکل ب» برابر B درست است؟ (المپیاد ریاضی)


(الف)

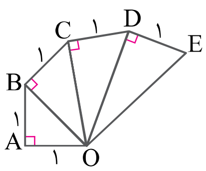

(ب)

۱) $A = B + ۳$
۲) $B = A + ۳$
۳) $A < B + ۳$
۴) $B > A + ۳$

۱۱. محیط مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۱۸ است. مجموع مربعات همهٔ اضلاع این مثلث ۱۲۸ است. مساحت آن چقدر است؟ (مسابقات جهانی ریاضی)

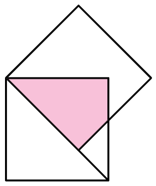
۱) ۱۸
۲) ۱۶
۳) ۱۲
۴) ۹

۱۲. محیط شکل مقابل کدام است؟ (آزمون ورودی)



۱) $۵+\sqrt{۲}+\sqrt{۳}+\sqrt{۴}+\sqrt{۵}$
۲) $۵+\sqrt{۳}$
۳) $۵+\sqrt{۴}$
۴) $۵+\sqrt{۵}$

۱۳. دو مربع به ضلع ۱ مطابق شکل روی هم قرار گرفته‌اند. مساحت ناحیه رنگی کدام است؟ (مسابقات ریاضی جهانی)



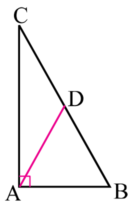
۱) $\sqrt{۲}-۱$
۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۳) $\frac{\sqrt{۲}+۱}{۲}$
۴) $\frac{۵}{۹}$

۱۴. مثلثی که طول دو تا از ضلع‌هایش برابر است با ۶ و ۸، وقتی بیشترین مساحت را دارد که طول ضلع سومش برابر باشد با: (مسابقات جهانی ریاضی)

۱) ۶
۲) ۷
۳) ۸
۴) ۱۰

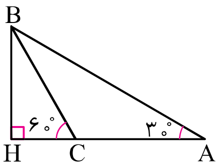
۱۵. در شکل زیر، مثلث ABC در رأس A قائمه است و مثلث ABD متساوی‌الاضلاع است.

اگر $\overline{AC} = ۶$ باشد، طول وتر $\overline{BC}$ کدام است؟



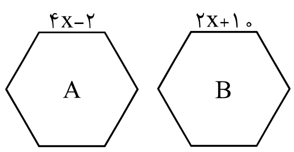
۱) $۴\sqrt{۳}$
۲) $۵\sqrt{۲}$
۳) $۴\sqrt{۲}$
۴) $۵\sqrt{۳}$

۱۶. در شکل زیر $\hat{A} = ۳۰^\circ$ و $\hat{C} = ۶۰^\circ$ است. اگر $\overline{AC} = ۳۰cm$ باشد، طول $\overline{AH}$ برابر است با: (آزمون ورودی)



۱) ۴۵
۲) ۶۰
۳) ۷۵
۴) ۹۰

۱۷. دو شش‌ضلعی منتظم مقابل با هم هم‌نهشت هستند. محیط شکل B برابر است با:



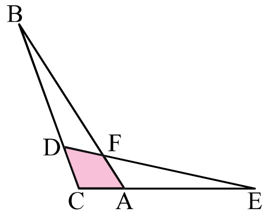
۱) ۳۶
۲) ۱۳۶
۳) ۳۲
۴) ۱۳۲

۱۸. در مثلث ABC داریم: $\overline{BC} = ۲\overline{AC}$ و میانهٔ $\overline{AM}$ را از طرف A به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا به نقطهٔ D برسیم، نسبت $\frac{\overline{CD}}{\overline{AB}}$ کدام است؟ (آزمون ورودی)

۱) ۱
۲) $\frac{۱}{۲}$
۳) ۲
۴) $\frac{۳}{۲}$

۱۹. در شکل زیر، $\overline{DC}=\overline{AC}=1$ و $\overline{CB}=\overline{CE}=4$. اگر مساحت مثلث ABC برابر با S باشد، (مسابقات جهانی ریاضی)

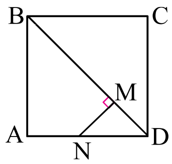
آن‌گاه مساحت چهارضلعی AFDC برابر است با:



۱) $\frac{S}{2}$ ۲) $\frac{S}{4}$

۳) $\frac{S}{5}$ ۴) $\frac{2S}{5}$

۲۰. در مربع مقابل $\overline{BA}=\overline{BM}$ و $B\widehat{M}N=90^\circ$ می‌باشد، اندازه $A\widehat{N}B$ چند درجه است؟



۱) $65/5^\circ$ ۲) $66/5^\circ$

۳) $67/5^\circ$ ۴) $68/5^\circ$

۱. ۱ ۲ ۳ ۴	۵. ۱ ۲ ۳ ۴	۹. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۳. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۷. ۱ ۲ ۳ ۴
۲. ۱ ۲ ۳ ۴	۶. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۰. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۴. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۸. ۱ ۲ ۳ ۴
۳. ۱ ۲ ۳ ۴	۷. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۱. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۵. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۹. ۱ ۲ ۳ ۴
۴. ۱ ۲ ۳ ۴	۸. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۲. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۶. ۱ ۲ ۳ ۴	۲۰. ۱ ۲ ۳ ۴

توجه: حالا با توجه به پاسخ‌نامه و از طریق فرمول می‌توانید درصد پاسخگویی خود به سؤالات را مشخص نموده و ادامه مسیر خود را مطابق دستورالعمل آمده، مشخص کنید.

$$\text{درصد پاسخگویی} = \frac{\text{تعداد سؤالات با پاسخ درست}}{\text{تعداد کل سؤالات}} \times 100$$

شناسنامه سؤالات بسته تمرین ۱

شماره سؤال	عنوان زیرموضوع	سطح سؤال	پاسخ	سؤالات متناظر در پیش‌آزمون	سؤالات متناظر در بسته تمرین ۲	سؤالات متناظر در بسته تمرین ۳
۱	اجزای مثلث		۴	۱	۱	۱
۲	اجزای مثلث		۲	۱	۱	۱
۳	اجزای مثلث		۳	۲	۲	۲
۴	اجزای مثلث		۴	۲	۲	۲
۵	اجزای مثلث		۴	۳	۳	۳
۶	اجزای مثلث		۱	۴	۴	۴
۷	اجزای مثلث		۴	۵ ۶	۵	۵
۸	اجزای مثلث		۴	۷	۶	۶
۹	رابطهٔ فیثاغورس		۴	۸	۷	۷
۱۰	رابطهٔ فیثاغورس		۳	۸	۷	۷
۱۱	رابطهٔ فیثاغورس		۴	۸	۸	۸
۱۲	رابطهٔ فیثاغورس		۴	۸	۹	۹
۱۳	رابطهٔ فیثاغورس		۱	۸	۱۰	۱۰
۱۴	رابطهٔ فیثاغورس		۴	۸	۱۰	۱۰
۱۵	رابطهٔ فیثاغورس		۱	۹	۱۱	۱۱
۱۶	رابطهٔ فیثاغورس		۱	۹	۱۱	۱۱
۱۷	هم‌نهشتی چندضلعی‌ها		۴	۱۰	۱۲	۱۲
۱۸	هم‌نهشتی مثلث‌ها		۱	۱۱	۱۳	۱۳
۱۹	هم‌نهشتی مثلث‌ها		۴	۱۱	۱۳	۱۳
۲۰	هم‌نهشتی مثلث‌ها		۳	۱۲	۱۵	۱۵

پاسخ‌نامه

۱ گزینهٔ «۴» می‌دانیم که در هر مثلث هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر مثلث کوچک‌تر و از تفاضل آن‌ها بزرگ‌تر است. پس داریم:

✓ گزینهٔ «۲»: $۶=۲+۲+۲ \Rightarrow ۲+۲>۲$ ✓ گزینهٔ «۱»: $۷=۲+۲+۳ \Rightarrow ۲+۲>۳ , ۳+۲>۵$

× گزینهٔ «۴» : $۴=۱+۱+۲ \Rightarrow ۱+۲>۱ , ۱+۱ \not> ۲$ ✓ گزینهٔ «۳»: $۵=۱+۲+۲ \Rightarrow ۱+۲>۲ , ۲+۲>۱$

برای تعداد ۴ چوب‌کبریت مساوی نمی‌توان شرط بالا را برقرار کرد پس نمی‌توان با آن‌ها مثلث ساخت.

۲ گزینهٔ «۲» با توجه به رابطهٔ مثلثی داریم:

گزینهٔ «۱» : $\overset{\triangle}{ACE}:\overline{AC}+\overline{CE}=۷۰+۴۰=۱۱۰<۱۲۰=\overline{AE}$ غ‌ق‌ق

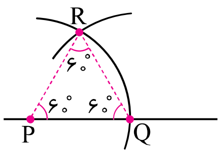
اگر گزینهٔ «۲» را امتحان کنیم در هر سه مثلث $\overset{\triangle}{CED}$، $\overset{\triangle}{ABC}$، $\overset{\triangle}{ACE}$ رابطه برقرار است.

گزینهٔ «۳» : $\overset{\triangle}{ABC}:\overline{AB}+\overline{BC}=۲۵+۲۸=۵۳<۵۵=\overline{AC}$ غ‌ق‌ق

گزینهٔ «۴» $\overset{\triangle}{ACE}:\overline{AC}+\overline{CE}=۵۰+۷۰=۱۲۰=\overline{AE}$ غ‌ق‌ق

۳ گزینهٔ «۳» با توجه به مفروضات مسئله مثلث PQR متساوی‌الاضلاع است،

پس هر زاویهٔ آن برابر ۶۰° می‌شود.

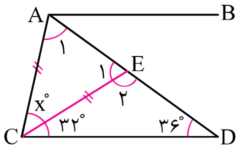


۴ گزینهٔ «۴»

$\widehat{E}_۲=۱۸۰^\circ-(۳۶^\circ+۳۲^\circ)=۱۱۲^\circ \Rightarrow \widehat{E}_۱=۱۸۰^\circ-۱۱۲^\circ=۶۸^\circ$

$\overline{CE}=\overline{CA} \Rightarrow$ متساوی‌الساقین $\overset{\triangle}{ACE} \Rightarrow \widehat{A}_۱=\widehat{E}_۱$

$\Rightarrow \widehat{x}=۱۸۰^\circ-(۶۸^\circ\times ۲)=۱۸۰-۱۳۶=۴۴^\circ$



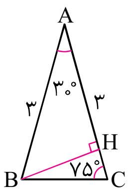
۵ گزینهٔ «۴» طبق گفته‌های صورت سؤال، معلوم است که $\overline{MC}$ و $\overline{BM}$ نیمسازهای دو زاویهٔ $\widehat{C}$ و $\widehat{B}$ هستند. از طرفی طبق نکات گفته‌شده در درس‌نامه می‌دانیم زاویه بین نیمسازهای داخلی در هر مثلث برابر است با: $\widehat{M}=۹۰^\circ+\frac{A}{۲}$ بنابراین می‌توان نوشت:

$\widehat{M}=۹۰^\circ+\frac{۲۲^\circ}{۲}=۹۰^\circ+۱۱^\circ=۱۰۱^\circ$

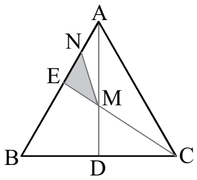
۶ گزینهٔ «۱» طبق مفروضات مسئله می‌توان شکل زیر را رسم کرد.

همچنین می‌دانیم در هر مثلث قائم‌الزاویه، ضلع مقابل به زاویهٔ ۳۰° نصف وتر است پس در مثلث ABH داریم:

$\overline{BH}=\frac{\overline{AB}}{۲}=\frac{۳}{۲}$



۷ گزینهٔ «۴» طبق نکات گفته‌شده در درس‌نامه می‌دانیم که میانه‌های هر مثلث، آن را به ۶ مثلث کوچک‌تر با مساحت‌های مساوی تقسیم می‌کنند. پس داریم:



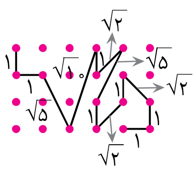
$$\left.\begin{array}{l} S_{\overset{\triangle}{AME}}=\frac{۱}{۶}S_{\overset{\triangle}{ABC}} \\ S_{\overset{\triangle}{MNE}}=\frac{۱}{۲}S_{\overset{\triangle}{AME}} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{MNE}}=\frac{۱}{۶}\times\frac{۱}{۲}S_{\overset{\triangle}{ABC}} \Rightarrow k=\frac{۱}{۱۲}$$

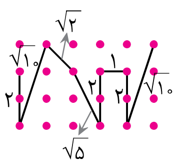
۸ گزینهٔ «۴»

۹ گزینهٔ «۴» با توجه به اعداد فیثاغورس مانند زیر می‌توان گفت که گزینهٔ «۴» درست است.

$(۳,۴,۵),(۵,۱۲,۱۳),(۱۱,۶۰,۶۱),\cdots$

۱۰ گزینهٔ «۳» با توجه به این‌که فاصلهٔ هر دو نقطه برابر یک است و با توجه به رابطهٔ فیثاغورس می‌توان نوشت:





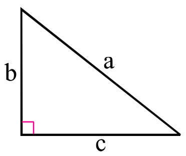
طول مسیر «الف» $=A=۷+۲\sqrt{۵}+۳\sqrt{۲}+\sqrt{۱۰}$

طول مسیر «ب» $=B=۷+\sqrt{۵}+\sqrt{۲}+۲\sqrt{۱۰}$

$\Rightarrow A-B=۷+۲\sqrt{۵}+۳\sqrt{۲}+\sqrt{۱۰}-(۷+\sqrt{۵}+\sqrt{۲}+۲\sqrt{۱۰})$

$\Rightarrow A-B=\underbrace{\sqrt{۵}+۲\sqrt{۲}}_{\text{تقریباً ۵}}-\underbrace{\sqrt{۱۰}}_{\text{تقریباً ۳}} \Rightarrow A<B+۳$

۱۱ گزینهٔ «۴» اگر اضلاع مثلث را مطابق شکل برابر a، b و c درنظر بگیریم، داریم:



$$a^۲=b^۲+c^۲\ ,\ a^۲+\underbrace{b^۲+c^۲}_{a^۲}=۱۲۸\Rightarrow ۲a^۲=۱۲۸\Rightarrow a^۲=۶۴\Rightarrow a=۸$$

از یک سو محیط مثلث برابر ۱۸ است، پس:

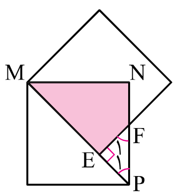
$$a+b+c=۱۸\xrightarrow{a=۸}b+c=۱۰\xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}}(b+c)^۲=۱۰۰\Rightarrow\underbrace{b^۲+c^۲}_{a^۲}+۲bc=۱۰۰\Rightarrow ۶۴+۲bc=۱۰۰\Rightarrow bc=۱۸$$

$$S_{\text{مثلث}}=\frac{۱}{۲}bc=\frac{۱}{۲}\times۱۸=۹$$

۱۲ گزینهٔ «۴» با استفاده از رابطه فیثاغورس در مثلث‌ها خواهیم داشت: $\overline{OB}=\sqrt{۲}\ ,\ \overline{OC}=\sqrt{۳}\ ,\ \overline{OD}=\sqrt{۴}=۲\ ,\ \overline{OE}=\sqrt{۵}$

بنابراین: $p=\overline{OA}+\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CD}+\overline{DE}+\overline{OE}=۱+۱+۱+۱+۱+\sqrt{۵}=۵+\sqrt{۵}$

۱۳ گزینهٔ «۱»



$$\overset{\Delta}{NMP}\ \text{قائم‌الزاویه}\Rightarrow\overline{MP}^۲=۱^۲+۱^۲\Rightarrow MP=\sqrt{۲}$$

$$\Rightarrow\overline{EP}=\overline{MP}-\overline{ME}=\sqrt{۲}-۱\Rightarrow\hat{E}=۹۰^\circ\ ,\ \text{قطرمربع}\ MP\Rightarrow\hat{F}_۱=\hat{P}_۱=۴۵^\circ\Rightarrow\overline{EF}=\overline{EP}=\sqrt{۲}-۱$$

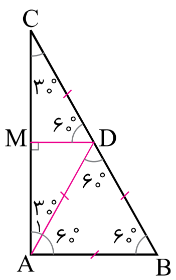
$$\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{EFP}}=\frac{(\sqrt{۲}-۱)(\sqrt{۲}-۱)}{۲}=\frac{۳-۲\sqrt{۲}}{۲}$$

بنابراین مساحت چهارضلعی MNFE برابر است با:

$$S_{MNPE}=S_{\overset{\Delta}{MNP}}-S_{\overset{\Delta}{EFP}}=(\frac{۱\times۱}{۲})-\frac{۳-۲\sqrt{۲}}{۲}=\frac{۱-۳+۲\sqrt{۲}}{۲}=\frac{-۲+۲\sqrt{۲}}{۲}=-۱+\sqrt{۲}=\sqrt{۲}-۱$$

۱۴ گزینهٔ «۴» با توجه به اعداد فیثاغورسی و این‌که مثلث بیشترین مساحت را داراست پس قائم‌الزاویه بوده و طول ضلع سوم باید ۱۰ باشد.

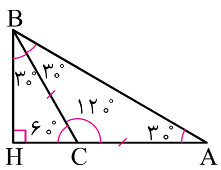
۱۵ گزینهٔ «۱» با توجه به این‌که در هر مثلث قائم‌الزاویه، میانهٔ وارد بر وتر، نصف وتر است و نکات مربوط به زاویه‌ها در مثلث قائم‌الزاویه طبق شکل ابتدا از D به AC عمود می‌کنیم، از آن‌جا که مثلث $\overset{\Delta}{ADC}$ متساوی الساقین است $(\hat{C}=\hat{A}_۱)$ ارتفاع $\overline{MD}$ میانه هم می‌شود، پس داریم:



$$\overset{\Delta}{DMC}:\overline{MC}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\overline{DC}\Rightarrow ۳=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\overline{DC}\Rightarrow\overline{DC}=۳\times\frac{۲}{\sqrt{۳}}=\frac{۶\times\sqrt{۳}}{\sqrt{۳}\times\sqrt{۳}}=\frac{۶\sqrt{۳}}{۳}=۲\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow\overline{BC}=۲\times\overline{DC}=۲\times۲\sqrt{۳}=۴\sqrt{۳}$$

۱۶ گزینهٔ «۱» با توجه به اندازهٔ زاویه‌های معلوم‌شده در شکل می‌توان فهمید که مثلث ABC متساوی‌الساقین است. پس داریم:



$$\overline{AC}=\overline{BC}=۳۰cm$$

همچنین می‌دانیم که ضلع مقابل به زاویهٔ ۳۰° در مثلث قائم‌الزاویه نصف وتر است، پس:

$$\overset{\Delta}{ABC}:\overline{CH}=\frac{۱}{۲}\times\overline{BC}=\frac{۱}{۲}\times۳۰=۱۵cm\Rightarrow\overline{AH}=\overline{CH}+\overline{AC}=۱۵+۳۰=۴۵cm$$

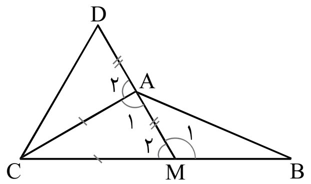
۱۷ گزینهٔ «۴» به دلیل هم‌نهشتی شکل‌ها و تساوی اجزای متناظر می‌توان نوشت:

$$۴x-۲=۲x+۱۰\Rightarrow ۴x-۲x=۱۰+۲\Rightarrow ۲x=۱۲\Rightarrow x=۶$$

$$\text{طول هر ضلع شکل B}=۴(۶)-۲=۲۲\Rightarrow P=۶\times۲۲=۱۳۲$$

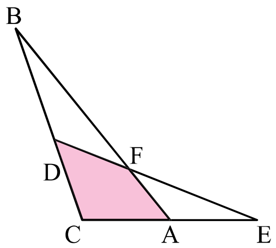
۱۸ گزینهٔ «۱»

$\overset{\triangle}{AMC}$ متساوی‌الساقین $\Rightarrow \overline{AC}=\frac{۱}{۲}\overline{BC}=\overline{MC} \Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{M}_۲ \Rightarrow \hat{M}_۱=\hat{A}_۲$



$$\left.\begin{array}{l}\overline{AM}=\overline{AD}\\ \hat{M}_۱=\hat{A}_۲\\ \overline{MB}=\overline{AC}\end{array}\right\} \xrightarrow[\text{(ض ز ض)}]{} \overset{\triangle}{AMB}\cong\overset{\triangle}{ADC} \Rightarrow \overline{AB}=\overline{DC} \Rightarrow \frac{\overline{DC}}{\overline{AB}}=۱$$

۱۹ گزینهٔ «۴» ابتدا از F به C وصل می‌کنیم، بنابراین داریم:



$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB}=\overline{CE}=۴\\ \overline{AC}=\overline{DC}=۱\\ \hat{C}=\hat{C}\ \text{مشترک}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{ABC}\overset{\text{(ض ز ض)}}{\cong}\overset{\triangle}{CDE}$$

اجزای متناظر: $\underset{(۱)}{\hat{A}_۱=\hat{D}_۱}\ ,\ \underset{(۲)}{\hat{B}=\hat{E}}\ ,\ \overline{AB}=\overline{DE}$

$$\left.\begin{array}{l}(۱)\Rightarrow \hat{A}_۲=\hat{D}_۲\\ \hat{B}=\hat{E}\\ \overline{BD}=\overline{AE}=۳\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{BDF}\overset{\text{(ز ض ز)}}{\cong}\overset{\triangle}{AEF} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \overline{DF}=\overline{AF}$$

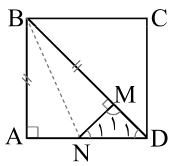
$$\left.\begin{array}{l}\overline{DF}=\overline{AF}\\ \overline{AC}=\overline{DC}\\ \overline{FC}=\overline{FC}\end{array}\right\} \Rightarrow \overset{\triangle}{DFC}\overset{\text{(ض ض ض)}}{\cong}\overset{\triangle}{FAC}$$

$$\left.\begin{array}{l}S_{\overset{\triangle}{AFC}}=\overline{FH}\times\overline{AC}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۲}\overline{FH}\\ S_{\overset{\triangle}{AEF}}=\overline{FH}\times\overline{AE}\times\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}\overline{FH}\end{array}\right\} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{AEF}}=۳S_{\overset{\triangle}{AFC}}$$

$$S_{\overset{\triangle}{DCE}}=۲S_{\overset{\triangle}{ACF}}+S_{\overset{\triangle}{AEF}}=۲S_{\overset{\triangle}{ACF}}+۳S_{\overset{\triangle}{AFC}}=۵S_{\overset{\triangle}{ACF}} \Rightarrow S=۵S_{\overset{\triangle}{ACF}} \Rightarrow S_{\overset{\triangle}{ACF}}=\frac{S}{۵}$$

$$\Rightarrow S_{ACDF}=۲S_{\overset{\triangle}{ACF}}=۲\times\frac{S}{۵}=\frac{۲S}{۵}$$

۲۰ گزینهٔ «۳» ابتدا از B به N وصل می‌کنیم، داریم:



$$\overset{\triangle}{MND}:\left.\begin{array}{l}\hat{D}_۱=۴۵^\circ\\ \hat{M}_۱=۹۰^\circ\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{N}_۱=۴۵^\circ \Rightarrow M\hat{N}A=۱۸۰^\circ-۴۵^\circ=۱۳۵^\circ$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{BM}=\overline{BA}\\ \overline{BN}-\overline{BN}\end{array}\right\} \overset{\text{(و ض)}}{\Rightarrow} \overset{\triangle}{BMN}\cong\overset{\triangle}{BAN} \Rightarrow A\hat{N}B=B\hat{N}M \Rightarrow A\hat{N}B=\frac{M\hat{N}A}{۲}=\frac{۱۳۵^\circ}{۲}=۶۷/۵^\circ$$

توجه: حالا با توجه به درصد پاسخگویی خود در بسته تمرین ۱، از روی یکی از نردبان‌های «نقشه راه دانش‌آموز» انتهای کتاب حرکت کرده تا خود را به خانه جدید برسانید و بعد از آن مطابق دستورالعمل آورده‌شده در آن خانه عمل کنید. توجه کنید که در صورت ورود به بسته تمرین ۲ باز هم باید مطابق دستورالعمل‌های این نقشه عمل کنید. توجه شود که سؤالات متناظر با هر سؤال در هر بسته تمرین در جدولی که در ابتدای پاسخ‌نامه هر بسته تمرین آمده‌است، مشخص شده‌است.

بسته تمرین ۲

۱. محمد ۹ قطعه به طول‌های ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ دسی‌متر دارد. او می‌خواهد با استفاده از این قطعه‌ها مثلث بسازد؛ یعنی هر قطعه را به جای یکی از اضلاع مثلث قرار دهد. چند مثلث می‌تواند بسازد که یکی از اضلاع هر یک از آن‌ها ۱ باشد؟ (کانگورو ۲۰۰۲)

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

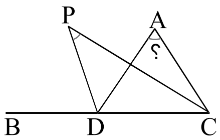
۲. همهٔ زاویه‌های مثلثی از ۵۹ درجه بزرگ‌ترند. کدام گزینه دربارهٔ این مثلث همواره درست است؟ (تیزهوشان)

۱) یک زاویهٔ منفرجه دارد. ۲) یک زاویه ۶۰° دارد.

۳) قائم‌الزاویه است. ۴) همهٔ زاویه‌هایش از ۶۲° کوچک‌ترند.

۳. در شکل مقابل، نیمساز زاویهٔ $A\widehat{D}B$ و $A\widehat{C}D$ در نقطهٔ P با هم برخورد می‌کنند. (آزمون ورودی)

اگر $\widehat{P}=۴۰^\circ$ باشد، $D\widehat{A}C$ چند درجه است؟



۱) ۸۰° ۲) ۶۵°

۳) ۶۰° ۴) ۵۵°

۴. طول هر ساق مثلث متساوی‌الساقینی ۱۳ متر و طول قاعدهٔ آن ۱۰ متر است. طول ارتفاع وارد بر قاعده چند متر است؟ (آزمون ورودی)

۱) ۱۲ ۲) $\sqrt{۶۹}$ ۳) $\sqrt{۲۶۹}$ ۴) ۵

۵. در مثلث ABD زاویهٔ B قائمه است. نقطهٔ C روی AD به طوری است که $\overline{AC}=\overline{CD}$ و $\overline{AB}=\overline{BC}$، زاویهٔ DAB برحسب درجه برابر است با:

۱) $۶۷\frac{۱}{۲}$ ۲) ۶۰° ۳) ۴۵° ۴) ۳۰°

۶. مرکز دایره‌ای که از سه رأس مثلثی بگذرد، روی .... قرار دارد. (آزمون ورودی)

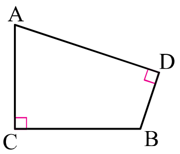
۱) محل برخورد نیمسازها ۲) محل برخورد عمودمنصف‌ها ۳) محل برخورد میانه‌ها ۴) محل برخورد ارتفاع‌ها

۷. در مربعی به ضلع ۴ سانتی‌متر، فاصله وسط یک ضلع از قطر مربع چقدر است؟ (تیزهوشان)

۱) ۱cm ۲) $\frac{۲}{۳}$cm ۳) $\sqrt{۲}$cm ۴) $\sqrt{۳}$cm

۸. روی وتر AB از مثلث قائم‌الزاویه ABC، مثلث قائم‌الزاویه دیگر ABD با وتر AB ساخته می‌شود. (تیزهوشان)

اگر $\overline{BC}=۲$، $\overline{AC}=a$ و $\overline{AD}=۳$ باشد، آن‌گاه BD برابر با چند است؟



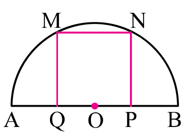
۱) $\sqrt{۵-a^۲}$ ۲) $\sqrt{a^۲-۵}$

۳) $\sqrt{a^۲+۵}$ ۴) $a^۲+۵$

۹. اگر در مثلث متساوی‌الساقینی که هر ساق آن یک واحد است، یک زاویه، متمم دیگری باشد، محیط مثلث کدام است؟ (تیزهوشان)

۱) $۲+\sqrt{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $۱+۲\sqrt{۲}$ ۴) $۱+\sqrt{۲}$

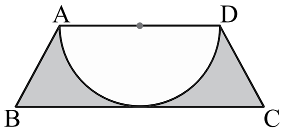
۱۰. در نیم‌دایره‌ای به قطر $AB=۲R$، مربعی محاط می‌کنیم که یک ضلع آن بر AB واقع باشد. مساحت مربع کدام است؟ (تیزهوشان ۷۷)



۱) $\frac{۴}{۵}R^۲$ ۲) $\frac{۲}{۵}R^۲$

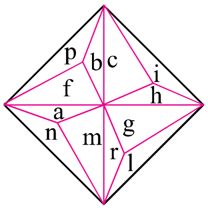
۳) $\frac{۳}{۵}R^۲$ ۴) $۱+\sqrt{۲}$

۱۱. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD، نیم‌دایره‌ای به قطر AD محاط شده است. اگر $\overline{AB}=۶cm$ و $\widehat{B}=۶۰^\circ$ باشد، مساحت قسمت رنگی برابر است با:



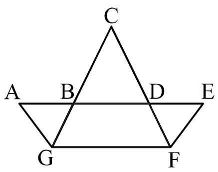
۱) $۹\sqrt{۳}-۳/۸۷$
۲) $۳\sqrt{۲}+۳/۸۷$
۳) $۹\sqrt{۳}+۱۱/۶۱$
۴) $۹\sqrt{۳}-۱۱/۶۱$

۱۲. در مربع مقابل چند مثلث می‌توان یافت که با مثلث f هم‌نهشت باشند؟



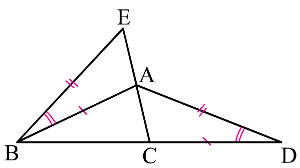
۱) صفر
۲) ۱
۳) ۲
۴) ۳

۱۳. در شکل مقابل، چهارضلعی‌های AEFG و BDFG ذوزنقه‌ی متساوی‌الساقین هستند. دلیل تساوی مثلث‌های ABG و DEF کدام است؟



۱) (ض ض ض)
۲) (ز ض ز)
۳) (ض ز ض)
۴) دلایل کافی برای تساوی دو مثلث وجود ندارد.

۱۴. با توجه به شکل مقابل، کدام نتیجه‌گیری لزوماً درست است؟



۱) $\overline{AB}=\overline{AC}$
۲) $\overline{AB}=\overline{BC}$
۳) $\overline{AE}=\overline{BC}$
۴) $\overline{AE}=\overline{AC}$

۱۵. مربع ABCD در صفحه مفروض است. سه خط $L_۱$، $L_۲$ و $L_۳$ را به ترتیب از سه رأس A، B و C رسم می‌کنیم، به طوری که فاصلهٔ $L_۱$ با $L_۲$ برابر ۵ و فاصلهٔ $L_۲$ با $L_۳$ برابر ۷ باشد، مساحت مربع ABCD کدام است؟ (المپیاد ریاضی)

۱) ۷۰
۲) $\sqrt{۳۵}$
۳) ۳۵
۴) ۷۴

۱.	۱ ۲ ۳ ۴	۴.	۱ ۲ ۳ ۴	۷.	۱ ۲ ۳ ۴	۱۰.	۱ ۲ ۳ ۴	۱۳.	۱ ۲ ۳ ۴
۲.	۱ ۲ ۳ ۴	۵.	۱ ۲ ۳ ۴	۸.	۱ ۲ ۳ ۴	۱۱.	۱ ۲ ۳ ۴	۱۴.	۱ ۲ ۳ ۴
۳.	۱ ۲ ۳ ۴	۶.	۱ ۲ ۳ ۴	۹.	۱ ۲ ۳ ۴	۱۲.	۱ ۲ ۳ ۴	۱۵.	۱ ۲ ۳ ۴

توجه: حالا با توجه به پاسخ‌نامه و از طریق فرمول می‌توانید درصد پاسخگویی خود به سؤالات را مشخص نموده و ادامه مسیر خود را مطابق دستورالعمل آمده، مشخص کنید.

$$\text{درصد پاسخگویی} = \frac{\text{تعداد سؤالات با پاسخ درست}}{\text{تعداد کل سؤالات}} \times ۱۰۰$$

شناسنامه سؤالات بسته تمرین ۲

شماره سؤال	عنوان زیرموضوع	سطح سؤال	پاسخ	سؤالات متناظر در پیش‌آزمون	سؤالات متناظر در بسته تمرین ۳
۱	اجزای مثلث		۴	۱	۱
۲	اجزای مثلث		۴	۲	۲
۳	اجزای مثلث		۱	۳	۳
۴	اجزای مثلث		۱	۴	۴
۵	اجزای مثلث		۲	۵ ۶	۵
۶	اجزای مثلث		۲	۷	۶
۷	رابطهٔ فیثاغورس		۳	۸	۷
۸	رابطهٔ فیثاغورس		۲	۸	۸
۹	رابطهٔ فیثاغورس		۱	۸	۹
۱۰	رابطهٔ فیثاغورس		۱	۸	۱۰
۱۱	رابطهٔ فیثاغورس		۳	۹	۱۱
۱۲	هم‌نهشتی چندضلعی‌ها		۴	۱۰	۱۲
۱۳	هم‌نهشتی مثلث‌ها		۳	۱۱	۱۳
۱۴	هم‌نهشتی مثلث‌ها		۴	۱۱	۱۴
۱۵	هم‌نهشتی مثلث‌ها		۴	۱۲	۱۵

پاسخ‌نامه

۱ گزینهٔ «۴» با توجه به این‌که در هر مثلث حاصل‌جمع دو ضلع کوچک از ضلع سوم بزرگ‌تر است، نمی‌توان مثلثی را که یکی از اضلاع آن عدد ۱ باشد رسم کرد به عنوان مثال:

$۱,۶,۷ \Rightarrow ۱+۶=۷$ یا $۱,۶,۴ \Rightarrow ۱+۴<۶$

۲ گزینهٔ «۴» اگر زاویه‌های مثلث را M، N و P بگیریم خواهیم داشت:

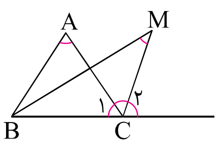
$$\begin{cases}\widehat{M}>۵۹^\circ\\ \widehat{N}>۵۹^\circ\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\widehat{M}+\widehat{N}>۵۹^\circ+۵۹^\circ=۱۱۸^\circ\\ \widehat{M}+\widehat{N}+\widehat{P}=۱۸۰^\circ\end{cases} \Rightarrow ۱۸۰-\widehat{P}>۱۱۸^\circ \Rightarrow \widehat{P}<۶۲^\circ$$

بنابراین نتیجه می‌شود که تمام زاویه‌ها از ۶۲° کم‌ترند.

۳ گزینهٔ «۱»

نکته: در هر مثلث، زاویهٔ بین نیمساز داخلی یک زاویه با نیمساز خارجی زاویهٔ دیگر مثلث همواره برابر است با نصف زاویهٔ سوم آن.

$$\begin{cases}BM:\widehat{B} \text{ نیمساز زاویه}\\ CM:\widehat{C}_۲ \text{ نیمساز زاویه}\end{cases} \Rightarrow \widehat{M}=\frac{\widehat{A}}{۲}$$

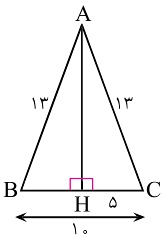


با توجه به نکتهٔ بالا داریم:

$$\widehat{P}=\frac{\widehat{A}}{۲} \Rightarrow \widehat{A}=۲\widehat{P}=۲\times۴۰^\circ=۸۰^\circ$$

۴ گزینهٔ «۱» با توجه به این که در مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع، نیمساز، میانه و عمودمنصف متناظر با رأس مثلث بر هم منطبق هستند، داریم:

$$AH^{۲}=۱۳^{۲}-۵^{۲}=۱۶۹-۲۵=۱۴۴ \Rightarrow AH=۱۲$$



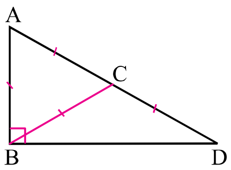
۵ گزینهٔ «۲» چون نقطهٔ C وسط AD قرار دارد BC میانهٔ وارد بر وتر AD است، بنابراین نصف وتر است.

پس:

$$\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{AC}$$

بنابراین مثلث ABC متساوی‌الاضلاع و در نتیجه:

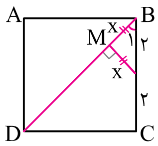
$$D\widehat{A}B=۶۰^{\circ}$$



۶ گزینهٔ «۲» مرکز دایره‌ای که از هر سه رأس مثلث می‌گذرد بر روی محل تقاطع عمودمنصف‌های اضلاع مثلث قرار دارد.

۷ گزینهٔ «۳» طبق رابطهٔ فیثاغورس داریم:

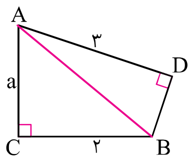
$$\widehat{M}=۹۰^{\circ}\ ,\ \text{قطر } BD \Rightarrow \widehat{N}=\widehat{B}_{۱}=۴۵^{\circ} \Rightarrow \text{متساوی‌الساقین } \overset{\Delta}{MBN}$$



$$x^{۲}+x^{۲}=۲^{۲}$$

$$۲x^{۲}=۴ \Rightarrow x^{۲}=۲ \Rightarrow x=\sqrt{۲}$$

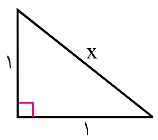
۸ گزینهٔ «۲»



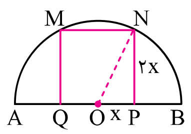
$$\left.\begin{array}{l}\overset{\Delta}{ABC}:\overline{AB}^{۲}=a^{۲}+۴\\ \overset{\Delta}{ABD}:\overline{AB}^{۲}=\overline{BD}^{۲}+۹\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{BD}^{۲}+۹=a^{۲}+۴ \Rightarrow \overline{BD}^{۲}=a^{۲}-۵ \Rightarrow \overline{BD}=\sqrt{a^{۲}-۵}$$

۹ گزینهٔ «۱» چون دو زاویه از مثلث متمم هستند پس زاویهٔ سوم قائمه و مثلث قائم‌الزاویه است، پس داریم:

$$x^{۲}=۱^{۲}+۱^{۲}=۲ \Rightarrow x=\sqrt{۲} \Rightarrow p=۱+۱+\sqrt{۲}=۲+\sqrt{۲}$$



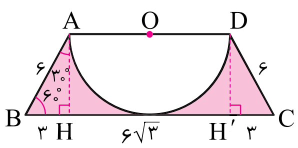
۱۰ گزینهٔ «۱» طبق شکل اگر از O به N وصل کنیم خواهیم داشت:



$$\overset{\Delta}{NPO}:R^{۲}=x^{۲}+(۲x)^{۲} \Rightarrow R^{۲}=x^{۲}+۴x^{۲} \Rightarrow R^{۲}=۵x^{۲} \Rightarrow x^{۲}=\frac{R^{۲}}{۵}$$

$$S=(NP)^{۲}=(۲x)^{۲}=۴x^{۲}=\frac{۴R^{۲}}{۵}$$

۱۱ گزینهٔ «۳» با توجه به نکات زاویه‌های ۳۰ و ۶۰ درجه در مثلث قائم‌الزاویه داریم:



$$\overline{AH}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times\overline{AB}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\times۶=۳\sqrt{۳}\ ,\ \overline{BH}=\frac{۱}{۲}\times\overline{AB}=\frac{۱}{۲}\times۶=۳$$

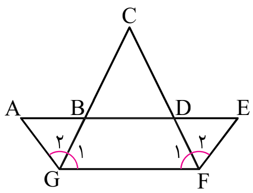
$$\text{شعاع دایره } \overline{OA}=\overline{AH} \Rightarrow \overline{AD}=۲\times\overline{OA}=۲\times AH=۲\times۳\sqrt{۳}=۶\sqrt{۳}$$

$$S_{\text{رنگی}}=S_{\text{ذوزنقه}}-S_{\text{نیم‌دایره}}=\frac{(۶\sqrt{۳}+(۳+۳+۶\sqrt{۳}))\times۳\sqrt{۳}}{۲}-\frac{(۳\sqrt{۳})^{۲}\pi}{۲}$$

$$=\frac{۳۶\times۳+۱۸\sqrt{۳}}{۲}-\frac{۲۷\pi}{۲}=\frac{۱۰۸+۱۸\sqrt{۳}-۲۷\times۳/۱۴}{۲}=۵۴+۹\sqrt{۳}-۴۲/۳۹=۹\sqrt{۳}+۱۱/۶۱$$

۱۲ گزینهٔ «۴» با توجه به شکل اگر مثلث‌های m، g و c را دوران می‌دهیم بر مثلث f منطبق می‌شوند که با مثلث f هم‌نهشت هستند.

۱۳ گزینهٔ «۳»



ذوزنقه‌متساوی‌الساقین AGFE $\Rightarrow \begin{cases} EF = AG \\ A\hat{G}F = E\hat{F}G \quad (۱) \end{cases}$

ذوزنقه‌متساوی‌الاضلاع BDFG $\Rightarrow \begin{cases} BG = FD \\ \hat{F}_۱ = \hat{G}_۱ \quad (۲) \end{cases}$

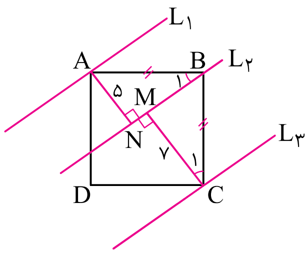
$\Rightarrow (۱), (۲)\ \hat{F}_۲ = \hat{G}_۲ \quad (۳)$

$$\left.\begin{matrix} EF = AG \\ BG = FD \\ \hat{G}_۲ = \hat{F}_۲ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ABG} \overset{(\text{ض ز ض})}{\cong} \overset{\Delta}{DEF}$$

۱۴ گزینهٔ «۴» طبق شکل داریم:

$$\left.\begin{matrix} \overline{CD} = \overline{AB} \\ A\hat{D}C = A\hat{B}E \\ \overline{AD} = \overline{BE} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{CAD} \overset{(\text{ض ز ض})}{\cong} \overset{\Delta}{ABE} \xrightarrow{\text{اجزای متناظر}} \overline{AE} = \overline{AC}$$

۱۵ گزینهٔ «۴»



$$\left.\begin{matrix} \overline{AB} = \overline{BC} \\ \hat{B}_۱ = \hat{C}_۱ \end{matrix}\right\} \Rightarrow \overset{\Delta}{ANB} \overset{(\text{و ز})}{\cong} \overset{\Delta}{BMC} \Rightarrow \overline{AN} = \overline{BM} = ۵$$

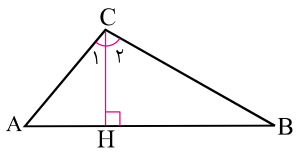
$$\Rightarrow \overset{\Delta}{BMC} : S_{\text{مربع}} = \overline{BC}^۲ = BM^۲ + MC^۲ = ۵^۲ + ۷^۲ = ۷۴$$

بسته تمرین ۳

۱. با کدام سه طول داده‌شده می‌توان مثلث ساخت؟ (تیزهوشان)

۱) $a+b+1\,,\,b\,,\,a$ ۲) $a+b,b+1,a+1$ ۳) $3a\,,\,2a\,,\,a-2$ ۴) $2a^2+3a+1,(a+1)^2,a^2$

۲. در شکل روبه‌رو، CH ارتفاع است. کدام‌یک از روابط زیر درست است؟ (آزمون ورودی)



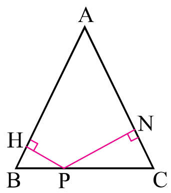
۱) $\widehat{C}_1-\widehat{C}_2=\widehat{B}-\widehat{A}$ ۲) $\widehat{C}_1+\widehat{C}_2=\widehat{A}+\widehat{B}$

۳) $\widehat{C}_1+\widehat{C}_2=\widehat{A}-\widehat{B}$ ۴) $\widehat{C}_1-\widehat{C}_2=\widehat{A}+\widehat{B}$

۳. در مثلث قائم‌الزاویه ABC، $\widehat{A}=90^\circ$ می‌باشد و نسبت زاویه B به C، $\frac{2}{3}$ است. اگر نیمساز زاویهٔ داخلی A با نیمساز خارجی B یک‌دیگر را در نقطهٔ D قطع کنند، اندازهٔ زاویه D کدام است؟

۱) 27° ۲) 36° ۳) 18° ۴) 45°

۴. در مثلث متساوی‌الساقین دلخواهی از نقطهٔ دلخواه P روی قاعده، عمودهایی بر دو ساق رسم می‌کنیم. $PH+PN$ برابر است با:



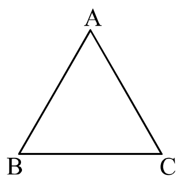
۱) ارتفاع وارد بر ساق ۲) ارتفاع وارد بر قاعده

۳) AP ۴) $\frac{3}{2}BC$

۵. در مثلث قائم‌الزاویه ABC، اگر $\widehat{A}=90^\circ$ و ارتفاع AH و میانه AM زاویهٔ قائمه را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده باشند و $BC=1$ باشد، آن‌گاه اندازه MH برابر است با: (آزمون ورودی)

۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{6}$

۶. شهرداری می‌خواهد یک ایستگاه آتش‌نشانی، بین نقاط A، B و C در یک شهر احداث کند، به طوری که فاصله این ایستگاه از آن سه نقطه به یک اندازه باشد. باید این ایستگاه در محل تلاقی .... مثلث ABC احداث شود. (تیزهوشان)



۱) عمودمنصف‌های ۲) نیمسازهای

۳) میانه‌های ۴) ارتفاع‌های

۷. در دایره‌ای دو وتر عمود بر هم متقاطع‌اند. اگر طول دو قسمت جداشده روی وتر افقی ۴ و ۱۲ و دو قسمت جداشده روی وتر عمودی ۶ و ۸ باشد، اندازهٔ قطر دایره چقدر است؟ (تیزهوشان ۹۲)

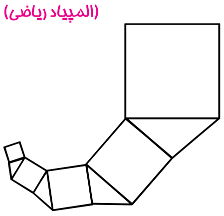
۱) $4\sqrt{65}$ ۲) $\sqrt{65}$ ۳) $2\sqrt{65}$ ۴) $\frac{\sqrt{65}}{2}$

۸. در مثلث قائم‌الزاویه ABC، $(\widehat{A}=90^\circ)$ ارتفاع وارد بر وتر، وتر را به دو قسمت ۳ و ۱۲ تقسیم کرده است. کدام‌یک از اعداد زیر می‌تواند ضلع مثلث باشد؟ (تیزهوشان)

۱) $\sqrt{39}$ ۲) $\sqrt{26}$ ۳) $3\sqrt{5}$ ۴) $\sqrt{30}$

۹. در شکل زیر همهٔ چهارضلعی‌ها، مربع و همه مثلث‌ها، قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین هستند. (المپیاد ریاضی)

اگر مساحت یازدهمین مربع یک واحد مربع باشد، طول ضلع مربع اول چقدر است؟

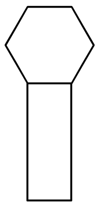


۱) $\sqrt{۳۲}$ ۲) ۳۲

۳) $۳۲\sqrt{۲}$ ۴) ۶۴

۱۰. در شکل زیر عرض مستطیل با ضلع شش‌ضلعی منتظم برابر است. (تیزهوشان)

اگر مساحت شش‌ضلعی $\frac{۱}{۲}$ مساحت مستطیل باشد، نسبت طول به عرض مستطیل کدام است؟

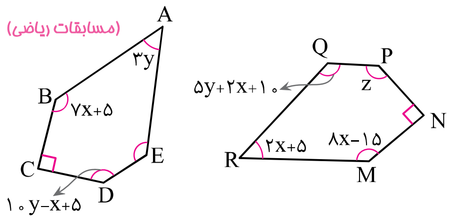


۱) $۳\sqrt{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ ۳) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۴) $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}$

۱۱. در مثلث ABC، $\overline{AB}=۱۲$ ، $\overline{AC}=۴$ و $\widehat{A}=۴۵^\circ$ است. مساحت این مثلث برابر است با: (تیزهوشان)

۱) $۱۲\sqrt{۲}$ ۲) ۱۲ ۳) $۱۲\sqrt{۳}$ ۴) ۱۸

۱۲. پنج‌ضلعی ABCDE با پنج‌ضلعی MNPQR هم‌نهشت است. در این صورت مقدار $(\widehat{B}+\widehat{D}+\widehat{E})-(\widehat{A}+\widehat{C})$ چند برابر قائمه است؟ (مسابقات ریاضی)



۱) ۱ ۲) ۲

۳) ۳ ۴) ۴

۱۳. در چهارضلعی ABCD قطر AC را رسم کرده‌ایم. اندازهٔ زاویهٔ D برابر با ۶۰° است و همچنین زاویهٔ CAD، ۶۰ درجه بیشتر از زاویه BAC است. اگر $\overline{AB}=\overline{AD}$ باشد، کدام رابطه دربارهٔ طول ضلع CD درست است؟ (المپیاد ریاضی)

۱) $\overline{CD}=۲\overline{AD}$ ۲) $\overline{CD}=\overline{AB}+\overline{BC}$ ۳) $\overline{CD}=۲\overline{AD}-\overline{BC}$ ۴) $\overline{CD}=\overline{AB}-\overline{BC}$

۱۴. در مثلث ABC، اندازه ضلع $\overline{BC}$ دو برابر ضلع $\overline{AB}$ است. میانه $\overline{AM}$ را از طرف A به اندازه خودش تا نقطه D امتداد می‌دهیم. نسبت $\frac{\overline{BD}}{\overline{AC}}$ کدام گزینه است؟

۱) ۱ ۲) بزرگ‌تر از ۱ ۳) کوچک‌تر از ۱ ۴) مساوی ۲

۱۵. در یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، دو قطر عمود بر هم هستند. اگر قاعده‌های این ذوزنقه ۱۴ و ۲ باشند، اندازهٔ ساق کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۱. ۱ ۲ ۳ ۴	۴. ۱ ۲ ۳ ۴	۷. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۰. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۳. ۱ ۲ ۳ ۴
۲. ۱ ۲ ۳ ۴	۵. ۱ ۲ ۳ ۴	۸. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۱. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۴. ۱ ۲ ۳ ۴
۳. ۱ ۲ ۳ ۴	۶. ۱ ۲ ۳ ۴	۹. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۲. ۱ ۲ ۳ ۴	۱۵. ۱ ۲ ۳ ۴

توجه: حالا با توجه به پاسخ‌نامه و از طریق فرمول می‌توانید درصد پاسخگویی خود به سؤالات را مشخص نموده و ادامه مسیر خود را مطابق دستورالعمل آمده، مشخص کنید.

$$\text{درصد پاسخگویی} = \frac{\text{تعداد سؤالات با پاسخ درست}}{\text{تعداد کل سؤالات}} \times ۱۰۰$$

شناسنامه سؤالات بسته تمرین ۳

شماره سؤال	عنوان زیرموضوع	سطح سؤال	پاسخ	سؤالات متناظر در پیش آزمون
۱	اجزای مثلث		۲	۱
۲	اجزای مثلث		۱	۲
۳	اجزای مثلث		۱	۳
۴	اجزای مثلث		۱	۴
۵	اجزای مثلث		۳	۵، ۶
۶	اجزای مثلث		۱	۷
۷	رابطهٔ فیثاغورس		۳	۸
۸	رابطهٔ فیثاغورس		۳	۸
۹	رابطهٔ فیثاغورس		۲	۸
۱۰	رابطهٔ فیثاغورس		۱	۸
۱۱	رابطهٔ فیثاغورس		۱	۹
۱۲	هم‌نهشتی چندضلعی‌ها		۳	۱۰
۱۳	هم‌نهشتی مثلث‌ها		۲	۱۱
۱۴	هم‌نهشتی مثلث‌ها		۱	۱۱
۱۵	هم‌نهشتی مثلث‌ها		۳	۱۲

پاسخ‌نامه

۱ گزینهٔ «۲» با توجه به رابطهٔ اندازه اضلاع در یک مثلث داریم:

$$(b+۱)+(a+b)=a+۱+۲b>a+۱ \quad (a+۱)+(b+۱)=a+b+۲>a+b$$
$$(a+۱)+(a+b)=۲a+(b+۱)>b+۱$$

۲ گزینهٔ «۱» با توجّه به شکل و دو مثلث قائم‌الزاویه AHC و BHC داریم:

$$\left.\begin{array}{l} \overset{\triangle}{CHB}:\hat{C}_۲+\hat{B}=۹۰^\circ \\ \overset{\triangle}{CHA}:\hat{C}_۱+\hat{A}=۹۰^\circ \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{C}_۲+\hat{B}=\hat{C}_۱+\hat{A} \Rightarrow \hat{B}-\hat{A}=\hat{C}_۱-\hat{C}_۲$$

۳ گزینهٔ «۱»

نکته: می‌دانیم که در مثلث ABC، اندازهٔ زاویهٔ D که از برخورد نیمساز زاویهٔ داخلی A و نیمساز زاویه خارجی B به دست می‌آید برابر $\frac{\hat{C}}{۲}$ است. بنابراین:

$$\frac{\hat{B}}{\hat{C}}=\frac{۲}{۳} \Rightarrow ۹۰\div(\overbrace{۲+۳}^{\text{جمع نسبت‌ها}})=۱۸ \Rightarrow \hat{C}=۳\times۱۸=۵۴^\circ$$

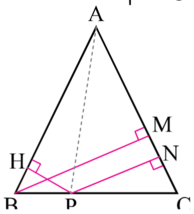
پس اندازهٔ زاویه D که از برخورد نیمساز داخلی A و نیمساز داخلی B پدید آمده برابر است با:

$$\hat{D}=\frac{\hat{C}}{۲}=\frac{۵۴^\circ}{۲}=۲۷^\circ$$

۴ گزینهٔ «۱» ابتدا A را به P وصل کرده و سپس از B پاره‌خطی بر ضلع AC عمود می‌کنیم و نقطه برخورد را M می‌نامیم که BM همان ارتفاع وارد بر ساق است. پس می‌توان نوشت:

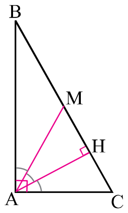
$$S_{ABC}=S_{APB}+S_{APC}=\frac{۱}{۲}AB\times PH+\frac{۱}{۲}PN\times AC$$

$$=\frac{۱}{۲}AB(PH+PN)=\frac{۱}{۲}BM\times AB\Rightarrow PH+PN=BM\Rightarrow \text{ارتفاع وارد بر ساق}$$



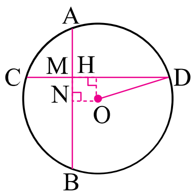
۵ گزینهٔ «۳» در $\overset{\Delta}{AMC}$، با توجه به مفروضات مسئله ارتفاع و نیمساز یکی هستند، بنابراین $\overset{\Delta}{AMC}$ متساوی‌الساقین می‌باشد که در نتیجه AH میانهٔ مثلث می‌شود پس داریم:

$$\overline{MH}=\frac{۱}{۲}\overline{MC}=\frac{۱}{۲}(\frac{۱}{۲}\overline{BC})=\frac{۱}{۴}\overline{BC}=\frac{۱}{۴}\times ۱=\frac{۱}{۴}$$



۶ گزینهٔ «۱» می‌دانیم که محل تلاقی عمود منصف‌های یک مثلث، از سه رأس آن به یک فاصله‌اند.

۷ گزینهٔ «۳» با توجه به شکل از مرکز دایره بر هر دو وتر عمود می‌کنیم که هر دو نصف وتر هستند.



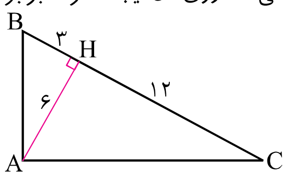
$$\overline{CD}=۴+۱۲=۱۶\Rightarrow \overline{HD}=\frac{\overline{CD}}{۲}=\frac{۱۶}{۲}=۸$$

$$\overline{AB}=۶+۸=۱۴\Rightarrow \overline{NB}=\frac{\overline{AB}}{۲}=\frac{۱۴}{۲}=۷$$

$$\overline{NM}=\overline{MB}-\overline{NB}=۸-۷=۱=OH$$

$$\overset{\Delta}{HOD}:\overline{HD}=۸,\overline{OH}=۱\Rightarrow \overline{OD}^۲=۸^۲+۱^۲=۶۵\Rightarrow \overline{OD}=\sqrt{۶۵}\Rightarrow \text{قطر دایره}=۲\sqrt{۶۵}$$

۸ گزینهٔ «۳» می‌دانیم که در هر مثلث قائم‌الزاویه مجذور ارتفاع وارد بر وتر با حاصل‌ضرب دو پاره‌خطی که روی آن ایجاد کرده برابر است پس:



$$AH^۲=۳\times ۱۲=۳۶\Rightarrow AH=\sqrt{۳۶}=۶$$

$$\overset{\Delta}{AHC}:\overline{AC}^۲=۶^۲+۱۲^۲\Rightarrow \overline{AC}=\sqrt{۱۸۰}=۶\sqrt{۵}$$

$$\overset{\Delta}{ABH}:\overline{AB}^۲=۶^۲+۳^۲\Rightarrow \overline{AB}=\sqrt{۴۵}=۳\sqrt{۵}$$

۹ گزینهٔ «۲» با در نظر گرفتن x به جای ضلع مربع اول طبق رابطهٔ فیثاغورس، ساق مثلث قائم‌الزاویه و از آنجا ضلع مربع دوم برابر $\frac{x}{\sqrt{۲}}$ می‌شود، و به همین ترتیب طول اضلاع مربع‌های سوم، چهارم و ... به ترتیب $\frac{x}{(\sqrt{۲})^۲}$، $\frac{x}{(\sqrt{۲})^۳}$ می‌باشد. بنابراین طول ضلع مربع یازدهم برابر خواهد بود با $\frac{x}{(\sqrt{۲})^{۱۰}}$ و از آنجا که طبق صورت مسئله مساحت مربع یازدهم ۱ واحد مربع است. بنابراین اندازهٔ هر ضلعش ۱ واحد می‌شود که در این صورت:

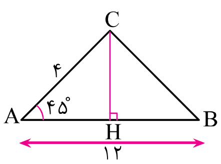
$$\frac{x}{(\sqrt{۲})^{۱۰}}=۱\Rightarrow x=(\sqrt{۲})^{۱۰}=۲^۵=۳۲\Rightarrow \text{طول ضلع مربع اول}$$

۱۰ گزینهٔ «۱» اگر ضلع مشترک بین شش‌ضلعی و مستطیل را x و طول مستطیل را y بگیریم داریم:

$$S_{\text{مستطیل}}=۲S_{\text{شش‌ضلعی منتظم}}=۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۴}x^۲\times ۶=۳x^۲\sqrt{۳}$$

$$S_{\text{مستطیل}}=x\times y=۳x^۲\sqrt{۳}\Rightarrow y=۳x\sqrt{۳}\Rightarrow \frac{y}{x}=۳\sqrt{۳}$$

۱۱ گزینهٔ «۱» با رسم شکل مقابل و با توجه به اندازهٔ ضلع مقابل به زاویه ۴۵° در مثلث قائم‌الزاویه داریم:



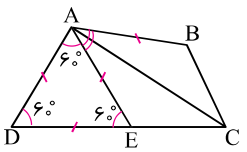
$$\overline{CH}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times\overline{AC}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times ۴=۲\sqrt{۲}\Rightarrow S_{\overset{\Delta}{ABC}}=\frac{\overline{AB}\times\overline{CH}}{۲}=\frac{۱۲\times ۲\sqrt{۲}}{۲}=۱۲\sqrt{۲}$$

۱۲ گزینهٔ «۳» با توجه به این‌که دو پنج‌ضلعی ABCDE و MNPQR با هم هم‌نهشت هستند، داریم:

$$\begin{cases}\hat{C}=\hat{N}=۹۰^\circ\\ \hat{B}=\hat{M}\Rightarrow ۷x+۵=۸x-۱۵\Rightarrow x=۲۰\Rightarrow \hat{B}=۷\times۲۰+۵=۱۴۵\\ \hat{A}=\hat{R}\Rightarrow ۳y=۲\times۲۰+۵\Rightarrow y=۱۵\Rightarrow \hat{A}=۳\times۱۵=۴۵\\ \hat{E}=\hat{Q}=۵y+۲x+۱۰=۷۵+۴۰+۱۰=۱۲۵\\ \hat{D}=\hat{P}=۱۰y-x+۵=۱۵۰-۲۰+۵=۱۳۵\end{cases}$$

$$(\hat{B}+\hat{D}+\hat{E})-(\hat{A}+\hat{C})=(۱۴۵+۱۳۵+۱۲۵)-(۹۰+۴۵)=۴۰۵-۱۳۵=۲۷۰=۳\times۹۰$$

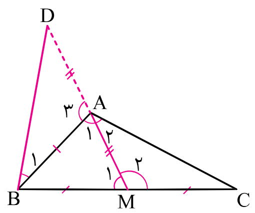
۱۳ گزینهٔ «۲» پاره‌خط $\overline{AE}$ را مطابق شکل طوری رسم می‌کنیم که زاویهٔ DAE، ۶۰° شود، بنابراین مثلث $\overset{\Delta}{DAE}$ متساوی‌الاضلاع خواهد شد. در نتیجه داریم:



$$\left.\begin{array}{l}\overline{AC}\ \text{ضلع مشترک}\\ (۱)\quad \overline{AE}=\overline{AB}=\overline{ED}\\ E\hat{A}C=C\hat{A}B\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{AEC}\overset{(\text{ض ز ض})}{\cong}\overset{\Delta}{ABC}\Rightarrow \overline{BC}=\overline{CE}\quad(۲)$$

$$\Rightarrow \overline{CD}=\overline{CE}+\overline{ED}\xrightarrow{(۱)\text{و}(۲)}\overline{CD}=\overline{BC}+\overline{AB}$$

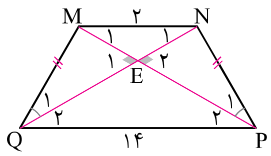
۱۴ گزینهٔ «۱» طبق شکل زیر می‌توانیم چنین بنویسیم.



$$\begin{cases}\overline{AB}=\overline{MC}\\ \overset{\Delta}{ABM}:\overline{AB}=\overline{BM}\Rightarrow \hat{A}_۱=\hat{M}_۱\Rightarrow ۱۸۰^\circ-\hat{A}_۱=۱۸۰-\hat{M}_۱\Rightarrow \hat{A}_۳=\hat{M}_۲\\ \overline{AD}=\overline{AM}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \overset{\Delta}{ADB}\overset{(\text{ض ز ض})}{\cong}\overset{\Delta}{AMC}\Rightarrow \overline{BD}=\overline{AC}\Rightarrow \frac{\overline{BD}}{\overline{AC}}=۱$$

۱۵ گزینهٔ «۳» با توجه به این‌که ذوزنقه MNPQ متساوی‌الساقین است، می‌توان نوشت:



$$\left.\begin{array}{l}\overline{MQ}=\overline{NP}\\ \hat{Q}_۱=\hat{P}_۱\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\Delta}{MEQ}\overset{(\text{و ز})}{\cong}\overset{\Delta}{NEP}\Rightarrow\begin{cases}\overline{ME}=\overline{NE}\\ \overline{PE}=\overline{QE}\end{cases}\Rightarrow \overset{\Delta}{QEP},\overset{\Delta}{MNE}\Rightarrow\text{قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین}$$

$$\Rightarrow \hat{M}_۱=\hat{N}_۱=\hat{Q}_۲=\hat{P}_۲=۴۵^\circ$$

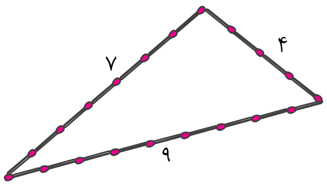
پس بنابر نکته ضلع مقابل به زاویه ۴۵° در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

$$\overline{QE}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\overline{PQ}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times۱۴=۷\sqrt{۲}\ ,\ \overline{ME}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\overline{MN}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times۲=\sqrt{۲}$$

$$\xrightarrow{\text{فیثاغورس}}\overline{MQ}^۲=QE^۲+ME^۲\Rightarrow \overline{MQ}^۲=(\sqrt{۲})^۲+(۷\sqrt{۲})^۲=۲+۹۸=۱۰۰\Rightarrow \overline{MQ}=\sqrt{۱۰۰}=۱۰$$

آزمون پایانی

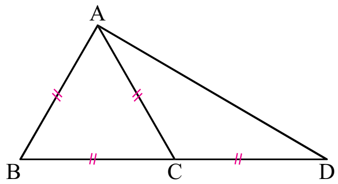
۱. چوب‌کبریت‌ها را به شکل یک مثلث چیده‌ایم. با این تعداد چوب‌کبریت چند مثلث متفاوت دیگر می‌توان ساخت؟ (المپیاد ریاضی)



۱) ۹　　۲) ۸

۳) ۶　　۴) ۷

۲. در شکل مقابل، $\widehat{D}$ چقدر است؟ (تیزهوشان)



۱) ۱۰°　　۲) ۳۰°

۳) ۴۵°　　۴) ۶۰°

۳. در مثلث متساوی‌الساقین ABC، نیمساز CD از زاویهٔ C برابر با قاعدهٔ BC است. اندازهٔ زاویهٔ CDA چقدر است؟ (مسابقات جهانی ریاضی)

۱) ۹۰°　　۲) ۱۰۰°　　۳) ۱۰۸°　　۴) ۱۲۰°

۴. در مثلث ABC، $\widehat{A}=۸۰^\circ$ و $\widehat{B}=۶۰^\circ$ است. زاویهٔ بین ارتفاع AH و ارتفاع BH' کدام است؟

۱) ۶۰°　　۲) ۲۰°　　۳) ۴۰°　　۴) ۸۰°

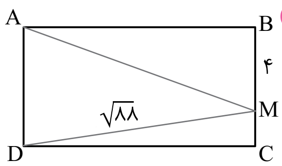
۵. پاره‌خط AK نیمساز زاویهٔ A در مثلث ABC است. AK مثلث ABC را به دو مثلث با مساحت‌های یکسان تقسیم می‌کند. مثلث ABC لزوماً مثلثی است: (مسابقات جهانی ریاضی)

۱) متساوی‌الاضلاع　　۲) متساوی‌الساقین　　۳) قائم‌الزاویه　　۴) حاده

۶. اندازهٔ دو ضلع قائمه از مثلث قائم‌الزاویه‌ای ۲ و ۶ واحد است. عمودمنصف وتر امتداد ضلع کوچک‌تر را در M قطع می‌کند. فاصلهٔ M از نزدیک‌ترین رأس این مثلث چند واحد است؟

۱) $۷/۵$　　۲) ۸　　۳) $\sqrt{۸۰}$　　۴) $\frac{۲۵}{۳}$

۷. در مستطیل زیر، $۲AM=۳MC$. اندازهٔ MC کدام است؟ $(DM=\sqrt{۸۸})$ (تیزهوشان ۹۲)



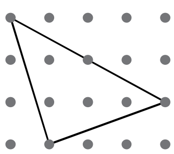
۱) $۴\sqrt{۲}$　　۲) $۳\sqrt{۲}$

۳) $۸\sqrt{۲}$　　۴) $۲\sqrt{۲}$

۸. در یک لوزی، یکی از قطرها دو برابر قطر دیگر است. اگر k مساحت لوزی برحسب مترمربع باشد، طول ضلع لوزی بر اساس k کدام است؟ (تیزهوشان)

۱) $\sqrt{۵k}$　　۲) $\frac{\sqrt{۵k}}{۲}$　　۳) $\frac{۵\sqrt{k}}{۳}$　　۴) $\frac{۵\sqrt{k}}{۲}$

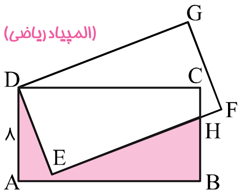
۹. در شکل زیر، فاصله هر دو نقطهٔ متوالی به صورت افقی یا عمودی برابر واحد است. اندازهٔ محیط مثلث کدام است؟ (آزمون ورودی)



۱) $۲(\sqrt{۱۰}-\sqrt{۵})$　　۲) $۲(\sqrt{۱۰}+\sqrt{۵})$

۳) $\sqrt{۱۰}-\sqrt{۵}$　　۴) $\sqrt{۱۰}+\sqrt{۵}$

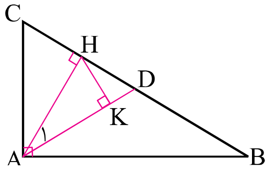
۱۰. در شکل زیر، مستطیل‌های ABCD و DEFG در رأس D مشترک‌اند و $\overline{DA}=\overline{DE}=۸$ و $\overline{AB}=\overline{EF}=۱۲$ است. اگر $\overline{BH}=۷$ باشد، مساحت ناحیه رنگی چقدر است؟ (المپیاد ریاضی)



۱) ۳۶ ۲) ۴۵

۳) ۴۸ ۴) ۵۴

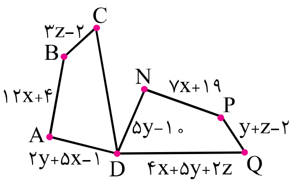
۱۱. در مثلث قائم‌الزاویه به رأس A، زاویهٔ C به اندازهٔ ۳۰° از زاویه B بیشتر است. ارتفاع AH را رسم کرده‌ایم. اگر طول نیمساز نظیر وتر (یعنی AD) $۴\sqrt{۲}$ باشد، فاصله نقطهٔ H تا این نیمساز کدام است؟ (تیزهوشان)



۱) $\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$

۳) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۴) $\frac{\sqrt{۲}}{۴}$

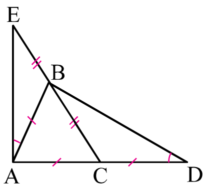
۱۲. اگر چهار ضلعی ABCD را α درجه حول نقطهٔ D دوران دهیم، بر چهارضلعی DNPQ منطبق می‌شود. در این صورت محیط چهارضلعی برابر است با: (مسابقات ریاضی)



۱) ۱۵۰ ۲) ۱۴۰

۳) ۱۳۵ ۴) ۱۲۰

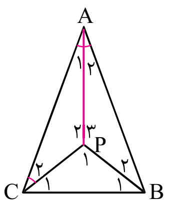
۱۳. اگر در شکل روبه‌رو $B\hat{A}C=۵۲^\circ$ باشد، آن‌گاه مجموع دو زاویهٔ D و E چند درجه است؟



۱) ۳۸ ۲) ۵۲

۳) ۵۸ ۴) ۶۴

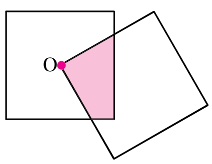
۱۴. در شکل مقابل $\overline{AC}=\overline{AB}$ و $C\hat{A}P=B\hat{A}P$ می‌باشد. اگر $C\hat{P}B=۲P\hat{B}C$، حاصل عبارت $C\hat{A}P+A\hat{C}P$ برابر است با:



۱) ۴۵° ۲) ۱۳۵°

۳) ۸۰° ۴) ۵۰°

۱۵. یکی از رأس‌های مربعی به ابعاد ۲×۲، بر روی مرکز مربعی با همان ابعاد قرار دارد. مساحت ناحیه مشترک بین مربع‌ها: (مسابقات جهانی ریاضی)



۱) کم‌تر از یک است. ۲) برابر ۱ است.

۳) بزرگ‌تر از ۱ است. ۴) با این اطلاعات مشخص نمی‌شود.

۱.	۱ ۲ ۳ ۴	۴.	۱ ۲ ۳ ۴	۷.	۱ ۲ ۳ ۴	۱۰.	۱ ۲ ۳ ۴	۱۳.	۱ ۲ ۳ ۴
۲.	۱ ۲ ۳ ۴	۵.	۱ ۲ ۳ ۴	۸.	۱ ۲ ۳ ۴	۱۱.	۱ ۲ ۳ ۴	۱۴.	۱ ۲ ۳ ۴
۳.	۱ ۲ ۳ ۴	۶.	۱ ۲ ۳ ۴	۹.	۱ ۲ ۳ ۴	۱۲.	۱ ۲ ۳ ۴	۱۵.	۱ ۲ ۳ ۴

شناسنامه سؤالات آزمون پایانی

شماره سؤال	عنوان زیرموضوع	پاسخ
۱	اجزای مثلث	۲
۲	اجزای مثلث	۲
۳	اجزای مثلث	۳
۴	اجزای مثلث	۳
۵	اجزای مثلث	۲
۶	اجزای مثلث	۲
۷	رابطهٔ فیثاغورس	۱
۸	رابطهٔ فیثاغورس	۲
۹	رابطهٔ فیثاغورس	۲
۱۰	رابطهٔ فیثاغورس	۴
۱۱	رابطهٔ فیثاغورس	۱
۱۲	هم‌نهشتی چندضلعی‌ها	۲
۱۳	هم‌نهشتی مثلث‌ها	۴
۱۴	هم‌نهشتی مثلث‌ها	۱
۱۵	هم‌نهشتی مثلث‌ها	۲

پاسخ‌نامه

۱ گزینهٔ «۲» با توجه به این‌که در هر مثلث مجموع دو ضلع کوچک باید از ضلع سوم بیشتر شود و تعداد چوب‌کبریت‌ها که ۲۰ عدد است می‌توان جدول روبه‌رو را تشکیل داد.

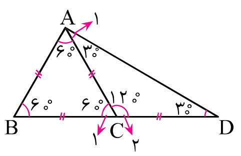
رابطهٔ اضلاع مثلث	جمع تعداد چوب کبریت‌ها	ضلع سوم	ضلع دوم	ضلع اول
$۲+۹>۹$	۲۰	۲	۹	۹
$۳+۸>۹$	۲۰	۳	۸	۹
$۴+۷>۹$	۲۰	۴	۷	۹
$۶+۵>۹$	۲۰	۵	۶	۹
$۸+۴>۸$	۲۰	۴	۸	۸
$۷+۵>۸$	۲۰	۵	۷	۸
$۶+۶>۸$	۲۰	۶	۶	۷
$۶+۷>۷$	۲۰	۶	۷	۷

بنابراین به ۸ حالت دیگر می‌توان مثلث ساخت.

۲ گزینهٔ «۲» از آن‌جا که میانهٔ وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه نصف وتر است پس مثلث ABD در رأس A قائمه است:

$\overset{\Delta}{ABC}$ متساوی‌الاضلاع است پس داریم: $\widehat{C}_۱=۶۰^\circ \Rightarrow \widehat{C}_۲=۱۸۰^\circ-۶۰^\circ=۱۲۰^\circ$

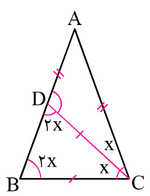
از طرفی $\overset{\Delta}{ACD}$ متساوی‌الساقین است، پس: $\widehat{A}_۱=\widehat{D}=\dfrac{۱۸۰^\circ-۱۲۰^\circ}{۲}=۳۰^\circ$



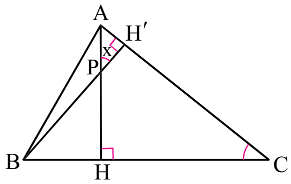
۳ گزینهٔ «۳» با توجه به شکل و مثلث‌های متساوی‌الساقین $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{BDC}$ اگر زاویهٔ $B\widehat{C}D$ را x فرض کنیم داریم:

$۲x+۲x+x=۱۸۰^\circ \Rightarrow ۵x=۱۸۰^\circ \Rightarrow x=۳۶^\circ$

$C\widehat{D}A=۱۸۰^\circ-۲x=۱۸۰^\circ-۲\times۳۶=۱۰۸^\circ$



۴ گزینهٔ «۳» با توجه به شکل و رسم ارتفاع‌ها و دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\triangle}{ACH}$ و $\overset{\triangle}{ABH'}$ داریم:



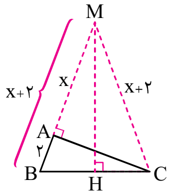
$$\hat{C} = ۱۸۰^\circ - (۸۰^\circ + ۶۰^\circ) = ۱۸۰^\circ - ۱۴۰^\circ = ۴۰^\circ$$

$$\overset{\triangle}{ACH} : C\hat{A}H = ۹۰^\circ - \hat{C} = ۹۰^\circ - ۴۰^\circ = ۵۰^\circ$$

$$\overset{\triangle}{APH'} : \hat{x} = ۹۰^\circ - C\hat{A}H = ۹۰^\circ - ۵۰^\circ = ۴۰^\circ$$

۵ گزینهٔ «۲» با توجه به این که در هر مثلث، هر میانه آن را به دو مثلث با مساحت‌های مساوی تقسیم می‌کند. نیمساز AK که مثلث را به دو مثلث هم‌مساحت تقسیم کرده است میانه هم است. از طرفی می‌دانیم که در مثلث متساوی‌الساقین نیمساز و میانه یکی هستند پس مثلث ABC باید متساوی‌الساقین باشد.

۶ گزینهٔ «۲» با توجه به این که هر نقطه روی عمودمنصف یک پاره‌خط از دو سر آن به یک فاصله است داریم:

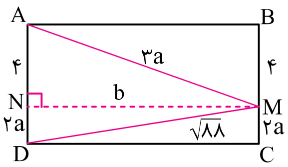


$$\overline{MB} = \overline{MC} = x + ۲$$

$$\overset{\triangle}{AMC} : \overline{MC}^۲ = \overline{AM}^۲ + \overline{AC}^۲ \Rightarrow (x+۲)^۲ = x^۲ + ۶ \Rightarrow x^۲ + ۴x + ۴ = x^۲ + ۳۶$$

$$\Rightarrow ۴x = ۳۶ - ۴ = ۳۲ \Rightarrow x = \frac{۳۲}{۴} = ۸$$

۷ گزینهٔ «۱» اگر $MC = ۲a$ در نظر بگیریم خواهیم داشت:



$$۲\overline{AM} = ۳\overline{MC} \Rightarrow ۲\overline{AM} = ۳ \times ۲a \Rightarrow \overline{AM} = ۳a$$

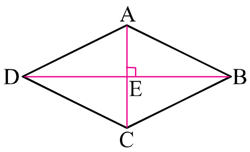
$$\overset{\triangle}{AMN} : b^۲ = (۳a)^۲ - (۴)^۲ = ۹a^۲ - ۱۶ \,,\, \overset{\triangle}{MND} : b^۲ = (\sqrt{۸۸})^۲ - (۲a)^۲ = ۸۸ - ۴a^۲$$

$$\Rightarrow ۹a^۲ - ۱۶ = ۸۸ - ۴a^۲ \Rightarrow ۱۳a^۲ = ۱۰۴ \Rightarrow a^۲ = ۸ \Rightarrow a = ۲\sqrt{۲}$$

اکنون داریم:

$$MC = ۲a = ۲ \times ۲\sqrt{۲} = ۴\sqrt{۲}$$

۸ گزینهٔ «۲» با توجه به شکل و صورت مسئله داریم:

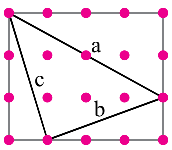


$$S_{\text{لوزی}} = \frac{\text{حاصل‌ضرب دو قطر}}{۲} \,,\, \overline{BD} = ۲\overline{AC}$$

$$S = \frac{۲\overline{AC} \cdot \overline{AC}}{۲} = k \Rightarrow \overline{AC}^۲ = k \Rightarrow \overline{AC} = \sqrt{k} \Rightarrow \overline{BD} = ۲\sqrt{k}$$

$$\overset{\triangle}{ABE} : \overline{AB}^۲ = \overline{AE}^۲ + \overline{EB}^۲ = \left(\frac{\sqrt{k}}{۲}\right)^۲ + \left(\frac{۲\sqrt{k}}{۲}\right)^۲ = \frac{k}{۴} + k = \frac{۵}{۴}k \Rightarrow \overline{AB} = \frac{\sqrt{۵k}}{۲}$$

۹ گزینهٔ «۲» ابتدا با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس وترهای a، b و c را در سه مثلث قائم‌الزاویه کناری که همان اضلاع مثلث هستند به دست می‌آوریم، داریم:



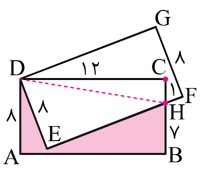
$$a^۲ = ۴^۲ + ۲^۲ \Rightarrow a = \sqrt{۱۶+۴} = \sqrt{۲۰} = ۲\sqrt{۵}$$

$$b^۲ = ۳^۲ + ۱^۲ \Rightarrow b = \sqrt{۹+۱} = \sqrt{۱۰}$$

$$c^۲ = ۳^۲ + ۱^۲ \Rightarrow c = \sqrt{۹+۱} = \sqrt{۱۰}$$

$$\Rightarrow \text{محیط مثلث} = a + b + c = ۲\sqrt{۵} + \sqrt{۱۰} + \sqrt{۱۰} = ۲\sqrt{۵} + ۲\sqrt{۱۰} = ۲(\sqrt{۵} + \sqrt{۱۰})$$

۱۰ گزینهٔ «۴» اگر از D به H وصل کنیم با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس و با توجه به این‌که DH در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ DHC و DEH مشترک است داریم:

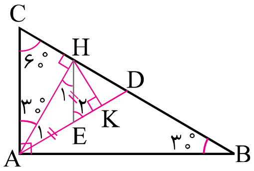


$$\overset{\triangle}{DHC} : \overline{DH}^۲ = \overline{DC}^۲ + \overline{CH}^۲ \,,\, \overset{\triangle}{DEH} : \overline{DH}^۲ = \overline{DE}^۲ + \overline{EH}^۲ \Rightarrow \overline{DC}^۲ + \overline{CH}^۲ = \overline{DE}^۲ + \overline{EH}^۲$$

$$\Rightarrow ۱۴۴ + ۱ = ۶۴ + \overline{EH}^۲ \Rightarrow \overline{EH} = ۹$$

همچنین داریم: $S_{DCHE}=S_{DEH}+S_{DCH}=۶+۳۶=۴۲ \Rightarrow S_{\text{رنگی}}=(۸\times۱۲)-۴۲=۵۴$

۱۱ گزینهٔ «۱» نقطه‌ای مانند E را وسط پاره‌خط $\overline{AD}$ قرار می‌دهیم. با توجه به این‌که در هر مثلث قائم‌الزاویه میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است داریم:



$$\overset{\triangle}{AHD}:\overline{EH}=\frac{\overline{AD}}{۲}\ (۱)\Rightarrow \overline{EH}=\overline{AE}\Rightarrow \text{متساوی‌الساقین}\ \overset{\triangle}{AEH}$$

همچنین طبق صورت مسئله در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC می‌توان نتیجه گرفت:

$$\hat{C}=۶۰^\circ\ ,\ \hat{B}=۳۰^\circ$$

بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} C\hat{A}H+\hat{C}=۹۰^\circ \Rightarrow C\hat{A}H=۹۰^\circ-۶۰^\circ=۳۰^\circ \\ \hat{A}_۱+C\hat{A}H=۴۵^\circ \Rightarrow \hat{A}_۱=۱۵^\circ \end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\triangle}{AEH}:\hat{H}_۱=\hat{A}_۱=۱۵^\circ \Rightarrow \text{خارجی}\ \hat{E}_۲=۳۰^\circ$$

$$\overset{\triangle}{KHE}:\hat{E}_۲=۳۰^\circ \Rightarrow \overline{HK}=\frac{۱}{۲}\times\overline{EH}\overset{(۱)}{=\!=}\frac{۱}{۲}\times\frac{\overline{AD}}{۲}=\frac{۱}{۴}\times\overline{AD}=\frac{۱}{۴}\times۴\sqrt{۲}=\sqrt{۲}$$

۱۲ گزینهٔ «۲» با توجه به این‌که در دو چندضلعی همنهشت ضلع‌ها و زاویه‌های متناظر با هم برابرند داریم:

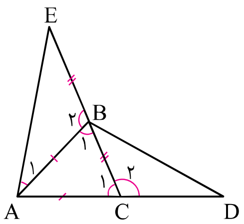
$$\overline{NP}=\overline{AB}\Rightarrow ۷x+۱۹=۱۲x+۴\Rightarrow x=۳\Rightarrow \overline{NP}=۳۶+۴=۴۰$$

$$\overline{ND}=\overline{AD}\Rightarrow ۵y-۱۰=۲y+۵x-۱\Rightarrow ۵y-۱۰=۲y+۵(۳)-۱\Rightarrow y=۸\Rightarrow \overline{ND}=۴۰-۱۰=۳۰$$

$$\overline{BC}=\overline{PQ}\Rightarrow ۳z-۲=y+z-۲\Rightarrow ۳z-۲=۸+z-۲\Rightarrow z=۴\Rightarrow \overline{PQ}=۸+۴-۲=۱۰$$

$$\overline{QD}=۴x+۵y+۲z=۴(۳)+۵(۸)+۲(۴)=۶۰\quad \text{محیط چهارضلعی}=۴۰+۳۰+۱۰+۶۰=۱۴۰$$

۱۳ گزینهٔ «۴» با توجه به این‌که مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الساقین است، داریم:



$$\hat{B}_۱=\hat{C}_۱\Rightarrow ۱۸۰^\circ-\hat{B}_۱=۱۸۰-\hat{C}_۱\Rightarrow \hat{B}_۲=\hat{C}_۲$$

$$\left.\begin{array}{l}\overline{AB}=\overline{DC}\\ \overline{BC}=\overline{BE}\\ \hat{C}_۲=\hat{B}_۲\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\triangle}{BCD}\overset{\text{(ض ز ض)}}{\cong}\overset{\triangle}{EAB}\rightarrow \hat{A}_۱=\hat{D}\quad (*)$$

$$\hat{B}_۱=(۱۸۰^\circ-B\hat{A}C)\div۲=(۱۸۰^\circ-۵۲^\circ)=۶۴^\circ$$

و از آن‌جایی که $\hat{B}_۱$ زاویهٔ خارجی مثلث ABE است پس:

$$\hat{B}_۱=\hat{A}_۱+\hat{E}\xrightarrow{(*)}\hat{B}_۱=\hat{D}+\hat{E}\xrightarrow{\hat{B}_۱=۶۴}\hat{D}+\hat{E}=۶۴^\circ$$

۱۴ گزینهٔ «۱» با توجه به حالت‌های همنهشتی مثلث‌ها داریم:

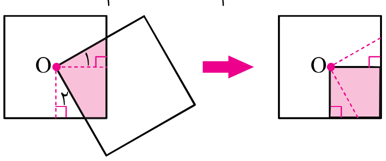
$$\left.\begin{array}{l}\overline{AP}=\overline{AP}\\ \hat{A}_۱=\hat{A}_۲\\ \overline{AC}=\overline{AB}\end{array}\right\}\Rightarrow \overset{\triangle}{BPA}\overset{\text{(ض ز ض)}}{\cong}\overset{\triangle}{CPA}\xrightarrow{\text{اجزای متناظر}}\left\{\begin{array}{l}\hat{P}_۳=\hat{P}_۲\\ \overline{CP}=\overline{BP}\rightarrow \hat{B}_۱=\hat{C}_۱\quad(۱)\end{array}\right.$$

$$\text{صورت مسئله}:\hat{P}_۱=۲\hat{B}_۱\xrightarrow{(۱)}\hat{P}_۱=۲\hat{C}_۱\xrightarrow{\hat{B}_۱+\hat{P}_۱+\hat{C}_۱=۱۸۰^\circ}\hat{C}_۱+\hat{C}_۱+۲\hat{C}_۱=۱۸۰^\circ\Rightarrow\hat{B}_۱=\hat{C}_۱=۴۵^\circ\Rightarrow\hat{P}_۱=۹۰^\circ$$

$$\xrightarrow[\hat{P}_۱+\hat{P}_۲+\hat{P}_۳=۳۶۰^\circ]{\hat{P}_۳=\hat{P}_۲}\hat{P}_۳=\hat{P}_۲=\frac{۳۶۰^\circ-۹۰^\circ}{۲}=۱۳۵^\circ\Rightarrow \overset{\triangle}{ACP}:\hat{A}_۱+\hat{C}_۲=۱۸۰^\circ-۱۳۵^\circ=۴۵^\circ$$

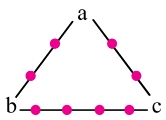
۱۵ گزینهٔ «۲» طبق شکل دو مثلث (۱) و (۲) با هم همنهشت هستند، پس دارای مساحت یکسان می‌باشند. اکنون با جابه‌جا کردن آن‌ها شکل سمت راست به دست می‌آید که نشان می‌دهد قسمت رنگی $\frac{۱}{۴}$ مربع اصلی است.

$$S_{\text{رنگی}}=\frac{۱}{۴}(۲\times۲)=\frac{۱}{۴}(۴)=۱$$



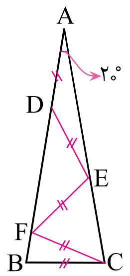
آزمون غنی‌سازی

۱. در شکل زیر، با نقاط مشخص‌شده چند مثلث می‌توان ساخت؟ (تیزهوشان)



۱) ۶۹ ۲) ۲۴
۳) ۷۹ ۴) ۶۴

۲. در شکل زیر، زاویه A در مثلث ABC برابر با ۲۰° و DE و DC و EF و FC به ترتیبی به یکدیگر متصل شده‌اند که $\overline{AD} = \overline{DE} = \overline{EF} = \overline{FC} = \overline{BC}$ است. اندازهٔ زاویهٔ $A\hat{C}D$ برابر است با: (المپیاد ریاضی)

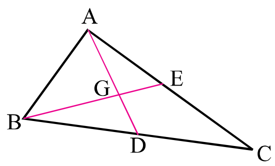


۱) ۱۰° ۲) ۲۰°
۳) ۳۰° ۴) ۴۰°

۳. مثلث ABC را با اضلاعی به طول‌های صحیح a، b و c در نظر می‌گیریم و طول ارتفاع‌های آن را h_a، h_b و h_c می‌نامیم. فرض کنید $h_a = h_b + h_c$ باشد در این صورت داریم: (المپیاد ریاضی)

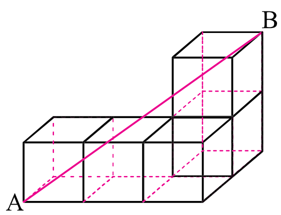
۱) $a^۲ + b^۲ + c^۲$ مربع کامل است. ۲) $۲(a^۲ + b^۲ + c^۲)$ مربع کامل است.
۳) $۳(a^۲ + b^۲ + c^۲)$ مربع کامل است. ۴) $b^۲ + c^۲ - a^۲$ مربع کامل است.

۴. در مثلث ABC، نقطهٔ D وسط ضلع BC و نقطهٔ E وسط ضلع CA است. دو پاره‌خط AD و BE بر هم عمود هستند. شکل زیر نشان می‌دهد که محل تقاطع‌شان نقطهٔ G است. این نقطه مرکز ثقل مثلث ABC نامیده می‌شود و ویژگی $\overline{AG} = ۲\overline{DG}$ و $\overline{BG} = ۲\overline{EG}$ را دارد. مقدار عددی $\dfrac{\overline{BC}^۲ + \overline{AC}^۲}{\overline{AB}^۲}$ چند است؟ (مسابقات جهانی IMC)



۱) ۱۰ ۲) ۸
۳) ۷ ۴) ۵

۵. طول ضلع هر کدام از مکعب‌های شکل برابر واحد است. طول پاره‌خط AB چقدر است؟ (مسابقات جهانی ریاضی)



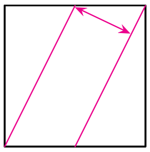
۱) $\sqrt{۱۷}$ ۲) ۷
۳) $\sqrt{۱۳}$ ۴) $\sqrt{۷}$

۶. محیط مثلث متساوی‌الساقینی ۳۶ و ارتفاع وارد بر قاعدهٔ آن ۱۲ سانتی‌متر می‌باشد. اندازهٔ ارتفاع وارد بر یک ساق این مثلث تا یک رقم اعشار چقدر است؟ (تیزهوشان)

۱) ۹/۲ ۲) ۱۸/۴ ۳) ۱۵/۶ ۴) ۷/۸

۷. با رسم دو خط موازی به فاصلهٔ یک سانتی‌متر از هم، مربع زیر به سه قسمت با مساحت‌های مساوی تقسیم می‌شود. مساحت مربع کدام است؟

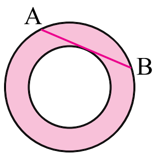
(تیزهوشان)



۱) ۱۲ ۲) ۱۳
۳) ۱۴ ۴) ۱۵

۸. دو دایرهٔ زیر هم‌مرکز هستند. وتر AB از دایرهٔ بزرگ‌تر بر دایرهٔ کوچک‌تر مماس است و طولش برابر است با ۱۶. مساحت ناحیه سایه‌خورده کدام است؟

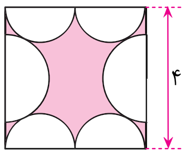
(مسابقات جهانی ریاضی)



۱) ۳۲π ۲) ۶۳π
۳) ۶۴π ۴) ۳۲π²

۹. در شکل، مربعی را با شش نیم‌دایره در داخلش نشان داده‌ایم. مساحت ناحیه رنگی کدام است؟

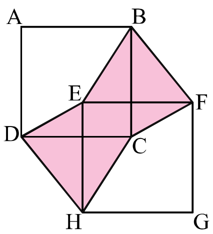
(مسابقات جهانی ریاضی)



۱) ۸ ۲) ۱۶ − ۳π
۳) ۱۶ − ۴π ۴) ۱۶ − ۸π + ۲√۵π

۱۰. در شکل زیر مربع ABCD و EFGH به گونه‌ای هستند که $\overline{AB} = \overline{EF}$ و $\overline{AB} \parallel \overline{EF}$ و مساحت قسمت رنگی، برابر با ۱ واحد است. مساحت ABCD کدام است؟

(مسابقات جهانی ریاضی)



۱) ۱ ۲) ۲
۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۳}{۲}$

۱. ۱ ۲ ۳ ٤	۳. ۱ ۲ ۳ ٤	۵. ۱ ۲ ۳ ٤	۷. ۱ ۲ ۳ ٤	۹. ۱ ۲ ۳ ٤
۲. ۱ ۲ ۳ ٤	۴. ۱ ۲ ۳ ٤	۶. ۱ ۲ ۳ ٤	۸. ۱ ۲ ۳ ٤	۱۰. ۱ ۲ ۳ ٤

شناسنامه سؤالات آزمون غنی‌سازی

شماره سؤال	عنوان زیرموضوع	سطح سؤال	پاسخ
۱	اجزای مثلث		۳
۲	اجزای مثلث		۱
۳	اجزای مثلث		۱
۴	اجزای مثلث		۴
۵	رابطهٔ فیثاغورس		۱
۶	رابطهٔ فیثاغورس		۱
۷	رابطهٔ فیثاغورس		۲
۸	رابطهٔ فیثاغورس		۳
۹	رابطهٔ فیثاغورس		۴
۱۰	هم‌نهشتی در مثلث‌ها		۱

پاسخ‌نامه

۱ گزینهٔ «۳» برای محاسبهٔ تعداد مثلث‌ها کافی است تعداد پاره‌خط روی هر خط را در تعداد نقطه‌های دو خط دیگر ضرب نموده و با هم جمع نماییم. و در ضمن تعداد مثلث‌هایی که از وصل‌کردن یک نقطه از هر خط به یکدیگر به وجود می‌آیند را نیز به آن‌ها اضافه کنیم، پس داریم:

تعداد پاره‌خط‌های روی خط a : $\frac{۳\times(۳-۱)}{۲}=۳$ ‏ تعداد پاره‌خط‌های روی خط b : $\frac{۲\times(۲-۱)}{۲}=۱$

تعداد پاره‌خط‌های روی خط c : $\frac{۴\times(۴-۱)}{۲}=۶$

$$\Rightarrow ۳(۲+۴)+۱(۳+۴)+۶(۳+۲)+\underbrace{۲\times۳\times۴}_{\text{مثلث‌های به‌وجودآمده از وصل کردن نقطه‌های روی خط‌ها}}=۱۸+۷+۳۰+۲۴=$$

۲ گزینهٔ «۱»

$\overset{\Delta}{ADE}$ متساوی‌الساقین $\Rightarrow$ زاویه خارجی $F\hat{D}E=۲\times۲۰=۴۰^\circ$

$\overset{\Delta}{DEF}: E\hat{F}D=E\hat{D}F=۴۰^\circ \Rightarrow F\hat{E}D=۱۸۰^\circ-(۲\times۴۰^\circ)=۱۰۰^\circ$

$\Rightarrow C\hat{E}F=۱۸۰^\circ-(۲۰^\circ+۱۰۰^\circ)=۶۰^\circ \Rightarrow C\hat{E}F=E\hat{F}C=۶۰^\circ$

پس مثلث $\overset{\Delta}{EFC}$ متساوی‌الاضلاع است یعنی: $\overline{CE}=\overline{FE}$ و چون $\overline{DE}=\overline{FE}$ پس $\overset{\Delta}{CDE}$ متساوی‌الساقین است، بنابراین:

$C\hat{E}D=F\hat{E}D+F\hat{E}C=۶۰^\circ+۱۰۰^\circ=۱۶۰^\circ$

اما از آن‌جا که $\overset{\Delta}{DEC}$ متساوی‌الساقین است پس: $\overset{\Delta}{DEC}: D\hat{C}E+C\hat{D}E=۱۸۰^\circ-۱۶۰^\circ=۲۰^\circ$

$E\hat{C}D=\frac{۲۰^\circ}{۲}=۱۰^\circ$

۳ گزینهٔ «۱»

نکتهٔ ۱: اگر مساحت مثلث را با S و ارتفاع نظیر ضلع‌های آن را با h_a، h_b و h_c نمایش دهیم، داریم:

$h_c=\frac{۲S}{c}, h_b=\frac{۲S}{b}, h_a=\frac{۲S}{a}$

نکتهٔ ۲: اتحاد مربع سه جمله‌ای: $(a+b+c)^۲=a^۲+b^۲+c^۲+۲ab+۲ac+۲bc$

با توجه به نکتهٔ بالا و گفتهٔ مسئله داریم: $h_a=h_b+h_c \Rightarrow \frac{۲S}{a}=\frac{۲S}{b}+\frac{۲S}{c}$

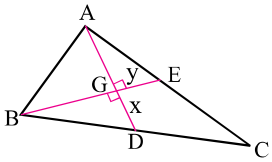
$$\xrightarrow{\text{طرفین}\div ۲S} \frac{۱}{a}=\frac{۱}{b}+\frac{۱}{c} \xrightarrow{\text{طرفین}\times ۲abc} ۲bc=۲ac+۲ab \Rightarrow ۲bc-۲ab-۲ac=۰ \qquad (۱)$$

می‌توان چنین نوشت:

$$a^۲+b^۲+c^۲=a^۲+b^۲+c^۲+\underbrace{۰}_{ب}\overset{(۱)}{=}a^۲+b^۲+c^۲+۲bc-۲ab-۲ac$$

$$\xrightarrow{\text{اتحاد مربع سه‌جمله‌ای}} (b+c-a)^۲ \Rightarrow a^۲+b^۲+c^۲ \Rightarrow \text{مربع کامل}$$

۴ گزینهٔ «۴» پاره‌خط‌های $\overline{DG}$ و $\overline{EG}$ را به ترتیب x و y در نظر می‌گیریم. داریم:



$$\overset{\triangle}{EGA}: AE^۲=EG^۲+AG^۲=y^۲+(۲x)^۲=y^۲+۴x^۲$$

$$\overset{\triangle}{BGA}: \overline{AB}^۲=\overline{AG}^۲+\overline{BG}^۲=(۲x)^۲+(۲y)^۲=۴(x+y)^۲$$

$$\overset{\triangle}{BDG}: \overline{BD}^۲=\overline{DG}^۲+\overline{BG}^۲=x^۲+(۲y)^۲=x^۲+۴y^۲$$

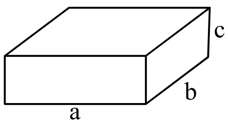
در ضمن داریم $\overline{AC}=۲\overline{AE}$ و $\overline{BC}=۲\overline{BD}$ بنابراین:

$$\overline{AC}^۲+\overline{BC}^۲=(۲\overline{AE})^۲+(۲\overline{BD})^۲=۴(y^۲+۴x^۲)+۴(۴y^۲+x^۲)=۲۰(x^۲+y^۲)$$

$$\Rightarrow \frac{\overline{AC}^۲+\overline{BC}^۲}{\overline{AB}^۲}=\frac{۲۰(x^۲+y^۲)}{۴(x^۲+y^۲)}=۵$$

۵ گزینهٔ «۱»

نکته ۱: اندازهٔ قطر هر مکعب‌مستطیل به طول، عرض و ارتفاع a، b و c برابر است با: $\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}$

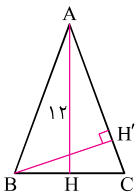


نکته ۲: اندازهٔ قطر هر مکعب به ضلع a برابر است با: $\sqrt{a^۲+a^۲+a^۲}=a\sqrt{۳}$

اگر مکعب‌های شکل را کامل کنیم مکعب مستطیلی داریم که طول، عرض و ارتفاع آن به ترتیب ۳، ۲ و ۲ می‌شود که پاره‌خط AB قطر این مکعب است پس داریم:

$$\overline{AB}=\sqrt{۳^۲+۲^۲+۲^۲}=\sqrt{۹+۴+۴}=\sqrt{۱۷}$$

۶ گزینهٔ «۱» می‌دانیم که در مثلث متساوی‌الساقین، عمودمنصف و ارتفاع وارد بر قاعده یکی هستند، بنابراین: $\overline{CH}=\overline{BH}$. هم‌چنین:



$$\left.\begin{array}{l}\overline{BC}=۲\times\overline{BH}\\ \overline{AB}=\overline{AC}=\sqrt{\overline{BH}^۲+۱۲^۲}\ \text{فیثاغورس}\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{AB}+\overline{BC}+\overline{AC}=۲\times\sqrt{\overline{BH}^۲+۱۴۴}+۲\overline{BH}=۳۶$$

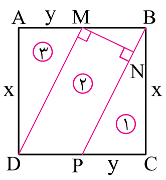
$$\Rightarrow \sqrt{\overline{BH}^۲+۱۴۴}=۱۸-\overline{BH} \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} ۱۴۴+\cancel{\overline{BH}^۲}=۳۲۴+\cancel{\overline{BH}^۲}-۳۶\overline{BH}$$

$$\Rightarrow ۳۶\overline{BH}=۳۲۴-۱۴۴ \Rightarrow \overline{BH}=۵ \Rightarrow \overline{BC}=۱۰ \Rightarrow \overline{AB}=\overline{AC}=\sqrt{۱۲^۲+۵^۲}=\sqrt{۱۶۹}=۱۳$$

اکنون مساحت مثلث ABC را در دو حالت محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{\overline{AC}\times\overline{BH'}}{۲}=\frac{\overline{BC}\times\overline{AH}}{۲} \Rightarrow \frac{۱۳\times BH'}{\cancel{۲}}=\frac{۱۰\times۱۲}{\cancel{۲}} \Rightarrow BH'=\frac{۱۲۰}{۱۳}\simeq ۹/۲$$

۷ گزینهٔ «۲» با توجه به شکل و استفاده از رابطهٔ فیثاغورس داریم:



$$\overset{\triangle}{PBC}: \overline{PB}^۲=\overline{PC}^۲+\overline{BC}^۲=x^۲+y^۲ \Rightarrow \overline{PB}=\sqrt{x^۲+y^۲}$$

$$S_۱=S_۲=S_۳ \Rightarrow \frac{x\times y}{۲}=۱\times\sqrt{x^۲+y^۲} \Rightarrow \frac{xy}{۲}=\sqrt{x^۲+y^۲} \qquad (۱)$$

$$S_{BCDM}=\frac{۱}{۲}(\overline{MB}+\overline{DC})\times\overline{BC}=\frac{۱}{۲}(x-y+x)x=\frac{۱}{۲}(۲x^۲-xy)$$

هم‌چنین داریم:

$$S_{BCDM}=S_۱+S_۲=۲S_۲ \Rightarrow \frac{۱}{۲}(۲x^۲-xy)=۲\times\frac{xy}{۲} \Rightarrow ۲x^۲=۳xy \Rightarrow y=\frac{۲}{۳}x \quad (۲)$$

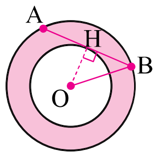
$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \left.\begin{matrix} y=\frac{۲}{۳}x \\ \frac{xy}{۲}=\sqrt{x^۲+y^۲}\end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{x\times\frac{۲}{۳}x}{۲}=\sqrt{x^۲+(\frac{۲}{۳}x)^۲} \Rightarrow \frac{x^۲}{۳}=\sqrt{\frac{۱۳}{۹}x^۲}=\frac{\sqrt{۱۳}}{۳}x$$

$$\Rightarrow x=\sqrt{۱۳} \Rightarrow S_{\text{مربع}}=(\sqrt{۱۳})^۲=۱۳$$

۸ گزینهٔ «۳»

نکته: هرگاه وتری به اندازهٔ a از یک دایرهٔ بزرگ‌تر، بر دایره‌ای هم‌مرکز آن و کوچک‌تر از دایرهٔ قبلی مماس شود مساحت بین دو دایره از رابطهٔ روبه‌رو به دست می‌آید: $S=\pi(\frac{a}{۲})^۲=\frac{\pi}{۴}a^۲$

روش اول: با استفاده از رابطهٔ فیثاغورس در $\overset{\triangle}{OHB}$ داریم:



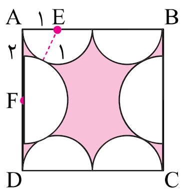
$$\overline{OH}^۲+\overline{BH}^۲=\overline{BO}^۲ \Rightarrow \overline{BH}^۲=\overline{BO}^۲-\overline{OH}^۲ \quad (*)$$

هم‌چنین می‌دانیم که مساحت رنگی برابر است با:

$$S_{\text{رنگی}}=S_{\text{دایره بزرگ}}-S_{\text{دایره کوچک}}=\pi\overline{OB}^۲-\pi\overline{OH}^۲ \Rightarrow \pi(\overline{OB}^۲-\overline{OH}^۲) \xrightarrow{(*)} \pi(\overline{BH})^۲=\pi(۸)^۲=۶۴\pi$$

روش دوم: با استفاده از نکتهٔ بالا داریم: $S=\frac{\pi}{۴}a^۲=\frac{\pi}{۴}(۱۶)^۲=۶۴\pi$

۹ گزینهٔ «۴» با توجه به شکل با وصل کردن مرکز دو نیم‌دایره مثلث قائم‌الزاویهٔ AEF با اضلاع قائم ۱ و ۲ پدید می‌آید، داریم:



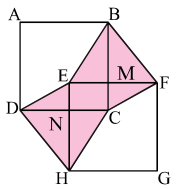
$$\overline{EF}^۲=\overline{AE}^۲+\overline{AF}^۲=۱^۲+۲^۲=۵ \Rightarrow \overline{EF}=\sqrt{۵}$$

بنابراین شعاع دایرهٔ بزرگ برابر $\sqrt{۵}-۱$ خواهد شد پس داریم:

$$S_{\text{رنگی}}=S_{\text{مربع}}-(S_{\text{یک دایره بزرگ}}+۲\times S_{\text{یک دایره کوچک}})$$

$$\Rightarrow S_{\text{رنگی}}=۴\times۴-(\pi(\sqrt{۵}-۱)^۲+۲\pi(۱)^۲)$$

$$\Rightarrow S_{\text{رنگی}}=۱۶-(۸-۲\sqrt{۵})\pi=۱۶-۸\pi+۲\sqrt{۵}\pi$$



۱۰ گزینهٔ «۱» همان‌طور که در شکل معلوم است: $\overset{\triangle}{BMF}\cong\overset{\triangle}{DHN}$, $\overset{\triangle}{DEN}\cong\overset{\triangle}{CMF}$, $\overset{\triangle}{BME}\cong\overset{\triangle}{CHN}$

حال اگر هر دو مثلث هم‌نهشت را طوری کنار هم قرار دهیم که وترهای آن‌ها مشترک شوند تا یک مستطیل ایجاد گردد، چهار مستطیل خواهیم داشت که همراه با مستطیل EMCN دقیق سطح مربع EFGH را پر می‌کنند. پس مساحت قسمت رنگی برابر با مساحت یک مربع کامل است. $S_{\text{رنگی}}=۱$