

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$$

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$$

$$a^2 + b^2 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

	a	b
a	a^2	ab
b	ab	b^2

$$x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$$

$$a^2 + b^2 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

واحد ۹

اتحاد و تجزیه

- شناخت اتحاد
- اتحاد مربع دو جمله‌ای و اتحاد فرعی آن
- اتحاد مربع سه جمله‌ای
- اتحاد مزدوج
- اتحاد یک جمله مشترک و تعمیم آن
- اتحاد مکعب دو جمله‌ای و اتحاد فرعی آن
- اتحاد مجموع و تفاضل مکعب دو جمله
- محاسبه حاصل عبارت به کمک اتحادها
- تجزیه چندجمله‌ای‌ها (با اتحادها، فاکتورگیری، دسته‌بندی و افزودن و کاستن)
- خواص نابرابری‌ها و حل نامعادلات
- حل دستگاه‌های نامعادلات
- اتحاد بسط دوجمله‌ای - اتحادهای اوایلر و لاگرانژ

$$x^2 - 5x + 6 = (x - 3)(x - 2)$$

$$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$$

$$a^2 + b^2 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$$

به تساوی‌های زیر دقت کنید:

$$25 - 45 = 16 - 36$$

$$5^2 - 2 \times 5 \times \frac{9}{2} = 4^2 - 2 \times 4 \times \frac{9}{2}$$

$$5^2 - 2 \times 5 \times \frac{9}{2} + \frac{81}{4} = 4^2 - 2 \times 4 \times \frac{9}{2} + \frac{81}{4}$$

$$\left(5 - \frac{9}{2}\right)^2 = \left(4 - \frac{9}{2}\right)^2$$

$$5 - \frac{9}{2} = 4 - \frac{9}{2}$$

$$5 = 4$$

علت این تناقض چیست؟



	a	b
a	a^2	ab
b	ab	b^2

$$a^2 + b^2 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$$

پیش آزمون

۱- کدام یک از تساوی‌های زیر یک اتحاد نیست؟

$8x^4b^5 - 9x^4b^5 = -x^4b^5$ (۱) $(-\frac{5}{4}x^3)(\frac{1}{10}x^2) = -\frac{1}{4}x^5$ (۲)

$-4a^2bz^4 + 5a^2bz^4 - 7a^2bz^3 = -6a^2bz^4$ (۳) $(-3a^2b^4)(fab^2c)(3a^2bc^2) = -36a^5b^4c^3$ (۴)

(آزمون ورودی)

۲- کدام گزینه را در مربع قرار دهیم تا تساوی $a^2 + b^2 - \square = 2(a+b)^2$ برقرار شود؟

fab (۱) $(a+b)^2$ (۲) $a^2 + b^2 + fab$ (۳) fa^2b^2 (۴)

(انرژی اتمی)

۳- حاصل عبارت $(x-1)^2 + 2(x-1) + 1$ کدام است؟

x^2 (۱) $(x-1)^2$ (۲) $(x+1)^2$ (۳) 1 (۴)

۴- اگر $a+b=2$ و $ab=-35$ باشد، کدام گزینه است؟

33 (۱) -70 (۲) 74 (۳) 70 (۴)

۵- اگر $a - \frac{1}{a} = \sqrt{21}$ باشد، مقدار عبارت $a^2 + \frac{1}{a^2}$ کدام است؟

19 (۱) -19 (۲) 23 (۳) -23 (۴)

۶- اگر مجموع دو عدد ۱۰ و تفاضل آن‌ها ۶ باشد، حاصل ضرب آن دو چند است؟

34 (۱) 16 (۲) -16 (۳) -34 (۴)

۷- اگر $A = 3x + 2y$ و $B = 3x - 2y$ باشد، حاصل $A^2 + B^2$ کدام گزینه است؟

$2(3x^2 + 2y^2)$ (۱) $2(9x + 4y)$ (۲) $18x + 8y$ (۳) $2(9x^2 + 4y^2)$ (۴)

۸- ساده شده عبارت $(2a^2 - b^2 - c^2)^2$ در کدام گزینه آمده است؟

$4a^4 + b^4 + c^4 - 4a^2b^2 - 4a^2c^2 + 2b^2c^2$ (۲) $4a^4 - b^4 - c^4$ (۱)

$4a^4 + b^4 + c^4$ (۴) $4a^2 + b^2 + c^2 - 4ab - 4ac + 2bc$ (۳)

۹- اگر y وارون x باشد، حاصل $(x - \frac{1}{x})(y + \frac{1}{y})$ کدام است؟ ($x, y \neq 0$)

$2x^2$ (۱) $x^2 - y^2$ (۲) $2y^2$ (۳) $x^2 + y^2$ (۴)

(سراسری فنی و حرفه‌ای)

۱۰- حاصل عبارت $a(a+1)(a+2)(a+3) + 1$ کدام است؟

$(a^2+1)^2$ (۱) $(a+1)^4$ (۲) $(a^2+3a+1)^2$ (۳) $(a^2+a+1)^2$ (۴)

۱۱- حاصل عبارت $(x+2)(x+3)(x-4)$ کدام گزینه است؟

$x^3 + x^2 - 14x - 24$ (۱) $x^3 + x - 14$ (۲)

$x^3 + x^2 - 14x^2 - 24$ (۳) $x^3 - x^2 + 14x + 24$ (۴)

۱۲- اگر $x+y=20$ و $x^2+y^2=13+xy$ باشد، x^3+y^3 کدام است؟

$260 - 20xy$ (۱) 260 (۲) 13 (۳) 20 (۴)

۱۳- ساده شده عبارت $8x^3 + 64y^3 + (3x-4y)(12yx+9x^2+16y^2)$ کدام گزینه است؟

$35x^3$ (۱) x^3 (۲) $128y^3 + x^3$ (۳) $48y^3 - x^3$ (۴)

۱۴- عبارت جبری $(x+1)^3$ دارای چند جمله است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۲

۱۵- در ساده شده عبارت $(3x-2y)^3$ مجموع ضرایب عددی چندجمله‌ای، برابر با کدام گزینه است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) ۹

(المپیاد ریاضی)

۱۶- حاصل ضرب دو عدد حقیقی ۱ و مجموع آن‌ها ۳ است. مجموع توان‌های سوم آن‌ها چقدر است؟

- (۱) ۱ (۲) ۱۸ (۳) ۲۴ (۴) ۲۷

۱۷- اگر $ab = 45$ و $a - b = 10$ باشد، آن‌گاه $a^3 - b^3$ کدام گزینه است؟

- (۱) ۳۵۰ (۲) -۳۵۰ (۳) ۲۳۵۰ (۴) -۲۳۵۰

(آزاد تهرانی)

۱۸- حاصل عبارت 1001×999 برابر است با:

- (۱) $10^6 + 1$ (۲) 9×10^6 (۳) $10^6 - 1$ (۴) $10^9 - 1$

(آزاد تهرانی)

۱۹- مقدار عددی عبارت $(1 + 2^4) \dots (1 + 2^6) (1 + 2^2) (1 + 2^1)$ برابر است با:

- (۱) $2^{256} + 1$ (۲) $2^{128} + 1$ (۳) $2^{128} - 1$ (۴) $2^{256} - 1$

۲۰- اگر عبارت جبری $18a^4b^2c^2 + 12a^2b^2c^2 + 24a^4b^2c^2$ را به صورت ضرب دو عبارت جبری بنویسیم، یکی از این دو عبارت کدام است؟

- (۱) $2abc$ (۲) $6a^2b^2c^2$ (۳) $6a^2b^2c^2 - 4$ (۴) $3a^2c^2 - 2b^2c^2$

(تیزهوشان)

۲۱- اگر $x - y = 7$ باشد، حاصل عبارت $7x^2 + 3y^2 - xy - 4x^2 - 5xy$ چقدر است؟

- (۱) ۱۴۷ (۲) ۱۲۰ (۳) ۲۱ (۴) -۱۲۰

(کنکور آزمایشی انسانی)

۲۲- در تجزیه عبارت $x^{16} - y^8$ کدام عامل وجود ندارد؟

- (۱) $x^2 + y$ (۲) $x^4 + y$ (۳) $x^4 + y^4$ (۴) $x^2 - y$

(کنکور خارج از کشور انسانی)

۲۳- عبارت $6x^2 - 6x - 36$ بر کدام عبارت زیر بخش پذیر است؟

- (۱) $x - 2$ (۲) $x - 6$ (۳) $x - 3$ (۴) $x - 4$

(کنکور آزمایشی انسانی)

۲۴- در تجزیه عبارت $8x^2 + 10x - 3$ کدام عامل وجود دارد؟

- (۱) $4x + 3$ (۲) $2x - 1$ (۳) $8x - 1$ (۴) $2x + 3$

(آزاد انسانی)

۲۵- اگر $a + b = 1$ و $a^2 + b^2 = 5$ باشد، $a^3 + b^3$ کدام است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۷ (۴) ۸

(آزاد تهرانی)

۲۶- اگر $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$ باشد، کدام رابطه درست است؟

- (۱) $x^2 + y^2 = 1$ (۲) $x^2 + y^2 = x + y$ (۳) $x^2 + y^2 = 0$ (۴) $x^2 + y^2 = 2x + 2y + 2$

۲۷- تجزیه شده عبارت $a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2$ شامل کدام عبارت است؟

- (۱) $a - b - c$ (۲) $-a - b$ (۳) $2a - b - c$ (۴) $-a - b - c$

(سراسری فنی و حرفه‌ای)

۲۸- اگر $a > b > 0$ ، آن‌گاه کدام نامساوی درست است؟

- (۱) $\frac{-1}{a} > \frac{-1}{b}$ (۲) $-a > -b$ (۳) $b - a > 0$ (۴) $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$

(سراسری انسانی)

۲۹- جواب نامعادله $\frac{2x+3}{2} - \frac{3}{4} > \frac{4x+1}{3}$ کدام است؟

$$x < \frac{5}{4} \quad (۴)$$

$$x > \frac{7}{6} \quad (۳)$$

$$x > \frac{3}{4} \quad (۲)$$

$$x < \frac{2}{3} \quad (۱)$$

(کنکور آزاد)

۳۰- جواب دستگاه نامعادلات زیر کدام است؟

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{1}{3} > \frac{x-1}{6} \\ \frac{x+1}{2} < \frac{x+2}{3} \end{cases}$$

$$-\frac{3}{2} < x < 1 \quad (۲)$$

$$1 < x < \frac{3}{2} \quad (۴)$$

$$-\frac{3}{2} < x < -1 \quad (۱)$$


$$-1 < x < \frac{3}{2} \quad (۳)$$

- ۴ ۳ ۲ ۱ -۲۵
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۲۶
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۲۷
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۲۸
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۲۹
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۳۰

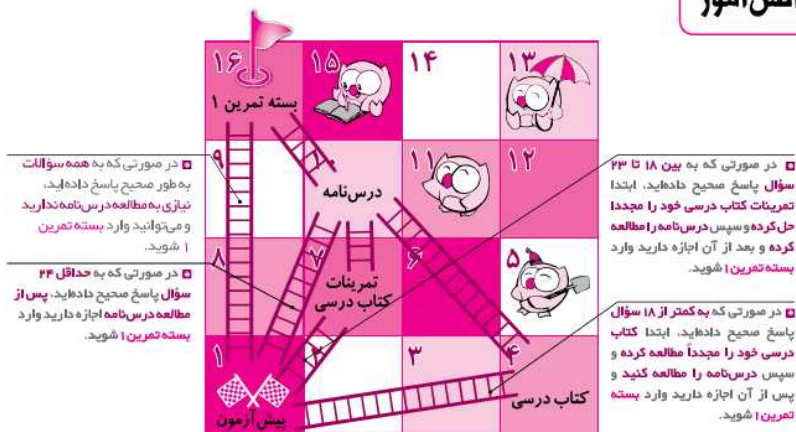
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۱۷
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۱۸
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۱۹
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۲۰
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۲۱
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۲۲
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۲۳
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۲۴

- ۴ ۳ ۲ ۱ -۹
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۱۰
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۱۱
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۱۲
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۱۳
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۱۴
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۱۵
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۱۶

- ۴ ۳ ۲ ۱ -۱
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۲
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۳
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۴
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۵
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۶
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۷
- ۴ ۳ ۲ ۱ -۸

توجه: حالا با توجه به تعداد سؤالاتی که پاسخ صحیح داده‌اید، از یکی از نردبان‌های نشان داده شده در نقشه  بالا بروید تا به خانه بعدی برسید و به مطالعه عنوان آمده در آن خانه بپردازید.

نقشه راه دانش آموز



شناسنامه سؤالات پیش‌آزمون

شماره سؤال	عنوان زیرموضوع	سطح سؤال	پاسخ	شماره سؤال	عنوان زیرموضوع	سطح سؤال	پاسخ
۱	شناخت اتحاد	۳	😊	۱۶	اتحاد فرعی مکعب دو جمله‌ای	۲	😊
۲	اتحاد مربع دو جمله‌ای	۳	😊	۱۷	اتحاد فرعی مکعب دو جمله‌ای	۳	😊
۳	اتحاد مربع دو جمله‌ای	۱	😊	۱۸	محاسبه حاصل عبارت به کمک اتحادها	۳	😊
۴	اتحاد فرعی مربع دو جمله‌ای	۳	😊	۱۹	محاسبه حاصل عبارت به کمک اتحادها	۳	😊
۵	اتحاد فرعی مربع دو جمله‌ای	۳	😊	۲۰	تجزیه چند جمله‌ای‌ها با کمک فاکتورگیری	۲	😊
۶	اتحاد فرعی مربع دو جمله‌ای	۲	😊	۲۱	تجزیه چند جمله‌ای‌ها با کمک اتحادها	۱	😊
۷	اتحاد فرعی مربع دو جمله‌ای	۴	😊	۲۲	تجزیه چند جمله‌ای‌ها با کمک اتحادها	۲	😊
۸	اتحاد مربع سه جمله‌ای	۲	😊	۲۳	تجزیه چند جمله‌ای‌ها با کمک اتحادها	۳	😊
۹	اتحاد مزدوج	۲	😊	۲۴	تجزیه چند جمله‌ای‌ها با کمک اتحادها	۴	😊
۱۰	اتحاد یک جمله مشترک	۳	😊	۲۵	تجزیه چند جمله‌ای‌ها با کمک اتحادها	۳	😊
۱۱	اتحاد یک جمله مشترک و تعمیم آن	۱	😊	۲۶	تجزیه چند جمله‌ای‌ها با دسته‌بندی	۲	😊
۱۲	اتحاد مجموع و تفاضل مکعب دو جمله	۲	😊	۲۷	تجزیه چند جمله‌ای‌ها با افزودن و کاستن	۱	😊
۱۳	اتحاد مجموع و تفاضل مکعب دو جمله	۱	😊	۲۸	خواص نایر ابری‌ها	۱	😊
۱۴	اتحاد مکعب دو جمله‌ای	۲	😊	۲۹	حل نامعادلات	۴	😊
۱۵	اتحاد مکعب دو جمله‌ای	۱	😊	۳۰	حل دستگاه‌های نامعادلات	۲	😊

درس نامه

در واحد عبارت‌های جبری به جمع، تفریق، ضرب و تقسیم چندجمله‌ای‌ها اشاره کردیم. در این بخش نیز در مورد به توان رساندن دوجمله‌ای‌ها و سه‌جمله‌ای‌ها، اتحادهایی را بیان خواهیم کرد.

اتحاد

اگر دو عبارت جبری به گونه‌ای باشد که به ازای هر مقدار برای متغیرهایشان، حاصل یکسانی داشته باشند، برابری جبری حاصل از آن‌ها را اتحاد جبری می‌نامیم.

توجه: اتحادها به ازای تمام مقادیر متغیرهایشان برقرار هستند در حالی که معادلات جبری به ازای بعضی از مقادیر متغیرهایشان برقرار می‌باشند. **خاصیت اتحادها:** در هر اتحاد، ضرب‌های جملات هم‌درجه در دو طرف اتحاد با هم برابر هستند.

۱- کدام یک از تساوی‌های زیر یک اتحاد نیست؟

$$8x^4b^5 - 9x^4b^5 = -x^4b^5 \quad (1)$$

$$\left(-\frac{5}{4}x^3\right)\left(\frac{1}{10}x^2\right) = \frac{-1}{4}x^5 \quad (2)$$

$$-4a^2bz^4 + 5a^2bz^4 - 7a^2bz^4 = -6a^2bz^4 \quad (3)$$

$$(-3a^2b^4)(fab^2c)(3^2bc^2) = -36a^5b^4c^3 \quad (4)$$

پاسخ: گزینه «۳» پس از ساده کردن گزینه‌ها و با توجه به خاصیت اتحاد به بررسی آن‌ها می‌پردازیم.

گزینه (۱) اتحاد است. $\Rightarrow 8x^4b^5 - 9x^4b^5 = -x^4b^5 = -x^4b^5 \Rightarrow$ جملات متشابه

گزینه (۲) اتحاد است. $\Rightarrow \left(-\frac{5}{4}x^3\right)\left(\frac{1}{10}x^2\right) = \frac{-1}{4}x^5 \Rightarrow \left(-\frac{5}{4} \times \frac{1}{10}\right)x^5 = \frac{-1}{4}x^5 \Rightarrow$

گزینه (۳) اتحاد نیست. $\Rightarrow -4a^2bz^4 + 5a^2bz^4 - 7a^2bz^4 = a^2bz^4 - 7a^2bz^4 \neq -6a^2bz^4 \Rightarrow$ جملات متشابه

ضرایب جملات a^2bz^4 و a^2bz^4 در دو طرف تساوی یکسان نمی‌باشند.

گزینه (۴) اتحاد است. $\Rightarrow (-3a^2b^4)(fab^2c)(3^2bc^2) = -36a^5b^4c^3 \Rightarrow$

اتحادهای مهم جبری

۱- اتحاد مربع دوجمله‌ای

(الف) مربع مجموع دو جمله: برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

\downarrow جمله اول
 \downarrow جمله دوم
 \downarrow جمله اول به توان ۲
 \downarrow دو برابر اولی در دومی
 \downarrow دومی به توان ۲

۲- کدام گزینه را در مربع قرار دهیم تا تساوی $(a+b)^2 - \square = a^2 + b^2$ برقرار شود؟ (ازمون ورودی)

(۱) fab (۲) $(a+b)^2$ (۳) $a^2 + b^2 + fab$ (۴) fa^2b^2

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به اتحاد مربع دوجمله‌ای می‌توان نوشت:

$$(a+b)^2 - \square = a^2 + b^2 \xRightarrow{\text{اتحاد مربع دوجمله}} \Rightarrow (a^2 + 2ab + b^2) - \square = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 + 2ab + b^2 - \square = a^2 + b^2$$

$$\Rightarrow -\square = -2a^2 + a^2 - 2b^2 + b^2 - fab \Rightarrow \square = a^2 + b^2 + fab$$

(ب) مربع تفاضل دو جمله: برای هر دو عدد حقیقی a و b داریم:

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

\downarrow جمله اول
 \downarrow جمله دوم
 \downarrow دو برابر اولی در دومی
 \downarrow اولی به توان ۲
 \downarrow دومی به توان ۲

۳- حاصل عبارت $(x-1)^2 + 2(x-1) + 1$ کدام است؟

- (۱) x^2 (۲) $(x-1)^2$ (۳) $(x+1)^2$ (۴) ۱

پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از اتحاد (مربع تفاضل دو جمله) خواهیم داشت:

$$(x-1)^2 + 2(x-1) + 1 = (x^2 - 2x + 1) + 2x - 2 + 1 = x^2 - 2x + 1 + 2x - 2 + 1 = x^2$$

اتحادهای فرعی مربع دوجمله‌ای

از اتحادهای نوع اول و دوم مربع دوجمله‌ای می‌توان اتحادهای دیگری را نتیجه گرفت که در این قسمت بیان می‌کنیم:

(۱) فرعی: $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$

توجه: از این اتحاد موقعی استفاده می‌کنیم که مجموع و حاصل ضرب دو عدد را بدهند و مجموع مربعات آن‌ها را بخواهند.

۴- اگر $a+b=2$ و $ab=-35$ باشد، a^2+b^2 کدام گزینه است؟

- (۱) ۳۳ (۲) -۷۰ (۳) ۷۴ (۴) ۷۰

پاسخ: گزینه «۳» با استفاده از اتحاد فرعی (۱) داریم:

$$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = (2)^2 - 2(-35) = 4 + 70 = 74$$

(۲) فرعی: $a^2 + b^2 = (a-b)^2 + 2ab$

توجه: از این اتحاد موقعی استفاده می‌کنیم که تفاضل و حاصل ضرب دو عدد را بدهند و مجموع مربعات آن‌ها را بخواهند.

۵- اگر $a - \frac{1}{a} = -\sqrt{21}$ باشد، مقدار عبارت $a^2 + \frac{1}{a^2}$ کدام است؟

- (۱) ۱۹ (۲) -۱۹ (۳) ۲۳ (۴) -۲۳

پاسخ: گزینه «۳» با توجه به اتحاد فرعی (۲) داریم:

$$a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a - \frac{1}{a}\right)^2 + 2\left(a\right)\left(\frac{1}{a}\right) = (-\sqrt{21})^2 + 2 = 21 + 2 = 23$$

(۳) فرعی: $(a+b)^2 - (a-b)^2 = 4ab$

۶- اگر مجموع دو عدد ۱۰ و تفاضل آن‌ها ۶ باشد، حاصل ضرب آن دو چند است؟

- (۱) ۳۴ (۲) ۱۶ (۳) -۱۶ (۴) -۳۴

پاسخ: گزینه «۲»

$$a+b=10 \text{ و } a-b=6 \xrightarrow{\text{اتحاد فرعی (۳)}} 10^2 - 6^2 = 4ab \Rightarrow 100 - 36 = 4ab \Rightarrow ab = \frac{64}{4} = 16$$

(۴) فرعی: $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$

۷- اگر $A = 3x + 2y$ و $B = 3x - 2y$ باشد، حاصل $A^2 + B^2$ کدام گزینه است؟

- (۱) $2(3x^2 + 2y^2)$ (۲) $2(9x + 4y)$ (۳) $18x + 8y$ (۴) $2(9x^2 + 4y^2)$

پاسخ: گزینه «۴» با جایگذاری A و B و استفاده از اتحاد فرعی ۴ داریم:

$$A^2 + B^2 = (3x + 2y)^2 + (3x - 2y)^2 \xrightarrow{\text{اتحاد فرعی (۴)}} 2((3x)^2 + (2y)^2) = 2(9x^2 + 4y^2)$$

۲- اتحاد مربع سه جمله‌ای

اگر مجموع سه عدد حقیقی a ، b و c را به توان ۲ برسانیم، داریم: $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

❁ ۸- ساده شده عبارت $(2a^2 - b^2 - c^2)^2$ در کدام گزینه آمده است؟

(۱) $4a^4 - b^4 - c^4$ (۲) $4a^4 - b^4 + c^4 - 4a^2b^2 - 4a^2c^2 + 2b^2c^2$ (۳) $4a^4 + b^4 + c^4$ (۴) $4a^4 + b^4 + c^4 - 4ab - 4ac + 2bc$

پاسخ: گزینه «۲» باید دقت کرد که در اتحاد مربع سه جمله‌ای، علامت منفی عددها و جمله‌ها را هنگام به کار بردن، با متغیرها در نظر می‌گیریم.

$$(2a^2 - b^2 - c^2)^2 = (2a^2)^2 + (-b^2)^2 + (-c^2)^2 + 2(2a^2)(-b^2) + 2(2a^2)(-c^2) + 2(-b^2)(-c^2)$$

$$= 4a^4 + b^4 + c^4 - 4a^2b^2 - 4a^2c^2 + 2b^2c^2$$

۳- اتحاد مزدوج

با به دست آوردن حاصل ضرب دو جمله‌ای‌های $(a+b)(a-b)$ خواهیم داشت: $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$

↓ ↓ ↓ ↓
 جمله اول جمله دوم اولی به توان ۲ دومی به توان ۲

❁ ۹- اگر y وارون x باشد، حاصل $(x - \frac{1}{x})(y + \frac{1}{y})$ کدام است؟ ($x, y \neq 0$)

(۱) $2x^2$ (۲) $x^2 - y^2$ (۳) $2y^2$ (۴) $x^2 + y^2$

پاسخ: گزینه «۲» وقتی بیان می‌کنیم y وارون x است، یعنی می‌توان $x = \frac{1}{y}$ یا $y = \frac{1}{x}$ در نظر گرفت. اکنون با جایگذاری y به جای $\frac{1}{x}$ و $\frac{1}{y}$ به جای x در برانتز اول و با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$(x - \frac{1}{x})(y + \frac{1}{y}) \xrightarrow{\text{جایگذاری}} (\frac{1}{y} - y)(\frac{1}{y} + y) \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (\frac{1}{y})^2 - y^2 = x^2 - y^2$$

۴- اتحاد یک جمله مشترک

اگر دو عبارت دو جمله‌ای با جمله مشترک x را با هم ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + (a \times b)$$

یا به بیان کلامی: جمله مشترک $(x + a)$ جمله غیرمشترک $(x + b)$ جمله غیرمشترک $(a \times b)$

حاصل ضرب جمله‌های غیرمشترک) + (جمله مشترک) (جمع جمله‌های غیرمشترک) + (جمله مشترک) $(x+a)(x+b) =$

❁ ۱۰- حاصل عبارت $a(a+1)(a+2)(a+3) + 1$ کدام است؟

(۱) $(a^2+1)^2$ (۲) $(a+1)^4$ (۳) $(a^2+3a+1)^2$ (۴) $(a^2+a+1)^2$

پاسخ: گزینه «۳» باجابه‌جایی عبارت‌ها و استفاده از اتحاد یک جمله مشترک داریم:

$$a(a+3)(a+1)(a+2) + 1 \Rightarrow (a^2+3a)((a^2+3a)+2) + 1 = (a^2+3a)^2 + 2(a^2+3a) + 1$$

اتحاد مربع دو جمله

اتحاد یک جمله مشترک

تعمیم اتحاد یک جمله مشترک

اگر سه عبارت دو جمله‌ای با جمله مشترک x را با هم ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$(x + a)(x + b)(x + c) = x^3 + (a + b + c)x^2 + (ab + ac + bc)x + abc$$

۱۱- حاصل عبارت $(x+2)(x+3)(x-4)$ کدام گزینه است؟

- (۱) $x^3 + x^2 - 14x - 24$ (۲) $x^2 + x - 14$
 (۳) $x^3 + x^2 - 14x^2 - 24$ (۴) $x^3 - x^2 + 14x + 24$
- پاسخ: گزینه «۱»
 $(x+2)(x+3)(x-4) = x^3 + (2+3-4)x^2 + (2 \times 3 + 2 \times (-4) + 3 \times (-4))x + (2 \times 3 \times (-4))$
 $= x^3 + x^2 - 14x - 24$

۵- اتحاد مجموع و تفاضل مکعب دو جمله (اتحاد جاق! و لاغر!)

(الف) اتحاد مجموع مکعب دو جمله $(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3 + b^3$

۱۲- اگر $x+y=20$ و $x^2+y^2=13+xy$ باشد، x^3+y^3 کدام است؟

- (۱) $260 - 20xy$ (۲) 260 (۳) 13 (۴) 20
- پاسخ: گزینه «۲» با استفاده از صورت مسئله داریم:
 $x^2 + y^2 = 13 + xy \Rightarrow x^2 + y^2 - xy = 13$ (۱)
 اکنون از اتحاد جاق و لاغر کمک می‌گیریم: $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 + y^2 - xy) \xrightarrow{\text{جایگذاری (۱)}} x^3 + y^3 = 20 \times 13 = 260$

ب) اتحاد تفاضل مکعب دو جمله: اگر در اتحاد (۵-الف) در پرانتز اول ضریب b و در پرانتز دوم ضریب ab را قرینه کنیم، داریم:

$(a-b)(a^2 + ab + b^2) = a^3 - b^3$

۱۳- ساده شده عبارت $8x^3 + 64y^3 + (3x-4y)(12yx+9x^2+16y^2)$ کدام گزینه است؟

- (۱) $35x^3$ (۲) x^3 (۳) $128y^3 + x^3$ (۴) $48y^3 - x^3$
- پاسخ: گزینه «۱» طبق اتحاد تفاضل مکعب دو جمله می‌توان نوشت:
 $8x^3 + 64y^3 + (3x-4y)(9x^2 + 12xy + 16y^2)$
 $= 8x^3 + 64y^3 + (3x)^3 - (4y)^3 = 8x^3 + 64y^3 + 27x^3 - 64y^3 = 35x^3$

۶- اتحاد مکعب دو جمله‌ای

(الف) اتحاد مکعب مجموع دو جمله $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

۱۴- عبارت جبری $(x+1)^3$ دارای چند جمله است؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶
- پاسخ: گزینه «۲»
 چهار جمله $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$

ب) اتحاد مکعب تفاضل دو جمله $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

۱۵- در ساده شده عبارت $(3x-2y)^3$ مجموع ضرایب عددی چندجمله‌ای، برابر با کدام گزینه است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) صفر (۴) ۹
- پاسخ: گزینه «۱» با استفاده از اتحاد مکعب تفاضل دو جمله داریم:
 $(3x-2y)^3 = (3x)^3 - 3(3x)^2(2y) + 3(3x)(2y)^2 - (2y)^3 = 27x^3 - (3 \times 9 \times 2) \cdot 2y + (3 \times 3 \times 4)(xy^2) - 8y^3$
 $= 27x^3 - 54x^2y + 36xy^2 - 8y^3 \Rightarrow$ مجموع ضرایب = $27 - 54 + 36 - 8 = 1$

اتحادهای فرعی مکعب دوجمله‌ای

از اتحاد مکعب دوجمله‌ای می‌توان اتحاد‌های دیگری نتیجه گرفت که در این قسمت بیان می‌کنیم:

فرعی (۱): $a^3 + b^3 = (a+b)^3 - 3ab(a+b)$

توجه: از این اتحاد موقعی استفاده می‌کنیم که مجموع و حاصل ضرب دو عدد معلوم باشد و مجموع مکعبات آن‌ها را بخواهند.

❓ ۱۶- حاصل ضرب دو عدد حقیقی ۱ و مجموع آن‌ها ۳ است. مجموع توان‌های سوم آن‌ها چقدر است؟ (المپیاد ریاضی)

- ۱ (۱) ۱۸ (۲) ۲۴ (۳) ۲۷ (۴)

پاسخ: گزینه «۲» با استفاده از اتحاد فرعی (۱) داریم: $xy = 1$ و $x + y = 3 \Rightarrow x^3 + y^3 = (x+y)^3 - 3xy(x+y) = 3^3 - 3(1)(3) = 27 - 9 = 18$

فرعی (۲): $a^3 - b^3 = (a-b)^3 + 3ab(a-b)$

توجه: از این اتحاد موقعی استفاده می‌کنیم که تفاضل و حاصل ضرب دو عدد را بدهند و تفاضل مکعبات آن‌ها را بخواهند.

❓ ۱۷- اگر $ab = 45$ و $a - b = 10$ باشد، آن‌گاه $a^3 - b^3$ کدام گزینه است؟

- ۳۵۰ (۱) -۳۵۰ (۲) ۲۳۵۰ (۳) -۲۳۵۰ (۴)

پاسخ: گزینه «۳» با استفاده از اتحاد فرعی (۲) داریم: $a^3 - b^3 = \frac{(a-b)^3}{1} + \frac{3ab(a-b)}{45} = 1000 + 135 \times 10 = 2350$

استفاده از اتحادها برای محاسبه حاصل عبارت‌ها

❓ ۱۸- حاصل عبارت 1001×999 برابر است با:

- ۱۰۶ + ۱ (۱) 9×10^6 (۲) $10^6 - 1$ (۳) $10^9 - 1$ (۴)

پاسخ: گزینه «۳» می‌توان با نوشتن اعداد به صورت زیر آن‌ها را به اتحاد مزدوج تبدیل کرد:

$999 \times 1001 = (1000 - 1)(1000 + 1) = 1000^2 - 1^2 = (10^3)^2 - 1 = 10^6 - 1$

❓ ۱۹- مقداری عددی عبارت $A = (2+1)(2^2+1)(2^4+1)...(2^{64}+1)$ برابر است با:

- $2^{256} + 1$ (۱) $2^{128} + 1$ (۲) $2^{128} - 1$ (۳) $2^{256} - 1$ (۴)

پاسخ: گزینه «۳» اگر A را در $(2-1)$ ضرب کنیم، طبق اتحاد مزدوج داریم:

$$A = \frac{(2-1)(2+1)(2^2+1)(2^4+1)...(2^{64}+1)}{(2-1)} = \frac{(2^2-1)(2^2+1)(2^4+1)...(2^{64}+1)}{(2^2-1)} = \frac{(2^4-1)(2^4+1)...(2^{64}+1)}{(2^4-1)} = \dots = \frac{(2^{128}-1)(2^{128}+1)}{(2^{128}-1)} = 2^{128} - 1$$

تجزیه چندجمله‌ای‌ها

برای ساده‌تر شدن عملیات روی چندجمله‌ای‌ها و برای تعیین ریشه‌های یک چندجمله‌ای می‌توان بهترین روش را تجزیه چندجمله‌ای‌ها نامید. تبدیل کردن یک چندجمله‌ای به صورت ضرب دو یا چند، چندجمله‌ای دیگر با درجه کم‌تر، تجزیه آن چندجمله‌ای نامیده می‌شود. تجزیه یک چندجمله‌ای هنگامی کامل است که هر یک از چندجمله‌ای‌های به دست آمده دیگر تجزیه پذیر نباشند.

روش‌های رایج در تجزیه:

- الف) فاکتورگیری ب) اتحادها پ) دسته‌بندی ت) افزودن و کاستن

الف) تجزیه به کمک فاکتورگیری

هر گاه در همه جملات یک عبارت جبری، یک عامل مشترک (ب.م.م اعداد یا حروف مشترک با توان کم‌تر) وجود داشته باشد، آن عامل را به عنوان فاکتور در نظر می‌گیریم و پشت پرانتز قرار می‌دهیم و سپس آن چیزی که از هر جمله باقی می‌ماند، را داخل پرانتز با هم جمع می‌کنیم.

۲۰- اگر عبارت جبری $18a^2b^2c^2 + 12a^2b^2c^2 + 24a^2b^2c^2$ را به صورت ضرب دو عبارت جبری بنویسیم، یکی از

این دو عبارت کدام است؟

(۱) abc (۲) $6a^2b^2c^2$ (۳) $4 - 6a^2b^2c^2$ (۴) $3a^2c^2 - 2b^2c^2$

پاسخ: گزینه «۲» در سه عبارت ب.م.م ضرایب عدد ۶ و حروف مشترک با توان کم‌تر a^2 ، b^2 و c^2 هستند که آن‌ها را به صورت فاکتور در پشت پرانتز می‌نویسیم، پس داریم: $18a^2b^2c^2 + 12a^2b^2c^2 + 24a^2b^2c^2 = 6a^2b^2c^2(3a^2 + 2c^2 + 4a^2b^2)$

ب) تجزیه به کمک اتحادها

با بررسی برخی از چندجمله‌ای‌ها معلوم می‌شود که شرایط یکی از اتحادهای جبری در آن برقرار است. بنابراین تجزیه این گونه از چندجمله‌ای‌ها را با استفاده از اتحاد انجام می‌دهیم.
* در اصل تجزیه عملیاتی در جهت عکس اتحاد می‌باشد.

۱- تجزیه به کمک اتحادهای مربع دو جمله‌ای

شرایط موجود در چندجمله‌ای برای تجزیه شدن:

۱- عبارت جبری شامل سه جمله باشد. ۲- دو جمله عبارت باید مربع کامل باشد. ۳- دو برابر جذر جملات اول و دوم موجود باشد.

۲۱- اگر $x - y = 7$ باشد، حاصل عبارت $5xy - 4x^2 - xy + 3y^2 + 7x^2$ چقدر است؟ (تیزهوشان)

(۱) ۱۴۷ (۲) ۱۲۰ (۳) ۲۱ (۴) -۱۲۰

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا عبارت را ساده‌تر می‌کنیم:

$$7x^2 + 3y^2 - xy - 4x^2 - 5xy = 3x^2 - 6xy + 3y^2 = 3(x^2 - 2xy + y^2) = 3(x - y)^2 = 3 \times 7^2 = 147$$

۲- تجزیه به کمک اتحاد مزدوج

شرایط موجود در چندجمله‌ای برای تجزیه شدن:

۱- عبارت جبری شامل دو جمله باشد. ۲- هر دو جمله، مربع کامل باشند. (توان آن‌ها مضربی از ۲ باشد).

۳- عملیات بین دو جمله (-) باشد.

۲۲- در تجزیه عبارت $x^{16} - y^8$ کدام عامل وجود ندارد؟ (کنکور آزمایشی انسانی)

(۱) $x^2 + y$ (۲) $x^4 + y$ (۳) $x^8 + y^4$ (۴) $x^2 - y$

پاسخ: گزینه «۲» x^8 و x^{16} هر دو مربع کامل هستند، بنابراین با استفاده از اتحاد مزدوج داریم:

$$\frac{x^{16} - y^8}{\text{اتحاد مزدوج}} = (x^8)^2 - (y^4)^2 = \frac{(x^8 - y^4)(x^8 + y^4)}{\text{اتحاد مزدوج}} = \frac{(x^4 - y^2)(x^4 + y^2)(x^8 + y^4)}{\text{اتحاد مزدوج}} = (x^2 - y)(x^2 + y)(x^4 + y^2)(x^8 + y^4)$$

۳- تجزیه به کمک اتحاد یک جمله مشترک

شرایط موجود در چندجمله‌ای برای تجزیه شدن

۱- عبارت جبری شامل سه جمله باشد. ۲- یک جمله آن مربع کامل باشد. ۳- دو عدد بتوان یافت که حاصل جمع آن‌ها برابر ضریب متغیر (x) بوده و حاصل ضرب آن‌ها برابر (عدد ثابت) باشد.

توجه: برای تعیین دو عدد در هنگام تجزیه با توجه به علامت عدد ثابت، یعنی (ab) و علامت ضریب جمله مشترک X یعنی (a+b) دو عدد a و b مناسب را انتخاب می‌کنیم.

(کنکور هارچ از کشور آلمانی)

؟ عبارت $6x^2 - 6x - 36$ بر کدام عبارت زیر بخش پذیر است؟

$x - 2$ (۱) $x - 6$ (۲) $x - 3$ (۳) $x - 4$ (۴)

پاسخ: گزینه «۳» برای آن که بتوان گفت عبارت جبری بر کدام عبارت بخش پذیر است باید آن را تجزیه کرد:

$$6x^2 - 6x - 36 \xrightarrow{\text{فاکتور از ۶}} 6(x^2 - x - 6) \xrightarrow{\text{اتحاد یک جمله مشترک}} 6(x+2)(x-3)$$

همان‌طور که ملاحظه کردید، برای تجزیه از اتحاد جمله مشترک استفاده کردیم. x^2 مربع کامل است، پس x جمله مشترک می‌باشد. دو پراتزها باز کردیم و جمله مشترک x را در هر دو قرار دادیم. با توجه به عدد ثابت (-۶) و ضریب جمله مشترک (-۱) و آنچه در «توجه» گفته شد، جملات غیرمشترک اعداد (-۳) و (+۲) هستند.

تذکر: در صورتی که ضریب جمله x^2 مجذور کامل نباشد؛ سه‌جمله‌ای را در ضریب x^2 ضرب و تقسیم می‌کنیم، تا ضریب آن مجذور کامل شود، سپس از اتحاد جمله‌ی مشترک استفاده می‌کنیم.

(کنکور آزمایشی آلمانی)

؟ در تجزیه عبارت $8x^2 + 10x - 3$ کدام عامل وجود دارد؟

$4x + 3$ (۱) $2x - 1$ (۲) $8x - 1$ (۳) $2x + 3$ (۴)

پاسخ: گزینه «۴» همان‌طور که ملاحظه می‌کنیم، ضریب x^2 در عبارت مربع کامل نیست. بنابراین با توجه به تذکر گفته شده داریم:

$$8x^2 + 10x - 3 = \frac{1}{8}((8x)^2 + 10(8x) - 24)$$

پس جمله مشترک $8x$ می‌باشد، بنابراین دو عدد لازم داریم که مجموع آن‌ها (+۱۰) و حاصل ضرب آن‌ها (-۲۴) باشد که عبارت‌اند از (+۱۲) و (-۲):

$$\Rightarrow \frac{1}{8}(8x + 12)(8x - 2) \xrightarrow{\text{فاکتور از عدد ۴ و ۲ در دو پراتز}} \frac{1}{8} \times 4(2x + 3) \times 2(4x - 1) = (2x + 3)(4x - 1)$$

می‌توان روش بالا را به این صورت نیز نوشت:

۱) عبارت را برابر A قرار می‌دهیم. $A = 8x^2 + 10x - 3$

۲) طرفین را در ضریب x^2 یعنی عدد ۸ ضرب می‌کنیم. $8A = (8x)^2 + 10(8x) - 24$

۳) اکنون از اتحاد یک جمله مشترک کمک می‌گیریم. $8A = (8x + 12)(8x - 2)$

۴) در پراتزها از ۲ و ۴ فاکتور می‌گیریم تا عدد ۸ حاصل شود. $8A = 4(2x + 3)2(4x - 1)$

۵) طرفین را بر ضریب x^2 (عدد ۸) تقسیم می‌کنیم: $\frac{8A}{8} = \frac{4(2x + 3)2(4x - 1)}{8} \Rightarrow A = (2x + 3)(4x - 1)$

۴- تجزیه به کمک اتحاد چاق و لاغر

شرایط موجود در چندجمله‌ای برای تجزیه شدن:

۱- عبارت جبری شامل دو جمله باشد. ۲- هر دو جمله مکعب کامل باشند. (توان آن‌ها مضربی از ۳ باشد).

توجه: اگر بین دو جمله مکعب کامل علامت جمع بود، از اتحاد مجموع مکعب دو جمله و اگر منها بود، از اتحاد تفاضل مکعب دو جمله

استفاده می‌کنیم. $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$ $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

(آزاد انسانی)

؟ ۲۵- اگر $a + b = 1$ و $a^2 + b^2 = 5$ باشد، $a^3 + b^3$ کدام است؟

- ۳ (۱) ۴ (۲) ۷ (۳) ۸ (۴)

پاسخ: گزینه «۳» با استفاده از اتحاد مربع دو جمله‌ای می‌توان نوشت:

$$a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab \Rightarrow 5 = 1^2 - 2ab \Rightarrow 4 = -2ab \Rightarrow ab = -2$$

هم‌چنین با تجزیه عبارت $a^3 + b^3$ توسط اتحاد جاق و لاغر داریم:

$$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2) = 1(5 - (-2)) = 1 \times 7 = 7$$

پ- تجزیه با دسته‌بندی

در بعضی از عبارت‌های جبری برای تجزیه کردن لازم است ابتدا با کمی دقت جملات آن را به صورت چندین دسته مناسب در نظر گرفت، سپس با استفاده از فاکتورگیری و یا اتحادهای جبری هر دسته، در نهایت کل عبارت را تجزیه کرد.
توجه: بسیاری از چهارجمله‌ای‌ها را می‌توان با این روش تجزیه کرد.

(کنکور سراسری انسانی و تفرینی)

؟ ۲۶- اگر $x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = 0$ باشد، کدام رابطه درست است؟

- $x^2 + y^2 = 1$ (۱) $x^2 + y^2 = x + y$ (۲) $x^2 + y^2 = 0$ (۳) $x^2 + y^2 = 2x + 2y + 2$ (۴)

پاسخ: گزینه «۲» ابتدا جمله‌ها را دسته‌بندی می‌کنیم:

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y + 2 = \underbrace{x^2 - 2x + 1}_{\text{اتحاد مربع دو جمله}} + \underbrace{y^2 - 2y + 1}_{\text{اتحاد مربع دو جمله}} = (x-1)^2 + (y-1)^2 = 0$$

هرگاه حاصل جمع عبارت با توان زوج صفر شود، تک‌تک آن‌ها برابر صفر هستند.

$$(x-1)^2 = 0 \Rightarrow x = 1, (y-1)^2 = 0 \Rightarrow y = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 = x + y$$

ت- تجزیه با افزودن و کاستن

در تجزیه بعضی عبارت‌ها برای آن‌که بتوان عبارت را با استفاده از دسته‌بندی تجزیه کنیم، باید جمله‌ای را اضافه و کم کنیم و یا عددی را ضرب و پس از تجزیه بر همان عدد تقسیم کنیم.

؟ ۲۷- تجزیه شده عبارت $a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2$ شامل کدام عبارت است؟

- $a - b - c$ (۱) $-a - b$ (۲) $2a - b - c$ (۳) $-a - b - c$ (۴)

پاسخ: گزینه «۱» ابتدا عبارت $2b^2c^2$ را اضافه و کم می‌کنیم.

$$\begin{aligned} a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 - 2b^2c^2 &= \underbrace{a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2}_{\text{اتحاد مربع سه جمله}} - 4b^2c^2 \\ &= \underbrace{(a^2 - b^2 - c^2)^2}_{\text{اتحاد مزدوج}} - 4b^2c^2 = \underbrace{(a^2 - b^2 - c^2 - 2bc)}_{\text{فاکتور از (-)}} \underbrace{(a^2 - b^2 - c^2 + 2bc)}_{\text{فاکتور از (-)}} = \underbrace{[a^2 - (b^2 + c^2 + 2bc)]}_{\text{اتحاد مربع دو جمله}} \underbrace{[a^2 - (b^2 + c^2 - 2bc)]}_{\text{اتحاد مربع دو جمله}} \\ &= [a^2 - (b+c)^2][a^2 - (b-c)^2] = (a-b-c)(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \end{aligned}$$

نابری‌ها و نامعادلات

برای مقایسه کردن هر دو عدد حقیقی a و b با استفاده از نمادهای ریاضی می‌توان گفت:

(۱) اگر a و b مساوی باشند، $a = b$.

(۲) اگر a کوچک‌تر از b باشد، با نماد $a < b$ نشان می‌دهیم.

(۳) اگر a بزرگ‌تر از b باشد، با نماد $a > b$ نشان می‌دهیم.

توجه: نماد $a \geq b$ را بخوانید، « a بزرگ‌تر یا مساوی b » و این بدان معنا است که $a > b$ یا $a = b$. همچنین نماد $a \leq b$ یعنی $a < b$ یا $a = b$ است.

خواص نابرابری‌ها (نامساوی‌ها)

(۱) می‌توان به دو طرف یک نامساوی، عددی حقیقی را اضافه یا از دو طرف کم کرد، بدون آن‌که جهت آن تغییر کند.

$$\text{اگر } a, b, c \in \mathbb{R} \text{ و } a < b \Rightarrow \begin{cases} a + c < b + c \\ a - c < b - c \end{cases}$$

(۲) اگر طرفین یک نامساوی را در عددی مثبت ضرب یا تقسیم کنیم، جهت آن نامساوی تغییر نمی‌کند.

$$a < b \text{ و } c > 0 \Rightarrow \begin{cases} ac < bc \\ \frac{a}{c} < \frac{b}{c} \end{cases}$$

(۳) اگر طرفین یک نامساوی را در عددی منفی ضرب یا بر عددی منفی تقسیم کنیم، جهت آن نامساوی عوض می‌شود.

$$a < b \text{ و } c < 0 \Rightarrow \begin{cases} ac > bc \\ \frac{a}{c} > \frac{b}{c} \end{cases}$$

(۴) برای هر سه عدد حقیقی a و b و c همواره روابط زیر را داریم:

$$1) a < b \text{ و } b < c \Rightarrow a < c \quad 2) a < b \text{ و } c < d \Rightarrow a + c < b + d \quad 3) a < b \text{ و } 0 < c < d \Rightarrow ac < bd$$

$$\left. \begin{matrix} a < b \\ c < d \end{matrix} \right\} \Rightarrow a + c < b + d \quad (5) \text{ جمع طرفین دو نامساوی:}$$

توجه: در جمع نامساوی‌ها، اگر دو نامساوی هم‌جهت نبودند، طرفین یکی از آن‌ها را در منفی ضرب می‌کنیم تا پس از هم‌جهت شدن با هم جمع کنیم.

توجه: تفاضل و ضرب و تقسیم طرفین دو نامساوی همواره نمی‌تواند برقرار باشد.

(۶) معکوس کردن طرفین نامساوی‌ها:

$$a < b \text{ و } ab > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b} \quad \text{الف) اگر طرفین نامساوی هم‌علامت باشند، جهت نامساوی عوض می‌شود.}$$

$$a < b \text{ و } ab < 0 \Rightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \quad \text{ب) اگر طرفین نامساوی هم‌علامت نباشند، جهت نامساوی عوض نمی‌شود.}$$

(۷) به توان رساندن نامساوی‌ها:

$$a < b \text{ و } n \text{ فرد} \Rightarrow a^n < b^n \quad \text{الف) اگر طرفین به توان عددی فرد برسند، جهت نامساوی تغییر نمی‌کند.}$$

ب) اگر طرفین به توان عددی زوج برسند، سه حالت وجود دارد:

$$1) a > b > 0 \Rightarrow a^n < b^n \Rightarrow \text{جهت عوض نمی‌شود} \quad 2) a < b < 0 \Rightarrow a^n > b^n \Rightarrow \text{جهت عوض می‌شود}$$

$$3) a < 0 < b \Rightarrow \begin{cases} |a| \geq |b| \Rightarrow a^n \geq b^n \\ |a| < |b| \Rightarrow a^n < b^n \end{cases}$$

(کنکور سراسری فنی و حرفه‌ای)

؟ ۲۸- اگر $a > b > 0$ آن‌گاه کدام نامساوی برقرار است؟

$$\frac{1}{a} > \frac{1}{b} \quad (4) \quad b - a > 0 \quad (3) \quad -a > -b \quad (2) \quad \frac{-1}{a} > \frac{-1}{b} \quad (1)$$

پاسخ: گزینه «۱» برای حل این سؤال تک‌تک گزینه‌ها را بررسی می‌کنیم:

$$(1) \text{ گزینه } a > b \text{ و } ab > 0 \xrightarrow[\text{خاصیت ۶- الف}]{\text{استفاده از}} \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } -1} \frac{-1}{a} > \frac{-1}{b} \Rightarrow \text{درست}$$

$$(2) \text{ گزینه } a > b \xrightarrow{\text{ضرب طرفین در } -1} -a < -b \Rightarrow \text{نادرست}$$

$$(3) \text{ گزینه } a > b \xrightarrow{\text{از طرفین ۱ را کم می‌کنیم}} a - a > b - a \Rightarrow b - a < 0 \Rightarrow \text{نادرست}$$

$$(4) \text{ گزینه } a > b \text{ و } ab > 0 \xrightarrow[\text{استفاده از خاصیت ۶- الف}]{\text{استفاده از}} \frac{1}{a} < \frac{1}{b} \Rightarrow \text{نادرست}$$

نامعادله

هر نامساوی که در آن متغیر به کار رفته باشد، نامعادله نام دارد.

* مجموعه مقادیری که به جای متغیرها در یک نامعادله قرار می‌گیرند و آن را به یک نامساوی درست تبدیل می‌کنند مجموعه جواب نامعادله نام دارند.

* در مسیر رسیدن به جواب نامعادله می‌توان از خاصیت‌هایی که برای نامساوی‌ها گفته شد استفاده کرد.

* نامعادله‌ای که بعد از عملیات‌های جبری لازم، به یکی از شکل‌های $ax + b > 0$ ، $ax + b \geq 0$ ، $ax + b < 0$ ، یا $ax + b \leq 0$ درآید یک نامعادله یک‌جهولی درجه اول است.

توجه: برای به‌دست آوردن مجموعه جواب نامعادله درجه اول کافی است عدد b را به طرف دیگر نامساوی منتقل کنیم و دو طرف را بر ضریب x یعنی a تقسیم نماییم. در تقسیم طرفین بر a باید دقت کرد که اگر $a > 0$ باشد جهت تغییر نخواهد کرد ولی اگر $a < 0$ باشد باید جهت نامساوی را تغییر داد.

؟ ۲۹- جواب نامعادله $\frac{2x+3}{2} - \frac{3}{4} > \frac{4x+1}{3}$ کدام است؟ (سراسری انسانی)

$x < \frac{2}{3}$ (۱) $x > \frac{3}{6}$ (۳) $x > \frac{3}{4}$ (۲) $x < \frac{5}{4}$ (۴)

پاسخ: گزینه «۴»

$$\frac{2x+3}{2} - \frac{3}{4} > \frac{4x+1}{3} \Rightarrow 12\left(\frac{2x+3}{2}\right) - 12\left(\frac{3}{4}\right) > 12\left(\frac{4x+1}{3}\right)$$

$$\Rightarrow 12x + 18 - 9 > 16x + 4 \Rightarrow 12x - 16x > 4 + 9 - 18 \Rightarrow -4x > -5 \xrightarrow{\div (-4)} x < \frac{5}{4}$$

دستگاه نامعادلات (نامعادلات توأم)

بعضی مواقع با نامعادله‌هایی مواجه می‌شویم که متغیر آن‌ها باید هم‌زمان در بیش از یک شرط صدق کند. یافتن جواب برای این نامعادلات منجر به حل یک دستگاه نامعادله می‌شود. برای حل دستگاه نامعادلات ابتدا هر یک از نامعادلات را به‌صورت تنهایی در نظر گرفته و حل می‌کنیم و مجموعه جواب آن را می‌یابیم. سپس برای به‌دست آوردن مجموعه جواب نهایی، اشتراک مجموعه‌های جواب را به‌دست می‌آوریم.

؟ ۳۰- مجموعه جواب دستگاه نامعادلات زیر کدام است؟ (تزر)

$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{1}{3} > \frac{x-1}{6} \\ \frac{x+1}{2} < \frac{x+2}{3} \end{cases}$

$-\frac{3}{2} < x < -1$ (۱) $-\frac{3}{2} < x < 1$ (۲) $1 < x < \frac{3}{2}$ (۳) $1 < x < \frac{3}{2}$ (۴)

پاسخ: گزینه «۲» برای حل دستگاه می‌توان طرفین هر کدام از نامعادلات را در عدد ۶ ضرب کرد.

$$6\left(\frac{x}{2} + \frac{1}{3}\right) > 6\left(\frac{x-1}{6}\right) \Rightarrow 3(x) + 2(1) > (x-1) \Rightarrow 3x + 2 > x - 1 \Rightarrow 2x > -3 \Rightarrow x > -\frac{3}{2}$$

$$6\left(\frac{x+1}{2}\right) < 6\left(\frac{x+2}{3}\right) \Rightarrow 3(x+1) < 2(x+2) \Rightarrow 3x + 3 < 2x + 4 \Rightarrow x < 1$$

اکنون از عبارت‌های (۱) و (۲) اشتراک می‌گیریم.

$(1) \cap (2) \Rightarrow -\frac{3}{2} < x < 1$

بسته تمرین ۱

۱- اگر تساوی $2x^2 + 3x - k^2 = (2x - k)(x + k)$ به ازای همه مقادیر x برقرار باشد، k کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

(تیزهوشان)

۲- اگر $x + \frac{1}{x} = -2a$ باشد، مقدار عبارت $x^2 + \frac{1}{x^2} - 2a^2$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

(مسابقات جهانی)

۳- اگر $x + y + z = 1$ و $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 0$ باشد، آن گاه $x^2 + y^2 + z^2$ برابر است با:

- صفر (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴)

(کنکور آزاد انسانی)

۴- حاصل عبارت $(a + b)^2 + (b + c)^2 + (a + c)^2 - (a + b + c)^2$ برابر است با:

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

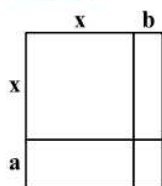
(کنکور)

۵- حاصل عبارت $(\sqrt{7} + 2\sqrt{2})^{10} (\sqrt{7} - 2\sqrt{2})^{10}$ برابر است با:

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

(آزمون ورودی)

۶- شکل زیر نشان دهنده کدام یک از عبارات زیر است؟



(۱) $(x + a)(x + b) = x^2 + axb$

(۲) $(x + a)(x + b) = a^2 + x^2 + b^2$

(۳) $(x + a)(x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$

(۴) $(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$

۷- اگر عبارت $(x - 4)(x^2 + Ax + 16)$ را بتوان به صورت $x^3 + B^3$ نوشت، مقدار $\frac{1}{4}A - B$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۸- اگر $x^2 + y^2 = 10$ و $x^2 y^2 = 16$ باشد، مقدار $x^4 y + y^4 x$ کدام است؟ ($xy > 0$)

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

(تیزهوشان)

۹- عبارت جبری $(x^2 + bx^2) + (4xy + 4by)$ به صورت ضرب دو عبارت جبری کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

(البرژی اتمی)

۱۰- هرگاه a و b دو عدد زوج متوالی و $c = 3a^2 + b^2 - 3$ باشد، آن گاه \sqrt{c} :

- (۱) یک عدد گنگ است. (۲) یک عدد صحیح زوج است.
(۳) یک عدد صحیح فرد است. (۴) یک عدد صحیح است که فرد یا زوج است.

(البرژی اتمی)

۱۱- اگر $x^2 + y = 7$ و $y^2 + x = 11$ باشد، حاصل $x^2 + y^2$ کدام است؟

- ۱۳ (۱) ۱۴ (۲) ۱۵ (۳) ۱۲ (۴)

(کنکور آزاد انسانی)

۱۲- یکی از عامل‌های $2x^3 + 5x^2 + 2x$ کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

(المپیاد ریاضی)

۱۳- مقدار عبارت $\frac{(2^3 - 1)(3^3 - 1)...(10^3 - 1)}{(2^3 + 1)(3^3 + 1)...(10^3 + 1)}$ برابر است با:

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۱۴- تجزیه عبارت $x^3 - 3x + 6x^2 - 18$ شامل کدام یک از گزینه‌های زیر است؟

- $x^2 + 6$ (۴) $x + 6$ (۳) $x - 3$ (۲) x^2 (۱)

۱۵- اگر عبارت $x^2 + 4$ را تجزیه کنیم، کدام عبارت زیر حاصل می‌شود؟

- $x^2 + 2 - 2x$ (۴) $x^2 - 2 + 2x$ (۳) $x^2 - 2x$ (۲) $x^2 + 2$ (۱)

(تیزموشان)

۱۶- اگر $(a-b)^2 = 12$ و $ab = -2$ باشد، آن‌گاه حاصل $\sqrt{a^2 + b^2 + 1}$ برابر است با:

- ۳ (۴) ۹ (۳) $\sqrt{5}$ (۲) ۵ (۱)

۱۷- اگر $0 < a < 1$ و $1 < b < 2$ باشد، کدام گزینه همواره صحیح است؟

- $\sqrt{b} < b$ (۴) $a^2 < a$ (۳) $a^2 < b^2$ (۲) $a^b < \sqrt{a}$ (۱)

۱۸- مجموعه جواب نامعادله $\frac{1-3x}{5} + (x-1)^2 > \frac{x}{4} + (x+1)^2$ کدام است؟

- $\frac{51}{3} < x$ (۴) $x < \frac{51}{3}$ (۳) $\frac{2}{51} < x$ (۲) $x < \frac{2}{51}$ (۱)

۱۹- نرخ جدید کالایی عدد طبیعی P و روابط دو بار خرید از آن به صورت‌های $55 > 2P + 1$ و $85 < 3P - 2$ می‌باشد، P

(کنکور آزاد)

کدام است؟

- ۲۷ (۴) ۲۸ (۳) ۲۹ (۲) ۳۰ (۱)

(کنکور سراسری)

۲۰- جواب نامعادله $1 - x \leq 2x - 2 < 3x - 3$ کدام است؟

- $x \geq 1$ (۴) $x < 1$ (۳) $x \leq 1$ (۲) $x > 1$ (۱)

- | | | | | | | | |
|---|-----|---|-----|---|-----|---|----|
| <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۱۶ | <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۱۱ | <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۶ | <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۱ |
| <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۱۷ | <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۱۲ | <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۷ | <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۲ |
| <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۱۸ | <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۱۳ | <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۸ | <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۳ |
| <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۱۹ | <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۱۴ | <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۹ | <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۴ |
| <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۲۰ | <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۱۵ | <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۱۰ | <input type="checkbox"/> ۴ <input type="checkbox"/> ۳ <input type="checkbox"/> ۲ <input type="checkbox"/> ۱ | -۵ |

توجه: حالا با توجه به پاسخ‌نامه و از طریق فرمول می‌توانید درصد پاسخگویی خود به سؤالات را مشخص نموده و ادامه مسیر خود را مطابق دستورالعمل آمده، مشخص کنید.

$$\text{درصد پاسخگویی} = \frac{\text{تعداد سؤالات با پاسخ درست}}{\text{تعداد کل سؤالات}} \times 100$$

شناسنامه سؤالات بسته تمرین ۱

شماره سؤال	عنوان زیرموضوع	سطح سؤال	پاسخ	سؤال متناظر در پیش آزمون	سؤال متناظر در بسته تمرین ۱	سؤال متناظر در بسته تمرین ۲
۱	شناخت اتحادها	۳	۳	۱	۱	۱
۲	اتحاد فرعی مربع دو جمله‌ای	۴	۴	۴	۲	۳
۳	اتحاد مربع سه جمله‌ای	۲	۲	۸	۴	۴
۴	اتحاد مربع سه جمله‌ای	۱	۱	۸	۴	۴
۵	اتحاد مزدوج	۳	۳	۹	۵	۶
۶	اتحاد یک جمله مشترک	۳	۳	۱۰	۷	۷
۷	اتحاد مجموع و تفاضل مکعب دو جمله	۲	۲	۱۲	۱۳	۸
۸	اتحاد مکعب دو جمله‌ای	۳	۳	۱۴	۱۶	۱۰
۹	تجزیه چند جمله‌ای‌ها با کمک فاکتورگیری	۴	۴	۲۰	۹	۱۱
۱۰	تجزیه چند جمله‌ای‌ها با کمک اتحادها	۳	۳	۲۱	۱۰	۱۲
۱۱	تجزیه چند جمله‌ای‌ها با کمک اتحادها	۱	۱	۲۲	۱۱	۱۳
۱۲	تجزیه چند جمله‌ای‌ها با کمک اتحادها	۲	۲	۲۳	۲۴	۱۱
۱۳	تجزیه چند جمله‌ای‌ها با کمک اتحادها	۲	۲	۲۵	۱۰	۸
۱۴	تجزیه چند جمله‌ای‌ها با دسته‌بندی	۳	۳	۲۶	۱۱	۱۰
۱۵	تجزیه چند جمله‌ای‌ها با افزودن و کاستن	۴	۴	۲۷	۱۲	۱۰
۱۶	تجزیه چند جمله‌ای‌ها با افزودن و کاستن	۴	۴	۲۷	۱۲	۱۰
۱۷	خواص نابرابری‌ها	۲	۲	۲۸	۱۳	۱۴
۱۸	حل نامعادلات	۱	۱	۲۹	۱۴	۱۴
۱۹	حل دستگاه‌های نامعادلات	۳	۳	۳۰	۱۵	۱۵
۲۰	حل دستگاه‌های نامعادلات	۳	۳	۳۰	۱۵	۱۵

پاسخنامه

- ۱- گزینه «۳» تساوی جبری در صورتی اتحاد است که ضرایب جملات هم‌درجه در طرفین آن با هم برابر باشند. داریم:
- $$(2x - k)(x + k) = 2x^2 + 3x - k^2 \Rightarrow 2x^2 + 2kx - kx - k^2 = 2x^2 + 3x - k^2 \Rightarrow 2x^2 + kx - k^2 = 2x^2 + 3x - k^2 \Rightarrow k = 3$$
- ۲- گزینه «۴»
- $$x + \frac{1}{x} = -2a \xrightarrow{\text{طرفین به توان ۲}} \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = (-2a)^2 \Rightarrow x^2 + 2x \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} = 4a^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = 4a^2 - 2$$
- هر دو طرف را منهای $2a^2$ می‌کنیم
- $$x^2 + \frac{1}{x^2} - 2a^2 = 4a^2 - 2 - 2a^2 \Rightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} - 2a^2 = 2a^2 - 2$$

۳- گزینه «۲» ابتدا از سه کسر مخرج مشترک می‌گیریم:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{yz + xz + xy}{xyz} = 0 \Rightarrow yz + xz + xy = 0$$

$$x + y + z = 1 \Rightarrow (x + y + z)^2 = 1^2 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + xz + yz) = 1 \Rightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

۴- گزینه «۱» با استفاده از اتحادهای مربع دوجمله‌ای و سه‌جمله‌ای داریم:

$$\begin{aligned} & (a+b)^2 + (b+c)^2 + (a+c)^2 - (a+b+c)^2 \\ &= (a^2 + 2ab + b^2) + (b^2 + 2bc + c^2) + (a^2 + 2ac + c^2) - (a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc) \\ &= a^2 + 2ab + b^2 + b^2 + 2bc + c^2 + a^2 + 2ac + c^2 - a^2 - b^2 - c^2 - 2ab - 2ac - 2bc = a^2 + b^2 + c^2 \end{aligned}$$

۵- گزینه «۳» با تجزیه کردن توان بزرگ‌تر داریم:

$$\begin{aligned} & (\sqrt{y} - 2\sqrt{z})^1 \times (\sqrt{y} - 2\sqrt{z})^{1-1} \times (\sqrt{y} + 2\sqrt{z})^{1-1} = (\sqrt{y} - 2\sqrt{z}) \times ((\sqrt{y})^2 - (2\sqrt{z})^2)^{1-1} \\ &= (\sqrt{y} - 2\sqrt{z}) \times (y - 4z)^{1-1} = (\sqrt{y} - 2\sqrt{z}) \times (-1)^{1-1} = (\sqrt{y} - 2\sqrt{z}) \times (-1) = 2\sqrt{z} - \sqrt{y} \end{aligned}$$

۶- گزینه «۳» با توجه به شکل، مساحت شکل اصلی (مستطیل بزرگ) برابر است با حاصل جمع مساحت

یک مربع به ضلع x با سه مستطیل به اضلاع x, b, a داریم:

$$(x+a)(x+a) = x^2 + ax + bx + ab \xrightarrow{\text{فکتور از x}} (x+a)(x+a) = x^2 + (a+b)x + ab$$

۷- گزینه «۲» با توجه به اتحاد چاق و لاغر خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & x^3 + B^3 = (x+B)(x^2 - Bx + B^2) \\ & (x+B)(x^2 - Bx + B^2) = (x-4)(x^2 + Ax + 16) \Rightarrow \begin{cases} B = -4 \\ A = -B = 4 \end{cases} \end{aligned}$$

با توجه به صورت مسئله داریم:

$$\frac{1}{2}A - B = \frac{1}{2}(4) - (-4) = 2 + 4 = 6$$

در نتیجه:

۸- گزینه «۳» با توجه به صورت مسئله داریم:

$$\begin{aligned} & x^2 y^2 = 16 \xrightarrow{xy > 0} xy = \sqrt{16} = 4 \quad (1) \\ & x^5 y + y^5 x = xy(x^4 + y^4) \end{aligned}$$

هم‌چنین با فاکتور از xy داریم:

اکنون فقط لازم است تا مقدار $x^4 + y^4$ را بیابیم، که برای این کار طرفین تساوی $x^2 + y^2 = 10$ را به توان ۳ می‌رسانیم:

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 = 10 \Rightarrow (x^2 + y^2)^3 = 10^3 \\ & \xrightarrow{\text{اتحاد مکعب دوجمله‌ای}} (x^2)^3 + (y^2)^3 + 3(x^2)^2 y^2 + 3x^2 (y^2)^2 = 1000 \Rightarrow x^6 + y^6 + 3x^4 y^2 + 3x^2 y^4 = 1000 \\ & \Rightarrow x^6 + y^6 + 3x^2 y^2 (x^2 + y^2) = 1000 \xrightarrow{\frac{x^2 + y^2 = 10}{x^2 y^2 = 16}} x^6 + y^6 + 3 \times 16 \times 10 = 1000 \\ & \Rightarrow x^6 + y^6 = 1000 - 480 = 520 \quad (2) \Rightarrow x^5 y + y^5 x = xy(x^4 + y^4) \xrightarrow{(1), (2)} 4 \times 520 = 2080 \end{aligned}$$

۹- گزینه «۴»

۱۰- گزینه «۳» چون a و b دو عدد زوج متوالی هستند می‌توان فرض کرد $a = b + 2$ پس:

$$\begin{aligned} & \left. \begin{aligned} c &= 3a^2 + b^2 - 3 \\ a &= b + 2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow c = 3(b+2)^2 + b^2 - 3 = 3b^2 + 12b + 12 + b^2 - 3 \\ &= 4b^2 + 12b + 9 = (2b+3)^2 \Rightarrow \sqrt{c} = 2b + 3 \end{aligned}$$

اتحاد مربع دوجمله‌ای

طبق صورت مسئله چون b عدد زوج است، پس 2b هم زوج است، اکنون جمع 2b (زوج) با 3 که عددی فرد است برابر عددی فرد می‌شود، چون عدد b صحیح است، حتماً 2b+3 هم صحیح می‌باشد.

۱۱- گزینه «۱» $y^2 + x = 11$ و $x^2 + y = 7 \Rightarrow y^2 - x^2 + x - y = 4$

اتحاد مزدوج $\Rightarrow (y-x)(y+x) + x - y = 4 \Rightarrow (y-x)(y+x) - (y-x) = 4 \Rightarrow (y-x)[(y+x) - 1] = 4$

$\Rightarrow \underbrace{(y-x)}_1 \underbrace{(y+x-1)}_4 = 1 \times 4 \Rightarrow \begin{cases} y-x=1 \\ y+x-1=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2y-1=5 \Rightarrow y=3 \\ y-x=1 \Rightarrow 3-x=1 \Rightarrow x=2 \end{cases} \Rightarrow x^2 + y^2 = 3^2 + 2^2 = 13$

۱۲- گزینه «۲» ابتدا از x فاکتور می‌گیریم: $2x^3 + 5x^2 + 2x \Rightarrow x(2x^2 + 5x + 2)$

اکنون با استفاده از اتحاد جمله‌ی مشترک عبارت داخل پرانتز را تجزیه می‌کنیم اما چون ضریب x^2 مجذور کامل نیست ابتدا کل عبارت را در ضریب x^2 ضرب و تقسیم می‌نماییم و سپس اقدام به تجزیه می‌کنیم:

$2x^2 + 5x + 2 \Rightarrow \frac{1}{x^2} [(2x)^2 + 5(2x) + 4] \Rightarrow \frac{1}{x^2} [(2x+4)(2x+1)] \Rightarrow \frac{1}{x^2} [2(x+2)(2x+1)] = (x+2)(2x+1)$

۱۳- گزینه «۲» با تجزیه از اتحاد جاق و لاغر داریم:

$\frac{(2^3-1)(3^3-1)...(100^3-1)}{(2^3+1)(3^3+1)...(100^3+1)} = \frac{(2-1)(2^2+2+1)(3-1)(3^2+3+1) \times \dots \times (100-1)(100^2+100+1)}{(2+1)(2^2-2+1)(3+1)(3^2-3+1) \times \dots \times (100+1)(100^2-100+1)}$

$= \frac{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \dots \times 99}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times 100 \times 101} \times \frac{1 \times 1 \times (100^2+100+1)}{3 \times 2 \times (100^2-100+1)} = \frac{2}{100 \times 101} \times \frac{101 \times 101}{3} = \frac{2367}{5050}$

۱۴- گزینه «۳» ابتدا عبارت جبری را دسته‌بندی می‌کنیم:

$x^3 - 3x + 6x^2 - 18 = (x^3 - 3x) + (6x^2 - 18) = x(x^2 - 3) + 6(x^2 - 3) = (x^2 - 3)(x + 6)$

۱۵- گزینه «۴» برای تجزیه کافی است جمله $4x^2$ را اضافه و کم کنیم.

$x^4 + 4 + 4x^2 - 4x^2 = (x^4 + 4 + 4x^2) - 4x^2 \Rightarrow (x^2 + 2)^2 - 4x^2 \xrightarrow{\text{اتحاد مزدوج}} (x^2 + 2 - 2x)(x^2 + 2 + 2x)$

۱۶- گزینه «۴» در عبارت زیر رادیکال $2ab$ را اضافه و کم می‌کنیم.

$\sqrt{a^2 + b^2 + 1} = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab + 2ab + 1} = \sqrt{(a-b)^2 + 2ab + 1} \Rightarrow \sqrt{12 + 2 \times (-2) + 1} = \sqrt{12 - 4 + 1} = \sqrt{9} = 3$

۱۷- گزینه «۲»

$-1 < a < 0 \Rightarrow 0 < a^f < 1 \Rightarrow a^f < 1, 1 < b^f \Rightarrow a^f < b^f$
 $b > 1 \Rightarrow b^f > 1^f$

۱۸- گزینه «۱» $\frac{1-3x}{5} + \frac{(x-1)^2}{2} > \frac{x}{2} + \frac{(x+1)^2}{2} \Rightarrow \frac{1-3x}{5} + x^2 - 2x + 1 > \frac{x}{2} + x^2 + 2x + 1$

$\Rightarrow \frac{1-3x}{5} - 2x > \frac{x}{2} + 2x \Rightarrow 10 \left(\frac{1-3x}{5} - 2x \right) > 5x + 20x \Rightarrow 2 - 6x - 20x > 25x + 20x \Rightarrow 2 - 26x > 25x$
 $\Rightarrow -51x > -2 \Rightarrow x < \frac{2}{51}$

۱۹- گزینه «۳» برای حل سؤال یک دستگاه نامعادلات تشکیل می‌دهیم:

$\begin{cases} 2P+1 > 55 \Rightarrow 2P > 54 \Rightarrow P > \frac{54}{2} \Rightarrow P > 27 \quad (1) \\ 3P-2 < 85 \Rightarrow 3P < 87 \Rightarrow P < \frac{87}{3} \Rightarrow P < 29 \quad (2) \end{cases} \Rightarrow (1) \cap (2) \Rightarrow 27 < P < 29$

توجه داشته باشید که تنها عدد طبیعی بین ۲۷ و ۲۹ عدد ۲۸ است.

۲۰- گزینه «۳» برای پاسخ به سؤال ابتدا دستگاه نامعادله را به دو نامعادله جدا تقسیم می‌کنیم:

$\begin{cases} 2x-2 \leq x-1 \Rightarrow 2x-x \leq -1+2 \Rightarrow x \leq 1 \quad (1) \\ 3x-3 < 2x-2 \Rightarrow 3x-2x < -2+3 \Rightarrow x < 1 \quad (2) \end{cases} \Rightarrow (1) \cap (2) \Rightarrow x < 1$

توجه: حالا با توجه به درصد پاسخگویی خود در بسته تمرین ۱، از روی یکی از نردبان‌های «نقشه راه دانش‌آموز» انتهای کتاب حرکت کرده تا خود را به خانه جدید برسانید و بعد از آن مطابق دستور العمل آورده شده در آن خانه عمل کنید. توجه کنید که در صورت ورود به بسته تمرین ۲ باز هم باید مطابق دستور العمل‌های این نقشه عمل کنید. توجه شود که سؤالات متناظر با هر سؤال در هر بسته تمرین در جدولی که در ابتدای پاسخنامه هر بسته تمرین آمده است، مشخص شده است.