بسم الله الرحمن الرحیم

برگی از درخت المپیاد ریاضی

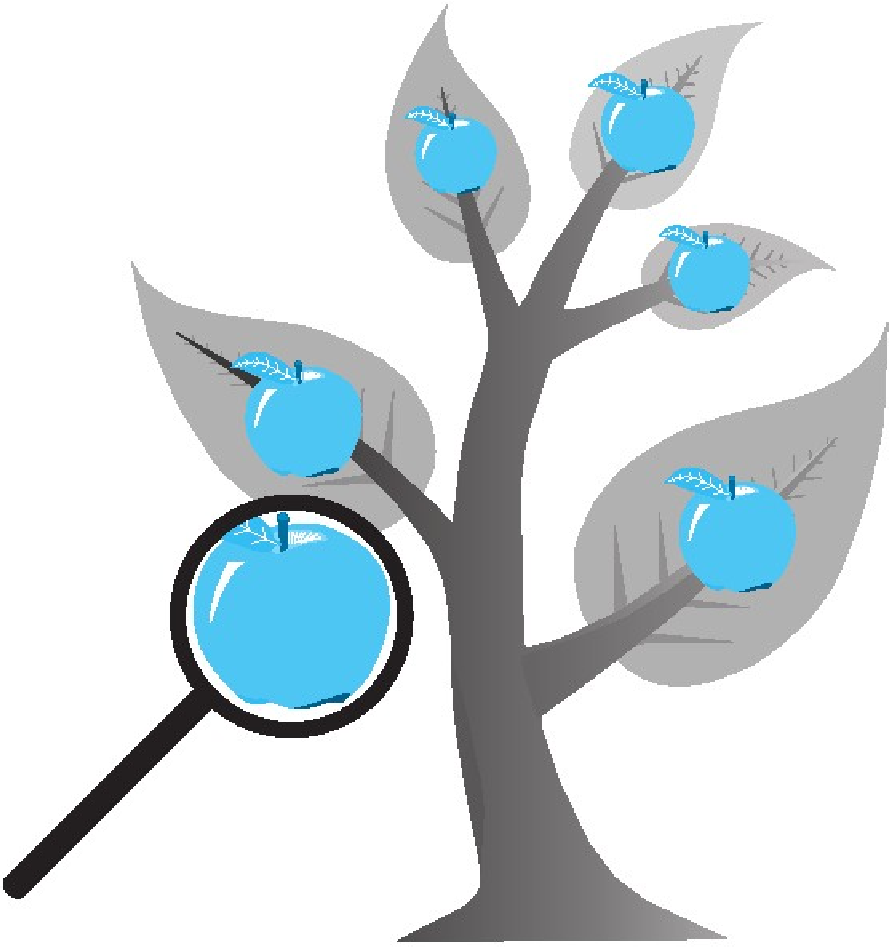
المپیاد ریاضی ایران

۱۱ آزمون

برای داوطلبان مرحله دوم المپیاد ریاضی

مؤلفین محمد جعفری
بردیا عزیزیان
حمید معظمی

انتشارات خوشخوان



درخت المپیاد درختی است که توسط انتشارات خوشخوان کاشته شده و هریک از کتاب‌های این پروژه برگی از آن است.

وظیفه‌ی ما نگهداری و آبیاری این درخت است. امیدواریم با عنایات حضرت حق این درخت، تنومند شده و به بار واقعی بنشیند.

فراموش نکنید که بار و میوه‌ی این درخت شما عزیزان می‌باشید.

التماس دعا

پروژه‌ی درخت المپیاد

اعتقاد بر این است که شروع فعالیت‌های المپیاد به صورت حرفه‌ای، باید از ابتدای دوره‌ی دبیرستان شروع شود. اکثر المپیادهای علمی در زمستان سال سوم دبیرستان تعیین تکلیف می‌شوند. بنابراین از شروع دبیرستان تا اواسط سال سوم حدوداً ۸ ترم تحصیلی می‌شود (با احتساب فصل و ترم تابستان) که لازم است برنامه‌ریزی دقیقی برای این چند ترم انجام شود.

انتشارات خوشخوان این برنامه‌ریزی را در قالب پروژه‌ی درخت المپیاد انجام داده است که هر شاخه از درخت، مبحثی از آن المپیاد و هر برگ از آن شاخه شماره‌ای از آن مبحث می‌باشد.

به عنوان مثال اپتیک(۱) کتابی است که در یک ترم تحصیلی در یک کلاس ممتاز می‌توان برای داوطلبان المپیاد فیزیک تدریس کرد.

با عنایات حضرت حق و با کمک تنی چند از همکاران گرامی کتب مربوط به این درخت در هر رشته‌ای از المپیاد معرفی خواهد شد.

منتظر پیشنهادات و نظرات شما سروران هستیم.

گروه المپیاد

انتشارات خوشخوان

مسابقه ها، کنکورها و المپیادهای علمی همایش هایی هستند که کم وبیش در سرتاسر دنیای پهناور به صورت داخلی وبین المللی برگزارمی شود وسال به سال به تنوع، جذبه وعظمت آن ها افزوده می شود. یکی ازاین همایش های باشکوه که هرسال درچندین رشته درسطح دانش آموزان سنوات آخر دوره متوسطه برگزارمی شود المپیادهای علمی می باشد که قدیمی ترین آن المپیاد ریاضی بوده و ازسال ۱۹۵۹ آغاز و تا به حال ادامه داشته است.

در حال حاضر نتیجه ی کسب شده در المپیادهای علمی برای هر کشوری یکی از شاخص های قدرت علمی آن کشور محسوب شده و نفرات ممتاز این المپیادها به راحتی جذب دانشگاه ها وآکادمی های ممتاز جهان شده وپس ازگذشت سنواتی چند به موفقیت های چشم گیری نایل می شوند چنانچه بسیاری از دانشمندان حال حاضر در رشته های مختلف از جمله شیمی، فیزیک، IT و ... در سال های نه چندان دور از مدال آوران این المپیادها بوده اند.

جمهوری اسلامی ایران برای اولین باردر سال ۱۳۶۶ در المپیاد ریاضی جهان که در کشور کوبا برگزار می شد شرکت کرده و باکسب یک مدال برنز به مقام ۲۶ جهان نائل آمد که تعجب همگان را برانگیخت چراکه درآن سال ایران درگیرجنگ تحمیلی بوده و جهانیان به غیر از جنگ و درگیری چیزی از ایران سراغ نداشتند و درخشش دانش آموزان ایران درآن سال و سنوات بعد نگاه ها را به سمت ایران معطوف کرده وچشم خفته آن ها را تا حدود زیادی بیدار کرد. همانطورکه از رسانه های گروهی مطلع شده اید درتمام المپیادهای علمی تیم اعزامی کشورعزیزمان درسنوات گذشته جزء کشورهای برتر بوده وضمن کسب مدال های رنگارنگ رتبه های بسیار درخشانی ازجمله رتبه اول را حائز شده اند.

نحوه گزینش نفرات اعزامی به المپیادهای جهانی تا حدود زیادی مشابه یکدیگرند به این صورت که در ابتدا درمسابقه ای سراسری تحت عنوان مرحله اول که معمولاً به صورت پرسش های چندگزینه ای مطرح می شود حدوداً هزار نفر پذیرفته شده و در رقابتی معمولاً تشریحی که مرحله ی دوم نامیده می شود شرکت می کنند. دراین مرحله در هر رشته حدوداً چهل نفر پذیرفته شده و در دوره ی تابستانی درباشگاه دانش پژوهان جوان که متولی برگزاری تمام المپیاد های علمی می باشد شرکت کرده و پس ازگذراندن این دوره مرحله ی سوم آزمون برگزار شده و عده ای (در حدود ده نفر) مدال طلا، عده ای مدال نقره و عده ای دیگر مدال برنز

کسب می کنند (در این مرحله معمولاً همه‌ی افراد شرکت کننده در دوره مدال کسب می کنند) دارندگان مدال طلا حدود یک سال در آن باشگاه آموزش دیده و پس از آن اعضاء تیم اعزامی شناسایی می شوند. دارندگان مدال طلا همگی بدون کنکور و در رشته و دانشگاه دلخواه خود پذیرفته شده و ادامه ی تحصیل می دهند اما دارندگان مدال های نقره و برنز همانند سایر داوطلبان در کنکور سراسری شرکت کرده و برای کسب رتبه دلخواه جهت پذیرفته شدن در رشته و دانشگاه مورد علاقه خود درقابت می کنند با این تفاوت که این افراد سهمیه‌ی ویژه ای در پذیرفته شدن در رشته و دانشگاه مورد علاقه ی خود دارند که جزئیات آن در سایت باشگاه دانش پژوهان جوان تشریح شده است.

متاسفانه در سال های اخیر در بعضی از مدارس افرادی مثلاً لباس کارشناسی به تن کرده و علیه فعالیت های المپیاد جبهه می گیرند و ادعا می کنند فعالیت برای المپیادهای علمی مانع موفقیت در کنکور سراسری بوده و هرچه دانش آموز به سمت المپیاد سوق پیدا کند از کنکور فاصله گرفته و در صورت عدم کسب مدال طلا (که بسیار محتمل است) آینده ی خود را تباه کرده است درحالی که با تحقیقی که در سال های گذشته انجام شده است فعالیت در زمینه المپیادهای علمی نه تنها مانع فعالیت برای کنکور نیست بلکه مسیر فعالیت برای کسب رتبه مناسب در کنکور را بسیار هموارتر می سازد به عنوان مثال می توانید تمام مدال آوران نقره و برنز و یا حتی آن هایی که در مرحله اول پذیرفته شده ولی به دوره تابستانی راه پیدا نکرده اند را در یک رشته شناسایی کرده و موفقیت های تحصیلی آن ها را در دانشگاه ها جو یا شوید که نگارنده ی این متن بارها این تحقیق را انجام داده و به مثبت بودن آن یقین پیدا کرده است.

به هرحال ادعا این است که فعالیت دانش آموز در یک رشته از رشته های المپیاد فواید بسیاری دارد که به تعدادی از آن ها به صورت گذرا اشاره می شود:

۱. همان طور که خداوند به بشر تن سالم داده و انتظار می رود با ورزش ها و نرمش های مناسب از این نعمت خدادادی محافظت شود به هردانش آموزی نیز استعدادی داده است که باید شکوفا و بهره ور شود. اغلب باشگاه های کشور اعم از خصوصی و دولتی داوطلب زیادی در رشته های متفاوت ورزشی دارند که مشغول فعالیت در یکی از رشته های ورزشی مانند کشتی، تکواندو، بدن سازی و ... می باشند که وقتی از آن افراد راجع به اهدافشان از این فعالیت سوال می شود سالم نگه داشتن بدن را عنوان داشته و انتخاب شدن در تیم ملی را در نهایت عنوان می کنند.چه بسا افرادی که در این رشته ها فعالیت می کنند و هرگز به تیم ملی راه پیدا

نمی کنند که وقتی ازاین افراد راجع به موفقیت هایشان سوال می شود هرگزخود را ناموفق معرفی نمی کنند و همین که توانسته اند از بدن سالم خود به روش مناسب محافظت کنند را پیروزی بزرگی می دانند بنابرین فعالیت دریکی اززمینه های المپیاد چه در نهایت به کسب مدال منجر شود و یا نشود همین که استعداد خدادادی پرورش می یابد موفقیتی است بس بزرگ.

۲. کتب درسی به اذعان اکثر کارشناس ها و اساتید سال به سال ساده تر شده و برای عموم دانش آموزان دلچسب هستند ولی برای دانش آموزان ممتاز و تیزهوش به هیچ عنوان اغنا کننده نمی باشند لذا لازم است این سری ازدانش آموزان فعالیت ویژه ای را در رشته ی مورد علاقه ی خود داشته باشند تا احساس کنند این فعالیت ها برای آن ها اغنا کننده است.

۳. فعالیت های المپیادی که درنهایت به حل سوالات پیچیده و عمیق در رشته ی مربوطه می شود باعث می شود تا فرد به تمام مسائل جامعه و پیش آمده درزندگی به دید یک مسئله ی المپیاد نگاه کرده و در حل آن نسبت به سایر رقبا موفق تر باشند. تحقیقات نشان می دهد افرادی که با علاقه و اشتیاق حداقل یکی ازشاخه های المپیاد را دنبال می کنند (نه به نیت کسب مدال بلکه به نیت پرورش ذهن) نسبت به سایر افراد در زندگی موفق ترند.

۴. زیربنای اکثر دروس پیش دانشگاهی در دروس المپیاد بنا نهاده می شود بنابرین افرادی که به سبک المپیادی دروس خود را مطالعه می کنند در دوره پیش دانشگاهی با پایه ی بسیار قوی تری با دروس مواجه می شوند و نسبت به رقبای خود راحت تر ازعهده آن ها برمی آیند.

۵. با توجه به مصوبه های موجود، کسب مدال دریکی ازالمپیاد های علمی(حتی مدال برنز) باعث اعطای امتیازهای ویژه ای برای داوطلبان کنکور در ورود به دانشگاه های سراسری می شود که جزئیات آن درسایت های معتبرمخصوصاً سایت باشگاه دانش پژوهان جوان موجود است.

٦. همچنین با توجه به مصوبه های موجود اکثر داوطلبان المپیادها به عضویت نهادهای مختلف ازجمله بنیاد ملی نخبگان درمی آیند که با رجوع به سایت های مرتبط با این نهادها و بنیادها امتیازات تعلق یافته به اعضاء را مشاهده خواهید کرد.

انتشارات خوشخوان مفتخر است از بدو تاسیس به فکر تدوین و تالیف منابعی مناسب برای دانش آموزان ممتاز و داوطلبان المپیاد بوده است که خوشبختانه با یاری خداوند متعال و با بهره گیری از اساتید مجربی که خود در سنواتی نه چندان دور مدال آوریکی از المپیادهای علمی بوده اند، کتب متعددی به بازار عرضه شده است که مورد توجه داوطلبان قرار گرفته است. بعد از کسب تجربیات لازم به این نتیجه رسیده ایم که لازم است کتبی به صورت کار تدوین و تالیف شود که در آن هر کتاب مخصوص یک ترم تحصیلی باشد. این پروژه به نام درخت المپیاد نام گرفته است و هر کتاب از این پروژه که در اختیار دارید برگی از آن درخت خواهد بود.

بدیهی است انجام چنین پروژه ی عظیمی نظر و همت دسته جمعی می طلبد لذا لازم است از تمام دوستان و همکارانی که ما را در انجام این پروژه یاری نموده اند، تشکر و قدردانی می نمایم و در نهایت نیز از عوامل زحمت کش انتشارات اعم از مشاورین، حروف چین ها، طراحان و کارمندان و کارگران عزیز کمال امتنان را دارم.

با تشکر
رسول حاجی زاده مدیر انتشارات خوشخوان

مقدمه مؤلفین

به نام یزدان پاک

با توجه به نیاز دانش‌پژوهان آزمون‌های آزمایشی جهت آمادگی برای شرکت در آزمون مرحله‌ی دوم المپیاد ریاضی بر آن شدیم در این راستا قدمی برداریم. امیدواریم این اثر بتواند تا حدی خلاء موجود در این زمینه را برطرف نماید.

ساختار آزمون‌ها

آزمون‌های مرحله‌ی دوم ریاضی کشوری در دو روز برگزار می‌گردد. آزمون هر روز شامل سه سؤال و زمان ۲۷۰ دقیقه می‌باشد. درجه‌ی سختی سؤالات هر روز معمولاً از ساده به سخت است. روال بر این است که در شش سؤال مطرح شده، ۲ سؤال ترکیبیات، ۲ سؤال هندسه، ۱ سؤال جبر و ۱ سؤال نظریه اعداد باشد. در ضمن هر سؤال دارای ۷ نمره می‌باشد و نمره‌ی قبولی آزمون‌ها معمولاً بین ۲۳ تا ۲۸ می‌باشد. اما ساختار ذکر شده در مواردی رعایت نشده است. به عنوان مثال در آزمون دوره ۲۷ام (سال ۱۳۸۸) آزمون شامل ۳ سؤال ترکیبیات و ۱ سؤال هندسه بود. همچنین در این آزمون ترتیب سختی سؤالات در روز اول رعایت نشده بود و نمره‌ی قبولی این آزمون به ۲۱ رسید. به عنوان مثالی دیگر، در دوره‌ی ۲۸ام (سال ۱۳۸۹) سؤالات نسبت به سال‌های دیگر بسیار ساده‌تر بود و نمره‌ی قبولی به ۳۵ رسید.
ما سعی بر آن داشتیم که در عین رعایت ساختار عمومی آزمون‌های مرحله‌ی دوم ریاضی کشوری استثناهایی از این دست را نیز در محتوی آزمون‌های این کتاب لحاظ نماییم، تا دانش‌پژوهان بتوانند با آزمون‌های متنوع و متناسب با آزمون‌های مرحله دوم آشنا شوند.

نحوه‌ی آزمون دادن

سعی کنید هر آزمون را در دو روز متوالی و در زمان تعیین شده (آزمون هر روز ۲۷۰ دقیقه) بدهید. همچنین سعی نمایید شرایط یک آزمون رسمی را برای خود فراهم نمایید.

آنالیز آزمون‌ها

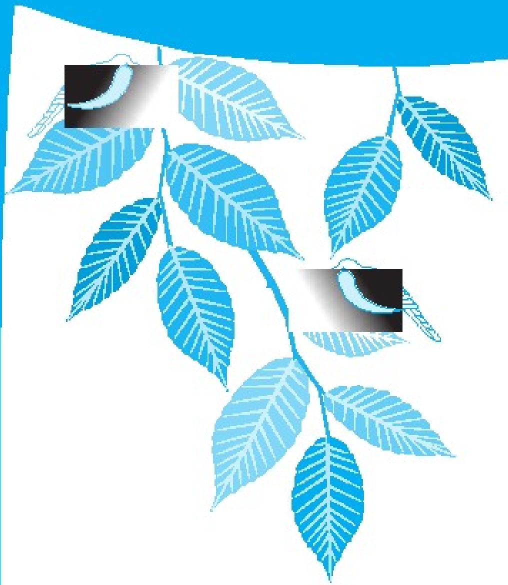
در انتهای هر آزمون جدولی شامل پیش‌بینی نمره‌ی قبولی آزمون، میانگین نمره‌ی ۱۰۰ نفر اول برای هر سؤال و تعداد افرادی از آنها که نمره‌ی کامل سؤال را می‌گیرند آورده‌ایم. در پیش‌بینی‌های انجام شده از تجربیات به‌دست آمده از آزمون‌های مرحله‌ی دوم بهره برده‌ایم تا پیش‌بینی‌ها به واقعیت نزدیک‌تر باشد.

سخن آخر

از آنجا که این اثر خالی از اشکال نخواهد بود، از تمام مخاطبان عزیز تقاضا داریم پیشنهادات و انتقادات خود را به پست الکترونیکی **mohamad.jafari66@yahoo.com** ارسال نمایید.
از تمامی عزیزانی که ما را در خلق این اثر یاری نمودند سپاسگزاریم.

بهار ۱۳۹۱

فهرست



آزمون ۱

- روز اول
- روز دوم
- حل آزمون
- آنالیز آزمون

روز اول زمان: ۲۷۰ دقیقه

۱ ثابت کنید برای هر p که عددی اول است، $۱۰^p + ۱۱^p$ نمی‌تواند توان nام یک عدد طبیعی باشد. $(n \geq ۲)$

۲ عمو نقاش در اقدامی بی‌سابقه تصمیم به رنگ‌آمیزی نقاطی از فضا با مختصات صحیح می‌گیرد. او در هر گام یک دسته ۲۷تایی از نقاط با مختصات صحیح که تشکیل یک مکعب $۲ \times ۲ \times ۲$ می‌دهند، انتخاب می‌کند و آن نقاط را رنگ می‌کند (هر ضلع این مکعب شامل ۳ نقطه است). ثابت کنید در یک رنگ‌آمیزی که شامل ۲۰۱۱ گام است، نقطه‌ای از فضا وجود دارد که فردبار رنگ شده است.

۳ مثلث حاده‌الزاویه ABC به مرکز ارتفاعی H مفروض است. CH، AB را در D قطع می‌کند و K قرینه‌ی H نسبت به AB می‌باشد. پای عمودهای وارد از D بر AC ، BC و AK به ترتیب Q، R و P می‌باشد. ثابت کنید قرینه‌ی وسط AC نسبت به مرکز دایره‌ی محیطی $\overset{\triangle}{PQR}$ روی BK قرار دارد.

روز دوم زمان: ۲۷۰ دقیقه

۴ تمام چندجمله‌ای‌های $P(x)$ با ضرایب حقیقی را بیابید که به ازای هر x حقیقی داشته باشیم:

$$xP(x).P(x+۱) = xP(x^۲) + (۱+x^۲)P(x)$$

۵ مثلث حاده‌الزاویه ABC به مرکز ارتفاعی H مفروض است. AH، BH و CH اضلاع مقابل‌شان را به ترتیب در D، E و F قطع می‌کنند. M وسط BC و K پای عمود وارد از A بر EF می‌باشد. ثابت کنید: $M\hat{H}A = D\hat{K}A$.

۶ n نقطه در صفحه قرار دارد که هیچ سه‌تایی هم‌خط نیستند. از میان پاره‌خط‌های واصل میان این n نقطه، mتا را انتخاب می‌کنیم. ثابت کنید از میان این m پاره‌خط حداقل $\lceil \frac{۲m}{n} \rceil$ پاره‌خط وجود دارد که در شرط‌های زیر صدق می‌کند:

الف) این پاره‌خط‌ها یک مسیر پیوسته تشکیل دهند (یعنی انتهای هر یک ابتدای دیگری باشد غیر از پاره‌خط انتهایی).

ب) با شروع از اولین پاره‌خط مسیر و حرکت به سمت آخر روی این پاره‌خط‌ها، طول آن‌ها یک دنباله‌ی صعودی تشکیل دهد.

حل آزمون

حل آزمون ۱

۱ می‌توانید ثابت کنید برای $p = ۲$ و $p = ۳$ حکم مسأله برقرار است. بنابراین مسأله را برای $p \geq ۵$ حل می‌کنیم. در این صورت p به فرم $۶k \pm ۱$ می‌باشد. دو حالت زیر را در نظر بگیرید:

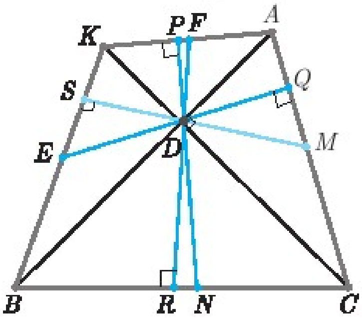
$$(۱) \; : \; p = ۶k + ۱ \; \Rightarrow \; ۱۱^p + ۱۰^p \overset{۹}{\equiv} ۲^p + ۱ \overset{۹}{\equiv} ۶۴^k \times ۲ + ۱ \overset{۹}{\equiv} ۳$$

$$(۲) \; : \; p = ۶k + ۵ \; \Rightarrow \; ۱۱^p + ۱۰^p \overset{۹}{\equiv} ۲^p + ۱ \overset{۹}{\equiv} ۶۴^k \times ۳۲ + ۱ \overset{۹}{\equiv} -۳$$

پس بنابراین $۱۱^p + ۱۰^p$ به فرم $۹t \pm ۳$ می‌باشد در نتیجه توان عدد ۳ در تجزیه‌ی این عدد به عوامل اول برابر ۱ می‌شود پس $۱۱^p + ۱۰^p$ هیچ‌گاه توان nام یک عدد طبیعی نمی‌شود.

۲ مؤلفه‌های مختصات را اگر به پیمانه‌ی ۳ در نظر بگیریم هر مکعب که انتخاب می‌شود لزوماً تمام ۲۷ حالت مختصات یک نقطه را در پیمانه‌ی ۳ می‌پوشاند. چون تعداد گام‌ها ۲۰۱۱ یعنی فرد است پس حتماً حالتی از ۲۷ حالت آمده که دقیقاً فردبار رنگ‌آمیزی شده است. در میان نقاطی که حالت آن‌ها (یعنی مختصات‌شان در پیمانه‌ی ۳) با آن‌که فردبار رنگ‌آمیزی شده است یکسان است، حتماً یکی هست که فردبار رنگ شده است یعنی بر فرض اگر حالت $(۰, ۲, ۱)$ فردبار رنگ شده باشد یکی از نقاطی که مختصاتش به پیمانه‌ی ۳، $(۰, ۲, ۱)$ می‌شود فردبار رنگ شده است چرا که در غیر این صورت اگر تمام نقاط زوج‌بار رنگ شده باشد، کلاً حالت $(۰, ۲, ۱)$ هم زوج‌بار رنگ شده است.

۳ قرینه‌ی H نسبت به AB روی دایره‌ی محیطی $\overset{\triangle}{ABC}$ است. بنابراین $AKBC$ محاطی است. داریم:



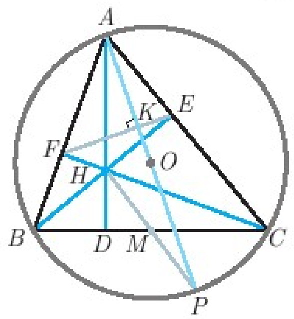
N وسط BC است. $C\hat{D}N = P\hat{D}K = ۹۰^\circ - A\hat{K}D = K\hat{A}D = D\hat{C}B \; \Rightarrow$

به همین ترتیب M، E و F اوساط اضلاع چهارضلعی $AKBC$اند. می‌دانیم اوساط اضلاع یک چهارضلعی تشکیل یک متوازی‌الاضلاع می‌دهند. اما با توجه به این‌که قطرهای $AKBC$ برهم عمودند پس $MNEF$ مستطیل است. با توجه به شکل P و R روی دایره‌ای به قطر FN قرار دارند. اما دایره‌ی

به قطر FN همان دایره‌ی محیطی مستطیل $MNEF$ است و چون $E\hat{Q}M = M\hat{S}E = ۹۰^\circ$، Q و S هم روی این دایره قرار دارند. بنابراین مرکز دایره‌ی محیطی $\overset{\triangle}{PQR}$ همان مرکز مستطیل $MNEF$ است که قرینه‌ی M نسبت به آن همان E است که روی BK قرار دارد.

۴ اگر $P(x)$ چندجمله‌ای باشد که کمترین درجه‌ی جملات آن k باشد و کمترین درجه‌ی جملات $P(x+۱)$ برابر k' باشد، آنگاه کمترین درجه‌ی $xP(x).P(x+۱)$ برابر $k'+k+۱$ خواهد بود. از طرف دیگر کمترین درجه‌ی سمت راست تساوی برابر $k = \min(۲k+۱, k)$ خواهد بود. با توجه به اینکه $k < k'+k+۱$ است. بنابراین چنین چندجمله‌ای وجود ندارد.

۵ ابتدا واضح است که AK از O (مرکز دایره‌ی محیطی $\overset{\triangle}{ABC}$) می‌گذرد زیرا $C\hat{A}K = ۹۰^\circ - \hat{B}$. از طرفی می‌دانیم MH و OA یکدیگر را در P روی دایره‌ی محیطی قطع می‌کنند زیرا $OM \| AH$، $OM = \frac{۱}{۲}AH$ و $OA = OP$. برای اثبات حکم مسأله کافی است ثابت کنیم $D\hat{K}P = D\hat{H}P$ یعنی $HKPD$ باید محاطی باشد. داریم:



$$A\hat{F}E = \hat{C} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = A\hat{P}B \Rightarrow \text{محاطی } BFKP$$

$$\Rightarrow AF.AB = AK.AP \qquad (I)$$

$$\text{محاطی } BFHD \Rightarrow AF.AB = AH.AD \overset{(I)}{\Rightarrow} AH.AD = AK.AP$$

$$\Rightarrow \text{محاطی } HKPD$$

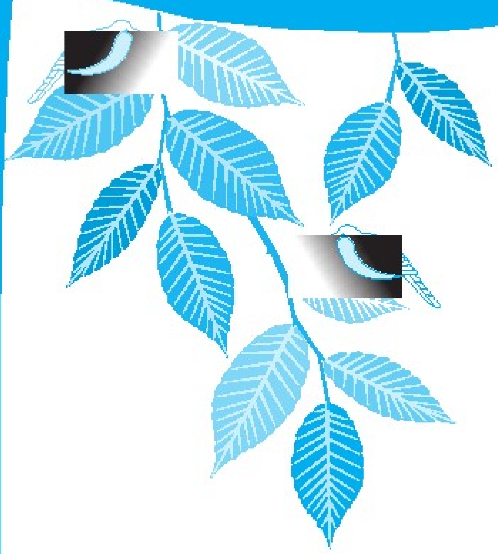
۶ روی هر یک از n نقطه یک رهنورد قرار می‌دهیم. عمل انتخاب یک پاره‌خط را جابه‌جا شدن رهنوردهای دو سر آن پاره‌خط در نظر بگیرید. حال این m پاره‌خط را به ترتیب طول از کم به زیاد انتخاب می‌کنیم. در این صورت $۲m$ حرکت رهنورد داریم. پس حداقل $\lceil \frac{۲m}{n} \rceil$ از این حرکت‌ها متعلق به یک رهنور است (اصل لانه کبوتر). این رهنورد مسیر مطلوب ما را پیموده است.

آنالیز آزمون ۱

شماره سؤال	پیش‌بینی میانگین نمره ۱۰۰ نفر برتر	پیش‌بینی تعداد افراد بین ۱۰۰ نفر برتر که نمره کامل مسئله را می‌گیرند
۱	۵/۵	۷۲ نفر
۲	۳/۵	۳۷ نفر
۳	۳/۵	۳۸ نفر
۴	۶	۸۲ نفر
۵	۴	۵۰ نفر
۶	۲	۱۷ نفر

پیش‌بینی نمره‌ی قبولی: ۲۸

❊ هر سؤال ۷ نمره دارد.



آزمون ۲

- روز اول
- روز دوم
- حل آزمون
- آنالیز آزمون

روز اول زمان: ۲۷۰ دقیقه

۱ معادله‌ی زیر برای $x \in (۱, \infty)$ چند جواب دارد؟

$$\frac{x}{۱+x} + x^{۲} = \frac{۱}{x^{۲}} + \frac{x}{x-۱}$$

۲ می‌دانیم در میان تمام اشکال با مساحت برابر دایره کمترین محیط را دارد و بنابراین از آنجایی که نسبت مساحت به مربع محیط در دایره برابر $\frac{۱}{۴\pi}$ است برای هر شکل دیگر این نسبت کوچک‌تر یا مساوی $\frac{۱}{۴\pi}$ است.

شکل روی صفحه مشبکه به شکلی می‌گوییم که در دستگاه مختصات فرضی رئوسی با مختصات صحیح و اضلاعی موازی با دو محور طول‌ها و عرض‌ها داشته باشد. در میان اشکال روی صفحه مشبکه بهترین عددی که می‌توان جایگزین $\frac{۱}{۴\pi}$ کرد چه عددی است و به ازای چه شکلی به‌دست می‌آید؟

۳ مثلث حاده‌الزاویه $\overset{\triangle}{ABC}$ به مرکز دایره‌ی محیطی O و مرکز دایره محاطی I و مرکز ارتفاعی H مفروض است. دایره‌ی محاطی $\overset{\triangle}{ABC}$، BC را در D قطع می‌کند. ثابت کنید اگر OI موازی BC باشد آن‌گاه HD موازی OA است.

روز دوم — زمان: ۲۷۰ دقیقه

۴ جناب آقای کلاسیفاید (Classified) 2^n چوق (وجه رایج کشور کلاسیفایدهای متحرک) را که کل دارایی او را تشکیل می‌دهد در تعدادی بانک پخش کرده است اما از کار خود پشیمان است و می‌خواهد تمام پول را به یک بانک انتقال دهد. عمل انتقال پول در کشور او به روش سحاب (سامانه‌ی حواله‌ی بین بانکی) صورت می‌گیرد. به این شکل که اگر او در دو بانک به ترتیب مبالغ a و b $(b \geq a)$ را داشته باشد پس از استفاده از سحاب به ترتیب مبالغ $2a$ و $b - a$ را در آن دو بانک دارد. همچنین او در هر بانک فقط یک حساب دارد. نشان دهید او می‌تواند به هدفش برسد. (n عددی طبیعی است.)

۵ چهارضلعی محاطی $ABCD$ به طوری که $AB = AD$ و $BC = CD$ مفروض است. M وسط AD می‌باشد. عمود وارد از C بر BM، AD را در P قطع می‌کند. ثابت کنید PB بر دایره‌ی محیطی $ABCD$ مماس است.

۶ تمام اعداد طبیعی را بیابید که $n^3 - n - 3$ مربع کامل شود.

حل آزمون

حل آزمون ۲

۱ می‌دانیم x^{2} و $\frac{x}{1+x}$ در بازه‌ی $(1,\infty)$ با افزایش x، افزایش می‌یابند. بنابراین تابع $f(x)=x^{2}+\frac{x}{1+x}$ در بازه‌ی $(1,\infty)$ اکیداً صعودی است. از طرف دیگر $\frac{1}{x^{2}}$ و $\frac{x}{x-1}$ نیز در بازه‌ی $(1,\infty)$ با افزایش x، کاهش می‌یابند. بنابراین تابع $g(x)=\frac{1}{x^{2}}+\frac{x}{x-1}$ در بازه‌ی $(1,\infty)$ اکیداً نزولی است. بنابراین $f(x)-g(x)$ نیز اکیداً صعودی خواهد بود. حال اگر $h(x)=f(x)-g(x)$ در نظر بگیریم، $h(x)$ در بازه‌ی مورد نظر پیوسته است (چرا؟) از طرفی داریم:

$$\begin{cases}\lim\limits_{x\to\infty} h(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to 1^{+}} h(x)=-\infty\end{cases}$$

پس $h(x)$ دقیقاً یک ریشه‌ی حقیقی در بازه‌ی مورد نظر دارد.

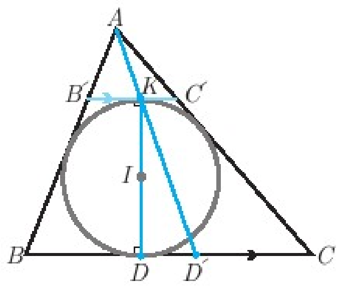
۲ فرض کنید F را در صفحه‌ی مشبکه داریم که نسبت مساحت به مربع محیطش ماکسیمم است. ادعا می‌کنیم F یکپارچه (متشکل از یک تکه) است زیرا در غیر این صورت یکی از تکه‌ها را به دیگری نزدیک می‌کنیم تا هم‌مرز شوند. در این صورت با حفظ مساحت، محیط کاهش می‌یابد که خلاف فرضی است که کرده بودیم.

مینیمم و ماکسیمم طول رئوس F را در صفحه‌ی مشبکه (با مختصات بندی)، x_{0} و x_{1} در نظر بگیرید. چون F یکپارچه است مرزهای آن حداقل $(x_{1}-x_{0})$ ۲ یال افقی دارد زیرا اگر روی محیط F دور بزنیم یک بار از سمت چپ‌ترین نقطه F به سمت راست‌ترین نقطه‌ی آن می‌رویم و باز می‌گردیم.

با استدلال مشابه برای عرض F نتیجه می‌شود مرز آن حداقل $2(y_{1}-y_{0})$ یال عمودی دارد. فرض کنید $w=x_{1}-x_{0}$ و $h=y_{1}-y_{0}$. محیط F حداقل $2w+2h$ است. از طرفی F در مستطیلی با اضلاع w و h قرار می‌گیرد. پس مساحت آن نابزرگ‌تر از wh است. پس نسبت مذکور حداکثر $\frac{wh}{4(w+h)^{2}}$ است. طبق نامساوی حسابی ـ هندسی $(w+h\geq 2\sqrt{wh})$ کسر مذکور نابزرگ‌تر از $\frac{1}{16}$ است. تساوی (طبق حالت تساوی حسابی ـ هندسی) زمانی رخ می‌دهد که $w=h$ باشد، یعنی F مربع باشد.

۳ لم: ID دایره‌ی محاطی را برای بار دوم در K و AK، BC را در D' قطع می‌کند.

آن‌گاه $BD = CD'$.

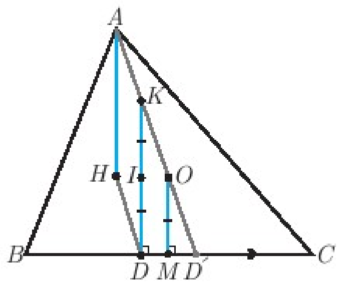


اثبات: مماس در K بر دایره‌ی محاطی موازی BC است. چون $\overset{\triangle}{ABC} \sim \overset{\triangle}{AB'C'}$ و دایره‌ی محاطی داخلی $\overset{\triangle}{ABC}$ نقش دایره‌ی محاطی خارجی نظیر رأس A را برای مثلث $AB'C'$ دارد، بنابراین AK، BC را در محل برخورد آن با دایره‌ی محاطی خارجی نظیر رأس A برای مثلث ABC، قطع می‌کند، که در این صورت می‌دانیم $CD' = BD = \frac{AB + BC - AC}{۲}$.

حل مسأله: D' نقطه‌ای روی BC است که $MD = MD'$ (M وسط BC است).

$OI \| BC$ در نتیجه $OMDI$ مستطیل است پس $OM = DI$. داریم:

$$\left.\begin{array}{l} OM = \frac{۱}{۲}DK \\ OM \| DK \\ MD = MD' \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \text{همخط‌اند.} \ D' \ \text{و} \ O \ \text{،} K$$



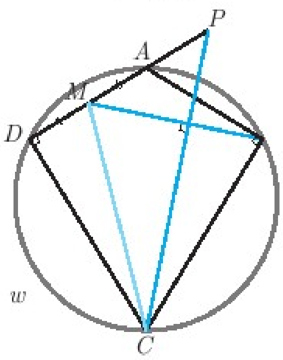
اما طبق لم ذکر شده می‌دانیم A، K و D' همخط‌اند پس می‌توان نتیجه گرفت A، K و O همخط‌اند.

$$OM = \frac{۱}{۲}AH \Rightarrow KD = AH \Rightarrow AKDH \ \text{متوازی‌الاضلاع}$$

$$\Rightarrow AK \| DH \Rightarrow HD \| OA$$

۴ با توجه به این‌که کل موجودی زوج است پس تعداد حساب‌ها با موجودی فرد، زوج است. سحاب را روی جفت حساب‌های فرد اعمال می‌کنیم و با توجه به این‌که سحاب موجودی‌ها را زوج می‌کند تمام حساب‌های فرد به حساب‌هایی با موجودی زوج تبدیل می‌شوند. حال با استفاده از استقرا ثابت می‌کنیم آقای کلاسیفاید به هدف خود می‌رسد. پایه‌ی استقرا واضح است. فرض کنید حکم برای $n = k$ درست باشد. درستی آن را برای $n = k + ۱$ نتیجه می‌گیریم. با توجه به آنچه گفته شد موجودی تمام حساب‌ها زوج می‌شود. حال هر ۲ چوق را یک بسته در نظر بگیرید. ۲^k بسته داریم که سحاب روی آن‌ها قابل اجراست. لذا طبق فرض استقرا حکم درست و اثبات کامل است.

۵ ابتدا واضح است که $\hat{B} = \hat{D} = ۹۰^\circ$. فرض کنید $AM = x$ و $AP = y$. داریم:



$$PC \perp BM \;\Rightarrow\; PM^۲ - PB^۲ = MC^۲ - BC^۲$$
$$\xRightarrow{BC=CD}\; PM^۲ - PB^۲ = MC^۲ - CD^۲$$
$$\xRightarrow{\hat{D}=۹۰^\circ}\; (x+y)^۲ - PB^۲ = MD^۲ = x^۲$$
$$\Rightarrow\; PB^۲ = (x+y)^۲ - x^۲ = y(y+۲x) = AP.PD = p_w^p$$
$$\Rightarrow \quad PB \text{ بر دایره مماس است}$$

۶ فرض کنید m وجود داشته باشد که: $n^۳ - n - ۳ = m^۲$. با توجه به این‌که $n^۳ - n$ زوج است پس $m^۲$ عددی فرد است، بنابراین $m^۲ \overset{۸}{\equiv} ۱$ پس داریم:

$$n^۳ - n \overset{۸}{\equiv} ۴ \;\Rightarrow\; n \overset{۸}{\equiv} ۴ \qquad (I)$$
$$n^۳ - n - ۳ = m^۲ \;\Rightarrow\; n^۳ - n + ۶ = m^۲ + ۹$$
$$\Rightarrow (n+۲)(n^۲ - ۲n + ۴) - (n+۲) = m^۲ + ۹$$
$$\Rightarrow (n+۲)(n^۲ - ۲n + ۳) = m^۲ + ۹$$

با توجه به (I)، $n+\text{۲}$ به فرم $\text{۸}k+\text{۶}$ و $n^{\text{۲}}-\text{۲}n+\text{۳}$ به فرم $\text{۸}k+\text{۳}$ می‌باشد. بنابراین هر دو پرانتز عامل اولی به فرم $\text{۴}k+\text{۳}$ دارند (چرا؟). از آنجایی که هر دو عدد $n+\text{۲}$ و $n^{\text{۲}}-\text{۲}n+\text{۳}$ همزمان نمی‌توانند بر ۳ بخش‌پذیر باشند پس حداقل یکی از دو عامل اولی که به فرم $\text{۴}k+\text{۳}$ هستند غیر ۳ می‌باشد. فرض کنید این عامل p باشد. داریم:

$$p|(n+\text{۲})(n^{\text{۲}}-\text{۲}n+\text{۳}) \Rightarrow \left.\begin{array}{l} p|m^{\text{۲}}+\text{۹} \\ p\overset{\text{۴}}{\equiv}\text{۳} \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} p|m \\ p|\text{۳} \end{cases} \clubsuit$$

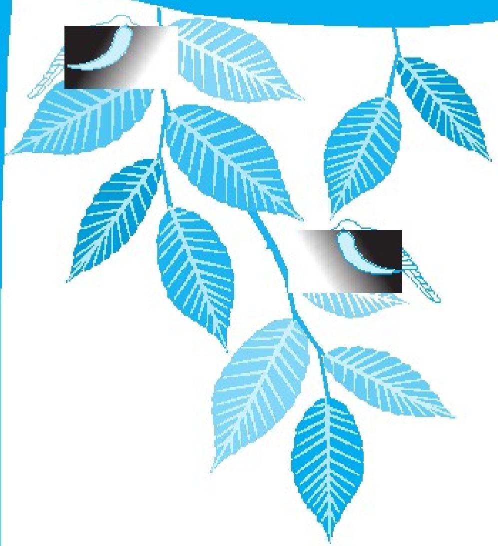
بنابراین $n^{\text{۳}}-n-\text{۳}$ هیچ‌گاه مربع کامل نمی‌شود.

آنالیز آزمون ۲

شماره سؤال	پیش‌بینی میانگین نمره ۱۰۰ نفر برتر	پیش‌بینی تعداد افراد بین ۱۰۰ نفر برتر که نمره کامل مسئله را می‌گیرند
۱	۵/۵	۷۲ نفر
۲	۳/۵	۴۰ نفر
۳	۳/۵	۳۵ نفر
۴	۵	۶۰ نفر
۵	۴/۵	۵۵ نفر
۶	۲/۵	۲۲ نفر

پیش‌بینی نمره‌ی قبولی: ۳۰

❊ هر سؤال ۷ نمره دارد.



آزمون ۳

- روز اول
- روز دوم
- حل آزمون
- آنالیز آزمون

روز اول زمان: ۲۷۰ دقیقه

۱ همه‌ی اعداد x و y را بیابید که $x,y \in \mathbb{Z}$ و $۲۰۱۳x^{۲} = ۱۳۹۱y^{۲} + ۱$. ($\mathbb{Z}$ مجموعه‌ی اعداد صحیح است)

۲ مثلث حاده‌الزاویه ABC با دایره‌ی محیطی C به مرکز O مفروض است. فرض کنید دایره‌ی ω به مرکز S که در A بر دایره‌ی C و در D بر BC مماس است، اضلاع AB و AC را به ترتیب در E و F قطع می‌کند. AS و ES، ω را برای بار دوم به ترتیب در I و G قطع می‌کنند و همچنین OB، IG را در H قطع می‌کند. ثابت کنید: $GH = \frac{DF^{۲}}{AF}$.

۳ در هر یک از خانه‌های جدولی $m \times n$ $(m,n \in \mathbb{N})$ یک مهره قرار دارد که یک روی آن سیاه و روی دیگر آن سفید است. در ابتدا روی سفید تمام مهره‌ها غیر از مهره گوشه‌ی بالا و چپ معلوم است (بالطبع مهره‌ی گوشه‌ی مذکور دارای روی سیاه است). در هر گام یک مهره‌ی با روی سیاه برداشته می‌شود و تمام مهره‌های همسایه (در خانه‌هایی مشترک در یک ضلع) تغییر وضعیت می‌دهند. تمام دوتایی‌های (m,n) را بیابید که بتوان تمام مهره‌های جدول را برداشت.