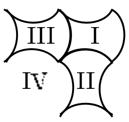
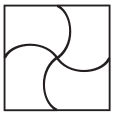
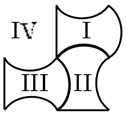
فصل ۴

مسئله‌های کاشی‌کاری





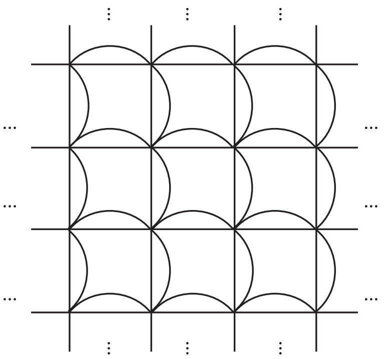


۴-۱ گزینه‌ی (ه). راه اول. در مورد کاشی نوع ۱، فرض کنید nامین کاشی در حرکت nام باید روی صفحه قرارگیرد. اما در حرکت چهارم نمی‌توانیم کاشی نوع ۱ قرار دهیم.

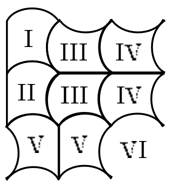
در مورد کاشی نوع ۲، با چهار تا کاشی نوع ۲ می‌توان مربعی ۲ × ۲ را پر کرد. سپس با مربع ۲ × ۲ به راحتی می‌توان صفحه را فرش کرد.

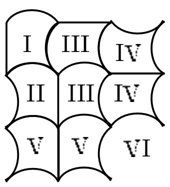
در مورد کاشی نوع ۳، در حرکت چهارم نمی‌توان کاشی نوع ۳ قرار داد.

در مورد کاشی نوع ۴، نیز به شکل زیر می‌توان صفحه را فرش کرد.



در مورد کاشی نوع ۵، نیز به دو صورت می‌توان حرکت شماره‌ی II را انجام داد، اما هر دو در حرکت VI متوقف می‌شود.



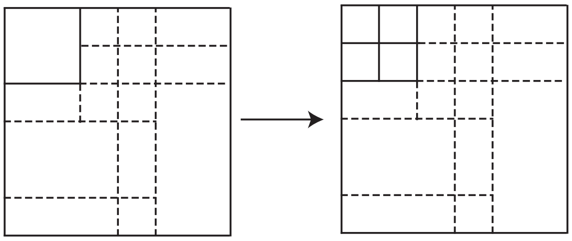


راه دوم. فرض کنید مساحت آن قطاع از دایره α باشد. بنابراین مساحت کاشی نوع ۱، $۱ - ۲\alpha$ و مساحت کاشی‌های نوع ۳ و ۵، $۱ - \alpha$ است. حال اگر مربع $n \times n$ را با یک نوع کاشی پر کنیم حتماً مربع $(n - ۲) \times (n - ۲)$ داخل آن نیز به‌طور کامل پوشانده می‌شود. در نتیجه (به‌عنوان مثال برای کاشی‌های ۳ و ۵) می‌توان گفت $n^۲(۱-\alpha) \geq (n-۲)^۲$. بنابراین $n^۲\alpha \leq ۴n - ۴$ و یا به‌طور معادل

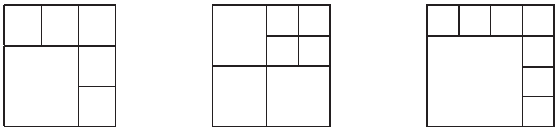
$$\alpha \leq \frac{۴(n - ۱)}{n^۲} < \frac{۴}{n + ۱}$$

پس به‌ازای هر n، $n < \frac{۴}{\alpha} - ۱$، که تناقض است. به این ترتیب با کاشی‌های ۳ و ۵ نمی‌توان مربع $(n - ۲) \times (n - ۲)$ را به‌ازای nهای بزرگ پوشاند. به روش مشابه، کاشی ۱ نیز رد می‌شود. برای کاشی‌های ۲ و ۴ نیز مشابه راه اول عمل می‌کنیم.

۲-۴ گزینه‌ی (ه). توجه کنید اگر بتوان از یک مربع، n مربع برید، آنگاه می‌توان مطابق شکل، با چهار قسمت کردن یکی از مربع‌ها، آن را به $n + ۳$ مربع نیز برید.



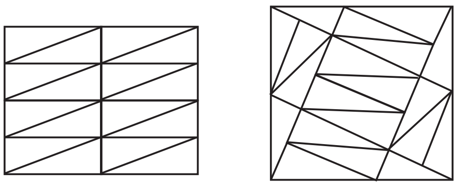
همچنین مطابق شکل‌های زیر، می‌توان یک مربع را به ۶، ۷ و یا ۸ مربع برید.



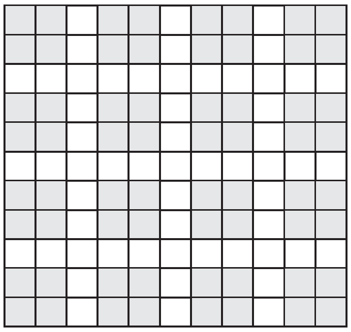
بنابراین به‌ازای هر $n \geq ۶$، می‌توان هر مربع را به n مربع افراز کرد.

یادداشت. با کمی بررسی می‌توان ثابت کرد که افراز یک مربع به ۲، ۳ و یا ۵ مربع ناممکن است.

۳-۴ گزینه‌ی (ج). اعداد ۱۶ و ۲۰ مربعی‌اند، زیرا

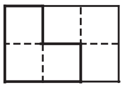


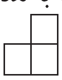
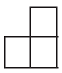
عدد ۳۲ مربعی نیست، زیرا هیچ ضلع یک مربع به ضلع $۴\sqrt{۲}$ را با پاره‌خط‌های به طول ۱، ۲ و $\sqrt{۵}$ نمی‌توان پوشاند. همچنین عدد ۲۵ نیز مربعی نیست زیرا اگر یک مربع به ضلع ۵ را بتوان با موزاییک‌های داده شده پوشاند، آنگاه تمام موزاییک‌ها باید افقی و یا قائم قرار گیرند، زیرا هر موزاییکی که بر یکی از اضلاع مربع قرار گیرد باید از سمت یکی از اضلاع به طول ۱ یا ۲ قرار گیرد. اکنون به راحتی می‌توان دید ۲۵ مربعی نیست.

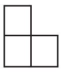
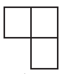


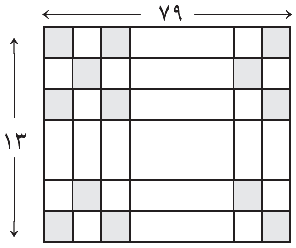
۴-۴ گزینه‌ی (ب). صفحه‌ی شطرنجی ۱۱ × ۱۱ را به‌صورت مقابل رنگ کنید. چنانچه ۱۶ مربع ۲ × ۲ هاشور خورده را جدا کنیم، دیگر هیچ مربعی ۲ × ۲ باقی نمی‌ماند. همچنین واضح است که به هر طریق ۱۵ مربع ۲ × ۲ از صفحه‌ی شطرنجی جدا شود، حداقل یکی از مربع‌های هاشور خورده، دست نخورده باقی می‌ماند.

۴-۵ گزینه‌ی (ب). گزینه‌های (ج)، (د) و (ه) به وضوح نادرستند، زیرا ۱۹۹۸ بر ۴ و بر ۵ بخش‌پذیر نیست. گزینه‌ی (الف) نیز نادرست است، زیرا اگر خانه‌های شکل اصلی را به‌صورت شطرنجی سیاه و سفید کنیم، تعداد خانه‌های سیاه از تعداد خانه‌های سفید دو تا بیشتر می‌شود (یا برعکس). اما هر  ، یک خانه‌ی سیاه و یک خانه‌ی سفید را می‌پوشاند. بنابراین اگر شکل اصلی با پوشانده شود باید تعداد خانه‌های سیاه با تعداد خانه‌های سفید برابر شود که تناقض است.



حال شکل را با استفاده از  می‌پوشانیم تا نشان دهیم گزینه‌ی (ب) صحیح است. با استفاده از  می‌توان یک مستطیل ۳ × ۲ به‌صورت مقابل ساخت.

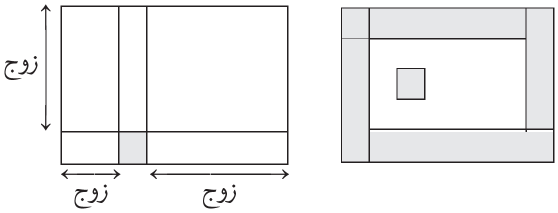
برای پر کردن جدول ابتدا دو کاشی  و  را در گوشه‌ی بالا سمت راست و گوشه‌ی پایین سمت چپ جدول قرار می‌دهیم. حال به راحتی و با استفاده از مستطیل‌های ۳ × ۲، مستطیل‌های ۴۸ × ۲ بالا و پایین را پر می‌کنیم. تنها یک مستطیل ۵۰ × ۳۶ می‌ماند که آن هم با استفاده از مستطیل‌های ۳ × ۲ به راحتی پر می‌شود، زیرا ۳|۳۶ و ۲|۵۰.



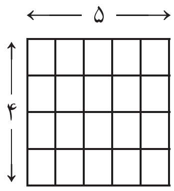
۴-۶ گزینه‌ی (ج). خانه‌های جدول را مطابق شکل به‌صورت شطرنجی سیاه و سفید می‌کنیم. از آنجایی که هر موزاییک ۱ × ۲ یک خانه‌ی سفید و یک خانه‌ی سیاه را می‌پوشاند، پس خانه‌ای مناسب است که بعد از حذف آن، تعداد خانه‌های سفید و سیاه برابر شوند، بنابراین خانه‌های سفید مناسب نیستند، زیرا ۵۱۴ خانه‌ی سیاه و ۵۱۳ خانه‌ی سفید داریم.

نمونه‌ششم: تاجیک، ۸۸/۱/۱۶

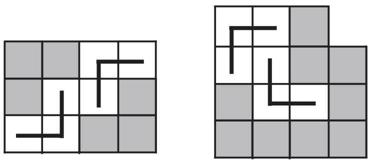
حال ثابت می‌کنیم تمام خانه‌های سیاه مناسب‌اند. دقت کنید شماره‌ی سطر و ستون هر خانه‌ی سیاه زوجیت یکسانی دارند. حال فرض کنید یک خانه‌ی سیاه را از جدول حذف کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم بقیه‌ی خانه‌ها را می‌توان با موزاییک‌های ۱ × ۲ پوشاند. برای این کار ابتدا دور جدول را می‌پوشانیم و سپس همین کار را تکرار می‌کنیم تا به جدولی برسیم که خانه‌ی حذف شده روی کناره‌ی آن باشد. دقت کنید این جدول نیز (فرد × فرد) است، ولی خانه‌ی حذف شده در آن دارای سطر و ستون فرد است و بنابراین بقیه‌ی سطر و ستون آن را می‌توان با موزاییک‌های ۱ × ۲ پوشاند. همچنین دو قسمت باقیمانده‌ی دیگر نیز چون ابعاد زوج دارند می‌توانند با موزاییک‌های ۱ × ۲ پوشانده شوند. بنابراین کل جدول با موزاییک‌های ۱ × ۲ پوشانده می‌شوند.



۷-۴ گزینه‌ی (ب). چون در هر سطر چهار شکل به صورت افقی قرار می‌گیرد، پس در کل ۱۶ = ۴ × ۴ شکل به صورت افقی در صفحه یافت می‌شود. همچنین در هر ستون سه شکل به صورت عمودی می‌توان یافت، بنابراین در کل ۱۵ = ۳ × ۵ شکل به صورت عمودی می‌توان در جدول قرار داد. به این ترتیب، در این صفحه می‌توان ۳۱ = ۱۵ + ۱۶ شکل مانند یافت.

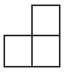


۸-۴ گزینه‌ی (ج). با توجه به شکل‌های زیر نتیجه می‌گیریم صفحات مشبک ۴ × ۳، ۴ × ۶ و ۴ × ۴ که یکی از خانه‌های گوشه‌ای آنها حذف شده است با فرش می‌شوند.

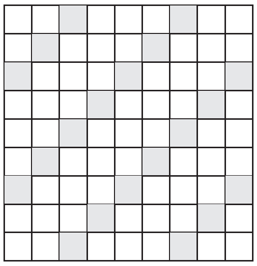


صفحه‌ی ۴ × ۶ نیز از کنار هم قرار دادن دو صفحه‌ی ۴ × ۳ به دست می‌آید. در مورد صفحه‌ی

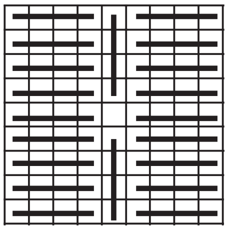
نمونه‌ششم: تاجیک، ۸۸/۱/۱۶

۵ × ۷، کافی است دقت کنید اگر صفحه‌ای با کاشی  فرش شود، در این صورت تعداد خانه‌های آن صفحه بر ۳ بخش‌پذیر است، زیرا اگر با k کاشی فرش شده باشد، باید تعداد خانه‌های آن ۳k باشد. اما ۳ ∤ ۵ × ۷. بنابراین صفحه‌ی ۵ × ۷ را نمی‌توان فرش کرد. در مورد صفحه‌ی ۳ × ۵، کافی است کاشی‌ای را در نظر بگیرید که خانه‌ی گوشه‌ی جدول را پوشانده است. این کاشی ۳ حالت دارد، که هر سه‌ی آنها با بررسی ساده‌ای رد می‌شود.

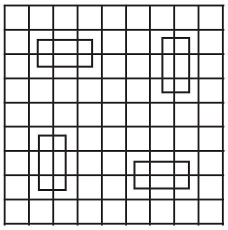
۴-۹ گزینه‌ی (ج). در شکل زیر که بیست خانه‌ی آن سیاه شده است هیچ چهارخانه‌ی سفید متوالی افقی یا عمودی نمی‌توان یافت، بنابراین $n <$ ۲۰.

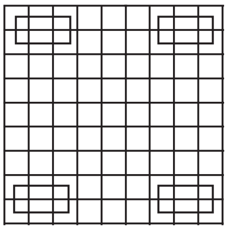


حال اگر جدول ۹ × ۹ را همانند شکل زیر به بیست بلوک چهارتایی تقسیم کنیم، به هر طریق ۱۹ خانه از جدول را سیاه کنیم، حداقل یک بلوک باقی می‌ماند که هیچ خانه‌ی آن سیاه نشده است. بنابراین $n =$ ۱۹.

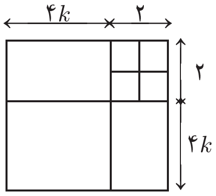


۴-۱۰ گزینه‌ی (الف). همانند شکل، چهار مستطیل جدا می‌کنیم. به وضوح مستطیل ۲ × ۳ دیگری نمی‌توان جدا کرد و چون در بین گزینه‌ها کمترین مقدار ۴ است، پس جواب همان ۴ است.



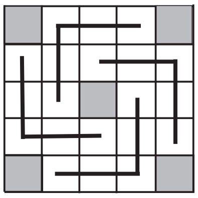


حال ثابت می‌کنیم ۴ کمترین مقدار ممکن است. به مستطیل‌های شکل مقابل دقت کنید. اگر k مستطیل از شکل حذف کرده باشیم به طوری که نتوان هیچ مستطیل ۳×۲ دیگری جدا کرد، آنگاه چون هیچ مستطیل ۳×۲ای وجود ندارد که با دو تا از مستطیل‌های شکل اشتراک داشته باشد، پس به‌ازای هر مستطیل این شکل باید حداقل یک مستطیل حذف کنیم، بنابراین $k \geq ۴$.

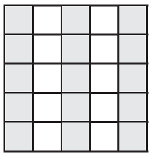


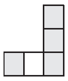
۴-۱۱ گزینه‌ی (د). ابتدا نشان می‌دهیم به‌ازای nهای فرد این کار ممکن است. فرض کنید $n = ۲k + ۱$. در این صورت باید جدول $(۴k + ۲)(۴k + ۲)$ را با یک موزاییک ۲×۲ و $(۲k + ۱)^۲ - ۱$ موزاییک ۱×۴ بپوشانیم. همانند شکل، ابتدا موزاییک ۲×۲ را در یک گوشه می‌گذاریم. دو مستطیل $۴k \times ۲$ و یک مربع $۴k \times ۴k$ باقی می‌ماند. چون مستطیل $۴k \times m$ را می‌توان با موزاییک‌های ۱×۴ پوشاند، پس بقیه‌ی صفحه‌ی فوق را نیز می‌توان با موزاییک‌های ۱×۴ پوشاند. برای اثبات اینکه n لزوماً فرد است، ستون‌های صفحه را به صورت یکی در میان سیاه و سفید می‌کنیم. حال هر کاشی ۱×۴ افقی و ۲×۲ هر کدام به تعداد مساوی خانه‌های سیاه و سفید را می‌پوشانند. اما کاشی ۱×۴ عمودی چهارخانه‌ی سفید و یا چهارخانه‌ی سیاه را می‌پوشاند. و چون تعداد خانه‌های سیاه و سفید با هم برابر است، پس تعداد کاشی‌های ۱×۴ عمودی در خانه‌های سفید با تعداد کاشی‌های ۱×۴ عمودی در خانه‌های سیاه برابر است. بنابراین، تعداد کاشی‌های ۱×۴ عمودی زوج است. با استدلالی مشابه می‌توان نشان داد تعداد کاشی‌های ۱×۴ افقی نیز زوج است، بنابراین، تعداد کل کاشی‌های ۱×۴ زوج است و در نتیجه $(n^۲ - ۱)$ زوج است و این یعنی n فرد است.

۴-۱۲ گزینه‌ی (ج). مطابق شکل می‌توان چهار تا از این قطعات را در یک جدول قرار داد، بدون اینکه یکدیگر را قطع کنند.

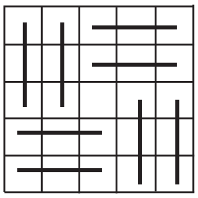


حال نشان می‌دهیم برای پنج قطعه این کار ممکن نیست. ابتدا شکل را به صورت راه‌راه سیاه و سفید می‌کنیم. واضح است که تفاضل تعداد خانه‌های سیاه و سفید برابر ۵ است. حال تعداد خانه‌های



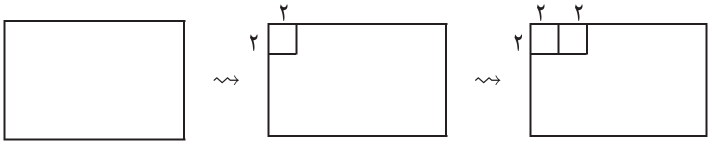
سیاه منهای تعداد خانه‌های سفیدی که هر بلوک  می‌پوشاند (با توجه به نحوه‌ی رنگ‌آمیزی) ۳+ یا ۳− است. بنابراین اگر با این بلوک‌ها کل صفحه را پوشانده باشیم، تعداد خانه‌های سیاه منهای تعداد خانه‌های سفید باید مضرب ۳ باشد، اما ۵ مضرب ۳ نیست و این یعنی چنین کاری امکان‌پذیر نیست.

۴-۱۳ گزینه‌ی (د). به‌ازای ۸ کاشی مثال زیر را در نظر بگیرید.

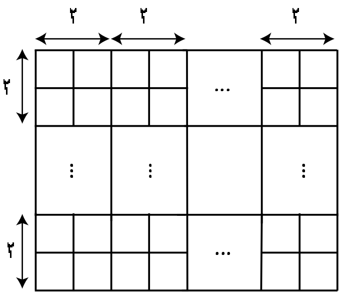


چون ۳ × ۹ = ۲۷ > ۲۵، پس ۹ کاشی را نمی‌توان در مربع ۵ × ۵ قرار داد.

۴-۱۴ گزینه‌ی (ب). فرض کنید صفحه‌ای $m \times n$ را با موزاییک‌های ۲ × ۲ فرش کنیم. در این‌صورت برای اینکه گوشه‌ی این صفحه (به شکل دقت کنید) پر شود، باید یک مربع ۲ × ۲ را در آن گوشه قرار داد. به این ترتیب دوگوشه‌ی جدید دیگر در آن به‌وجود می‌آید. گوشه‌ی بالایی با استدلال قبلی تنها به یک روش پوشانده می‌شود و آن قرار دادن یک مربع ۲ × ۲ در آنجاست.



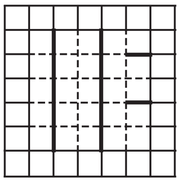
با ادامه‌ی این روند باید تا انتهای سطر پر شود و این یعنی ۲ | m. با استدلالی مشابه نتیجه می‌شود ۲ | n. از طرف دیگر اگر ۲ | m و ۲ | n، آنگاه به وضوح با مربع‌بندی به ابعاد ۲ می‌توان کاشی‌ها را قرار داد.



به این ترتیب، از بین صفحه‌های موجود فقط ۲۰ × ۱۰ خاصیت موردنظر را دارد.

نمونه‌ششم: تاجیک، ۸۸/۱/۱۶

۱۵-۴ گزینه‌ی (ه). چون تمام پاره‌خط‌های مرزی فقط با مربع‌های مرزی پوشانده می‌شوند، پس تمام مربع‌های مرزی باید رسم شوند. آنچه باقی می‌ماند یک مربع 5×5 بدون پاره‌خط‌های مرزی است.



حال پاره‌خط‌هایی را که تیره‌تر شده‌اند، در نظر بگیرید. برای پوشاندن هر یک از این پاره‌خط‌ها، باید یکی از دو مربع شامل آنها رسم شود. اما مربع‌هایی که دو پاره‌خط تیره‌تر متمایز را می‌پوشانند، متمایزند. بنابراین (چون تعداد پاره‌خط‌های تیره‌تر ۱۲تاست) حداقل ۱۲ مربع 1×1 دیگر باید رسم کرد. یعنی درکل حداقل ۳۶ مربع باید رسم کرد. مثال زیر، حالت ۳۶ را نشان می‌دهد.