

فصل ۱

مثلث (I)

۱-۱ P و Q به ترتیب روی امتداد ضلع‌های AB و AC از مثلث حاده‌الزاویه ABC قرار دارند.

اگر $PC = 3$ ، $QB = 6$ و $\hat{QBC} = \hat{PCB} = 90^\circ$ ، آنگاه اندازه‌ی ارتفاع AH چقدر است؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳ د) ۴ ه) ۵

۲-۱ در مثلثی که ضلع‌های آن اندازه‌های متفاوت دارند، یکی از ارتفاع‌ها ۴ و ارتفاع دیگر ۱۲ است.

اگر ارتفاع سوم عددی صحیح باشد، آنگاه بزرگ‌ترین مقدار ممکن آن برای چقدر است؟

الف) ۴ ب) ۵ ج) ۶ د) ۷ ه) ۸

۳-۱ مرکز دایره‌های محاطی و محیطی مثلث ABC نسبت به یکی از ضلع‌های آن قرینه‌اند. اندازه‌ی

بزرگ‌ترین زاویه‌ی این مثلث چقدر است؟

الف) 90° ب) 108° ج) 120° د) 144° ه) 150°

۴-۱ A' قرینه‌ی A نسبت به ضلع BC و B' قرینه‌ی B نسبت به ضلع AC از مثلث ABC و

T نقطه‌ی برخورد $B'A'$ با AC است. اگر $\hat{BTA} = \hat{ATC} = 75^\circ$ ، آنگاه $\hat{B'A'A}$ برابر است با

الف) 90° ب) 110° ج) 120° د) 135° ه) 150°

۵-۱ فرض کنید O مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABC و M و N به ترتیب محل برخورد AO با

ضلع BC و دایره‌ی محیطی مثلث ABC باشد. اگر $OM = MN$ و $AB \neq AC$ ، آنگاه کدام

حکم زیر درباره‌ی زاویه‌ی A صحیح است؟

الف) $\hat{A} = 45^\circ$ ب) $\hat{A} < 45^\circ$

ج) $\hat{A} = 60^\circ$ د) $\hat{A} > 60^\circ$

ه) $45^\circ < \hat{A} < 60^\circ$

۶-۱ فرض کنید a, b, c طول ضلع‌ها و h_a, h_b, h_c ارتفاع‌های نظیر ضلع‌های a, b, c از مثلث ABC باشند. اگر بدانیم $a + h_a = b + h_b = c + h_c$ ، آنگاه کدام گزینه درباره‌ی مثلث درست است؟

(الف) مثلث می‌تواند متساوی‌الاضلاع نباشد، ولی حتماً متساوی‌الساقین است.

(ب) مثلث حاده‌الزاویه است و می‌تواند هر زاویه‌ای حاده‌ای به خود بگیرد.

(ج) مثلث متساوی‌الاضلاع است.

(د) مثلث می‌تواند زاویه‌ی منفرجه نیز داشته باشد.

(ه) مثلث حتماً منفرجه‌الزاویه است.

۷-۱ O مرکز دایره‌ی محیطی مثلث ABC و M نقطه‌ای روی ضلع AB است به طوری که $\hat{BAC} = \hat{MOA}$. اگر $BC = 2$ ، آنگاه کدام یک از حکم‌های زیر درباره‌ی AM دقیق‌تر است؟

(الف) $AM = 1$

(ب) $AM \geq 1$

(ج) $AM < 1$

(د) $0 < AM < 2$

(ه) $AM = 2$

۸-۱ در مثلث ABC میانه‌های نظیر B و C بر یک دیگر عمودند. بیش‌ترین مقدار ارتفاع AH برابر است با

(الف) $\frac{BC}{2}$

(ب) $\frac{\sqrt{3}}{2}BC$

(ج) $\frac{3}{4}BC$

(د) $\frac{3}{4}BC$

(ه) ارتفاع AH می‌تواند به دلخواه بزرگ باشد.

۹-۱ دایره‌ی محیطی مثلث ABC ضلع AB را به دو پاره‌خط AD و DB به ترتیب با طول‌های ۵ و ۳ تقسیم کرده است. اگر بدانیم $\hat{A} = 60^\circ$ ، آنگاه طول BC چقدر است؟

(الف) ۱۰

(ب) ۱۲

(ج) ۱۳

(د) ۱۵

(ه) طول BC به صورت یکتا به دست نمی‌آید.

از رأس A در مثلث ABC عمودهای AE و AF را بر نیمسازهای خارجی زاویه‌های B و C رسم می‌کنیم. اگر محیط مثلث ABC برابر ۱۲ باشد، آنگاه طول پاره‌خط EF چقدر است؟

(الف) ۵

(ب) $4\sqrt{2}$

(ج) ۶

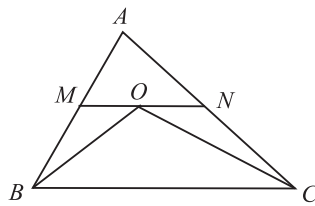
(د) $4\sqrt{3}$

(ه) ۸

۱۰-۱ در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) می‌دانیم $AB < AC$. نقطه‌ای روی ضلع BC و M و N به ترتیب پای عمودهای رسم شده از P بر AB و AC اند. P کجا باشد تا MN حداقل مقدار ممکن باشد؟

- (الف) B (ب) C
 (ج) وسط BC (د) پای ارتفاع رسم شده از A
 (ه) پای نیمساز رسم شده از A

۱۱-۱ در مثلث شکل زیر $AB = ۱۲$ ، $BC = ۲۴$ و $AC = ۱۸$. BO و CO به ترتیب نیمسازهای زاویه‌های ABC و ACB اند. MN خطی موازی BC است که از O می‌گذرد. محیط مثلث AMN چقدر است؟



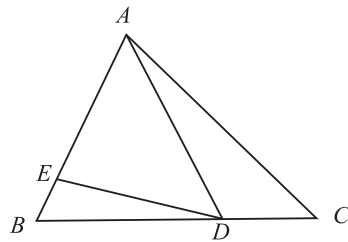
- (الف) 30° (ب) 33° (ج) 36° (د) 39° (ه) 42°

۱۲-۱ فرض کنید در مثلث ABC ، CH ارتفاع باشد و $CH \geq AB$. در این صورت بزرگ‌ترین مقدار زاویه‌ی C برابر است با

- (الف) 30° (ب) 45° (ج) 60° (د) 90° (ه) 120°

(مرحله‌ی اول المپیاد ریاضی ایران-۱۳۷۴)

۱۳-۱ در مثلث شکل زیر $\hat{CAD} = 2^\circ$ ، $AB = AC$ و $AE = AD$. اندازه‌ی زاویه‌ی BDE چقدر است؟



- (الف) 8° (ب) 9° (ج) 10° (د) $12,5^\circ$ (ه) 20°

۱۴-۱ در مثلث ABC ، ضلع BC از طرف C تا نقطه‌ی P امتداد یافته است، به طوری که دو مثلث PAB و PCA متشابه‌اند. اگر $AB = ۸$ ، $BC = ۷$ و $CA = ۶$ ، آنگاه PC برابر است با

- الف) ۷ (ب) ۸ (ج) ۹ (د) ۱۰ (ه) ۱۱

۱۵-۱ در مثلث ABC زاویه‌ی A قائمه است. نقطه‌ی F روی وتر BC و نقطه‌ی D روی ضلع AC طوری قرار دارند که AF بر BC عمود است و $BD = DC = CF = ۱$. اندازه‌ی ضلع AC از این مثلث چقدر است؟

- الف) $\sqrt{۲}$ (ب) $\sqrt{۳}$ (ج) $\sqrt{۲}$ (د) $\sqrt{۳}$ (ه) $\sqrt{۳}$

۱۶-۱ در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$)، میانه‌ی BM بر نیمساز CD عمود است. در این صورت $\sin(C)$ برابر کدام یک از مقادیرهای زیر است؟

- الف) $\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۳}}}{۲}$ (ب) $\frac{\sqrt{۲+\sqrt{۲}}}{۲}$ (ج) $\frac{\sqrt{۵}}{۴}$ (د) $\frac{\sqrt{۱۵}}{۴}$ (ه) $\frac{۱}{۴}$

۱۷-۱ مثلث ABC با زاویه‌های حاده مفروض است. نقطه‌های D و E را به ترتیب روی AB و AC در نظر می‌گیریم به طوری که دایره‌ی محیطی مثلث ADE در نقطه‌ی X بر BC مماس باشد. اگر D و E را طوری انتخاب کنیم که DE مینیمم شود، در این صورت داریم

- الف) AX میانه است. (ب) AX ارتفاع است.
ج) AX نیمساز است. (د) X بین پای میانه و پای نیمساز قرار دارد.
ه) X بین پای نیمساز و پای ارتفاع قرار دارد.

(مرحله‌ی اول المپیاد ریاضی ایران-۱۳۷۶)

۱۸-۱ در مثلث ABC یکی از میانه‌های بر یکی از نیمسازهای داخلی عمود است. اگر اندازه‌ی ضلع‌های این مثلث سه عدد صحیح متوالی باشد، آنگاه اندازه‌ی محیط این مثلث برابر است با

- الف) ۶ (ب) ۹ (ج) ۱۵ (د) ۱۸ (ه) ۲۱

(مرحله‌ی اول المپیاد ریاضی ایران-۱۳۷۷)

۱۹-۱ از نقطه‌ی O داخل مثلث ABC ، عمودهای OM ، ON و OP را به ترتیب بر ضلع‌های AB ، BC و AC رسم می‌کنیم. اگر $AM = ۳$ ، $MB = ۵$ ، $BN = ۴$ ، $NC = ۲$ و $CP = ۴$ ، آنگاه اندازه‌ی AP برابر است با

- الف) ۳ (ب) $۲\sqrt{۲}$ (ج) ۴ (د) $۲\sqrt{۳}$ (ه) $۳\sqrt{۲}$

(مرحله‌ی اول المپیاد ریاضی ایران-۱۳۷۴)

۲۰-۱ مثلث متساوی‌الاضلاع MNP در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC محاط شده است به طوری که $NP \perp BC$. نسبت مساحت مثلث MNP به مساحت مثلث ABC برابر است با
 الف) $\frac{1}{4}$ ب) $\frac{1}{3}$ ج) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ د) $\frac{1}{2\sqrt{3}}$ ه) $\frac{\sqrt{2}}{3}$
 (مرحله‌ی اول المپیاد ریاضی ایران-۱۳۷۳)

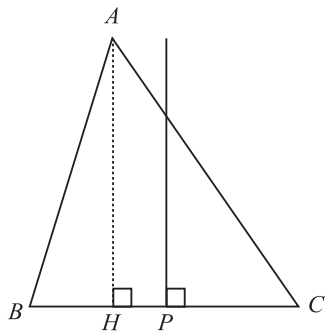
۲۱-۱ فرض کنید طول ضلع‌های مثلث ABC عددهای صحیح a, b, c و طول ارتفاع‌های آن h_a, h_b, h_c هستند. اگر رابطه‌ی $h_a = h_b + h_c$ برقرار باشد، آنگاه
 الف) $a^2 + b^2 + c^2$ مربع کامل است. ب) $2(a^2 + b^2 + c^2)$ مربع کامل است.
 ج) $3(a^2 + b^2 + c^2)$ مربع کامل است. د) $b^2 + c^2 - a^2$ مربع کامل است.
 ه) $a^2 + b^2 - c^2$ مربع کامل است.

۲۲-۱ نیمسازهای داخلی مثلث ABC دایره‌ی محیطی آن را در نقطه‌های A', B', C' قطع می‌کنند. اگر مرکز دایره‌ی محاطی داخلی مثلث $A'B'C'$ باشد، آنگاه اندازه‌ی زاویه‌ی $B'I'C'$ برابر کدام گزینه است؟

- الف) $90^\circ + \frac{\hat{B} + \hat{C}}{4}$ ب) $180^\circ - \frac{\hat{B} + \hat{C}}{4}$
 ج) $2\hat{A} + \hat{B} - \hat{C}$ د) $180^\circ - \hat{A}$
 ه) $2\hat{A}$

(مرحله‌ی اول المپیاد ریاضی ایران-۱۳۸۲)

۲۳-۱ در شکل زیر PA مماس بر دایره و B وسط PC است. می‌دانیم $AB = 1$ ، در این صورت طول AC چقدر است؟



- الف) $\sqrt{2}$ ب) $\frac{3}{2}$ ج) $\frac{2 + \sqrt{2}}{2}$ د) ۲ ه) هیچ کدام

(المپیاد مقدماتی ریاضی ایران-۱۳۸۰)

۲۴-۱ در مثلث ABC سه نقطه‌ی A' ، B' و C' به ترتیب بر روی ضلع‌های BC ، CA و AB چنان قرار دارند که سه خط AA' ، BB' و CC' در نقطه‌ی P هم رسند. می‌دانیم $PB = 4$ ، $PC = 6$ ، $PA' = 2$ ، $PB' = 2$ و $PC' = 3$. اندازه‌ی PA چقدر است؟

- الف) ۳ (ب) $\frac{3}{5}$ (ج) ۴ (د) $\frac{4}{5}$ (ه) ۵

(المپیاد مقدماتی ریاضی ایران-۱۳۸۴)

۲۵-۱ در مثلث حاده‌الزاویه‌ی ABC ، BD و CE به ترتیب ارتفاع‌های وارد بر ضلع‌های AC و AB اند. فرض کنید $DE = BC$ ، در این صورت زاویه‌ی A چند درجه است؟

- الف) 30° (ب) 45°
ج) 60° (د) 30° یا 60°

(ه) نمی‌توان زاویه A را مشخص کرد.

(مرحله‌ی اول المپیاد ریاضی ایران-۱۳۷۹)

۲۶-۱ در مثلث ABC ارتفاع وارد بر ضلع BC آن را در D و ارتفاع وارد بر ضلع CA نیز AD را در H قطع می‌کند. اگر $AD = 4$ ، $BD = 3$ و $CD = 2$ ، آنگاه طول HD برابر است با

- الف) $\frac{\sqrt{5}}{2}$ (ب) $\frac{3}{2}$
ج) $\sqrt{5}$ (د) $\frac{5}{2}$
ه) $\frac{3\sqrt{5}}{2}$

(مرحله‌ی اول المپیاد ریاضی ایران-۱۳۷۷)

۲۷-۱ اگر بین ضلع‌های یک مثلث رابطه‌ی

$$C^4 - 2(a^2 + b^2)C^2 + a^4 + a^2b^2 + b^4 = 0$$

برقرار باشد، زاویه‌ی C برابر است با

- الف) دقیقاً 30° (ب) دقیقاً 60°
ج) دقیقاً 120° (د) 60° یا 120°
ه) 30° یا 120°

(مرحله‌ی اول المپیاد ریاضی ایران-۱۳۷۳)

۲۸-۱ در مثلث قائم‌الزاویه‌ی ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. اگر شعاع دایره‌های

مخاطی مثلث‌های ABH و ACH به ترتیب ۱ و ۳ باشند، آنگاه شعاع دایره‌ی مخاطی مثلث ABC برابر است با

- (الف) ۳
(ب) $\sqrt{10}$
(ج) $2\sqrt{2}$
(د) ۴٫۵
(ه) ۵

(مرحله‌ی اول المپیاد ریاضی ایران-۱۳۷۵)

۲۹-۱ در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($AB = AC$)، نیمساز زاویه‌ی C مثلث ABC را به دو مثلث متساوی‌الساقین دیگر تقسیم کرده است. مقدار $\frac{BC}{AB}$ برابر کدام یک از عددهای زیر است؟

- (الف) $\frac{1}{2}$
(ب) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
(ج) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$
(د) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$
(ه) $\sqrt{2}$

(مرحله‌ی اول المپیاد ریاضی ایران-۱۳۸۳)

۳۰-۱ از شهر A جاده‌ای مستقیم خارج شده است که دو شهر B و C در دو طرفش قرار دارند. مجموع فاصله‌های دو شهر B و C از جاده حداکثر چند کیلومتر است؟ فرض کنید فاصله‌ی شهر A از دو شهر دیگر 60° و 50° کیلومتر و فاصله‌ی دو شهر B و C از یک دیگر 40° کیلومتر است.

- (الف) 30° (ب) 40° (ج) 50° (د) 60° (ه) 70°

(مرحله‌ی اول المپیاد ریاضی ایران-۱۳۸۴)

۳۱-۱ در مثلث ABC ، B' قرینه‌ی B نسبت به ضلع AC و C' قرینه‌ی C نسبت به ضلع AB است. فرض کنید $B'C' = AB + AC$ ، در این صورت زاویه‌ی A چند درجه است؟

- (الف) 30° (ب) 40°
(ج) 60° (د) 90°

(ه) این زاویه 30° یا 60° است.

۳۲-۱ می‌توان ثابت کرد در هر مثلث دلخواه ABC ، قرینه‌ی مرکز ارتفاعیه (محل هم‌رسمی ارتفاع‌ها) نسبت به وسط ضلع BC روی دایره‌ی محیطی مثلث قرار می‌گیرد. این نقطه را D بنامید، اندازه‌ی زاویه‌ی DAC برابر است با

- (الف) $\frac{\hat{A}}{2}$ (ب) $\frac{\hat{B}}{2}$

(د) $90^\circ - \hat{B}$

(ج) $90^\circ - \hat{A}$

(ه) $90^\circ - \frac{\hat{A} + \hat{B}}{2}$

(مرحله‌ی اول المپیاد ریاضی ایران-۱۳۸۳)

۳۳-۱ در مثلث ABC می‌دانیم $\hat{A} = 90^\circ$ ، $\hat{C} = 30^\circ$ و $AB = 1$ و E و F به ترتیب روی ضلع‌های BC و AC طوری قرار دارند که $AC = 6AF$ و $BC = 4CE$. طول EF برابر است با

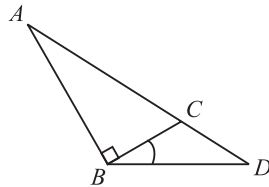
(الف) ۱ (ب) $\frac{\sqrt{39}}{6}$

(ج) $\frac{3}{2}$ (د) $\frac{\sqrt{13}}{2}$

(ه) قابل محاسبه نیست.

(المپیاد مقدماتی ریاضی-۱۳۸۰)

۳۴-۱ در شکل زیر فرض کنید $AB = CD = 1$. در این صورت طول AC برابر است با



(الف) $\sqrt{2}$ (ب) $\sqrt{3}$ (ج) $\sqrt{2}$ (د) $\frac{3}{2}$ (ه) $\sqrt{3}$

(مرحله‌ی اول المپیاد ریاضی ایران-۱۳۷۳)

۳۵-۱ مثلث قائم‌الزاویه ABC به ضلع‌های ۳، ۴ و ۵ مفروض است. فرض کنید نقطه‌ی P داخل مثلث طوری است که مجموع فاصله‌های P از ضلع‌های مثلث کم‌ترین مقدار ممکن است. این مجموع چقدر است؟

(الف) $\frac{6}{25}$ (ب) $\frac{12}{25}$ (ج) $\frac{6}{5}$ (د) $\frac{12}{5}$ (ه) $\frac{16}{5}$

۳۶-۱ مثلث قائم‌الزاویه ABC در نیم‌دایره‌ی به قطر BC محاط شده است. فرض کنید G مرکز ثقل مثلث و X و Y به ترتیب وسط ضلع‌های AC و AB اند. GX و GY را از طرف X و Y امتداد می‌دهیم تا نیم‌دایره را به ترتیب در P و Q قطع کنند. حاصل عبارت $GX \cdot XP + GY \cdot YQ$ چقدر است؟

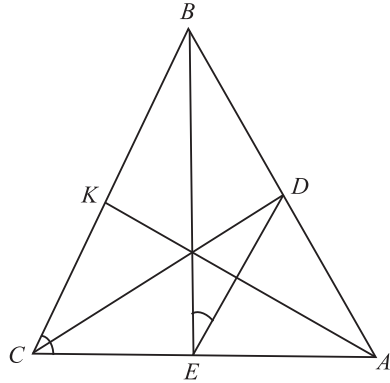
(الف) $\frac{1}{6}$ (ب) $\frac{2}{9}$ (ج) $\frac{1}{3}$ (د) $\frac{1}{2}$ (ه) $\frac{2}{3}$

۳۷-۱ در مثلث قائم‌الزاویه ABC ($\hat{A} = 90^\circ$)، $AB = 4$ و $AC = 6$. نیم‌دایره‌ای که مرکزش

روی وتر BC قرار دارد رسم می‌کنیم به طوری که بر AB و AC مماس باشد. شعاع این دایره چقدر است؟

- (الف) $\sqrt{2}$ (ب) ۲ (ج) $2\sqrt{4}$ (د) $2\sqrt{5}$ (ه) $\frac{2}{3\sqrt{13}}$

۳۸-۱ در شکل زیر BE بر AC عمود است. اگر $B\hat{E}D = 3^\circ$ و $A\hat{C}B = 60^\circ$ ، آنگاه نسبت BC به BK چند است؟



- (الف) $\frac{1}{4}$ (ب) $\frac{1}{3}$ (ج) $\frac{1}{2}$ (د) $\frac{2}{3}$ (ه) $\frac{3}{4}$

(مرحله‌ی اول المپیاد ریاضی ایران-۱۳۸۶)

۳۹-۱ همهی زاویه‌های مثلثی از 59° درجه بزرگ‌ترند. کدام گزینه درباره‌ی این مثلث درست است؟

- (الف) یک زاویه‌ی منفرجه دارد. (ب) یک زاویه‌ی 60° درجه دارد.
(ج) قائم‌الزاویه است. (د) متساوی‌الاضلاع است.

(ه) همهی زاویه‌هایش از 62° درجه کوچک‌ترند.

(مرحله‌ی اول المپیاد ریاضی ایران-۱۳۸۶)